

FONCTION INVERSE ET ÉQUATIONS QUOTIENTS

1) LA FONCTION INVERSE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

Remarques :

- Le nombre 0 n'appartient pas au domaine de définition de la fonction inverse car on ne peut pas diviser par 0.
- La fonction inverse n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction inverse $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$.

La fonction inverse $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ tels que $a < b$. On a alors :

$$g(a) - g(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

1er cas: $a < b < 0$

$b - a > 0$ puisque $a < b$,

$ab > 0$ puisque c'est le produit de deux nombres de même signe.

On en déduit que : $\frac{b-a}{ab} > 0$

$$\Leftrightarrow g(a) - g(b) > 0$$

$$\Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

Les images de a et b par la fonction inverse sont donc rangées dans l'ordre contraire de a et de b , ce qui démontre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

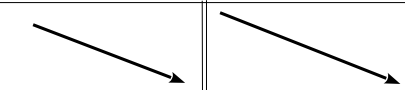
2ème cas: $0 < a < b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
- Deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

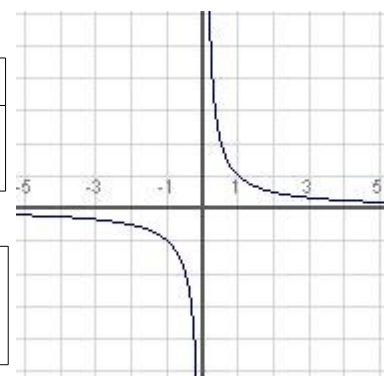
Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g			

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,2	0,25	0,5	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{x}$	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25



Définition :

Dans un repère orthogonal (O, I, J) , la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$. (Elle est souvent notée \mathcal{H})

Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole \mathcal{H} représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Soit un point $M(x;y)$ appartenant à \mathcal{H} . On a alors $y = \frac{1}{x}$.

Le symétrique de M par rapport à O est le point $M'(-x;-y)$.

Or $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -y$, donc M' appartient aussi à \mathcal{H} .

Ainsi pour tout point M de \mathcal{H} , son symétrique par rapport à O appartient aussi à \mathcal{H} . On en déduit que \mathcal{H} est symétrique par rapport à O .

2) ÉQUATION QUOTIENT – INÉQUATION QUOTIENT

Propriété :

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad - bc$ non nuls.

L'équation quotient $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ n'a de sens que pour $x \neq -\frac{d}{c}$.

Cette équation admet pour unique solution $-\frac{b}{a}$.

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Exemple :

Pour $x \neq \frac{5}{2}$, l'unique solution de $\frac{-3x+1}{2x-5} = 0$ est $x = \frac{1}{3}$. (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)

Propriété :

- Le quotient de deux réels de même signe est positif.
- Le quotient de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad - bc$ non nuls.

Pour résoudre l'inéquation $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on

détermine le signe du quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$. La méthode est identique pour $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$, $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$ et $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$

Exemple :

Résolution de $\frac{-3x+1}{2x-5} < 0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

On en déduit le signe de $\frac{-3x+1}{2x-5}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-3x+1$	+	0	-	-
$2x-5$	-	-	0	+
$\frac{-3x+1}{2x-5}$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$. (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)