

PROBABILITÉS

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, ÉVENTUALITÉ, UNIVERS

Un exemple bien connu : (On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1, 2, ..., 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire**, c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

Exemple : les éventualités sont

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω .

Exemple : $\Omega =$

B) ÉVÈNEMENT

Définition :

On appelle **événement** toute partie de l'univers.

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$).

Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).

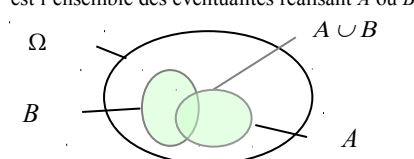
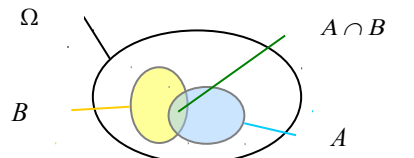
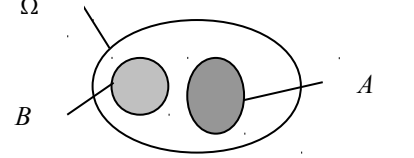
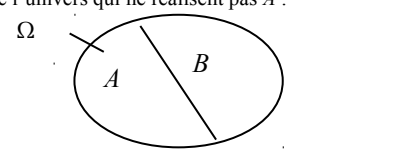
Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement

A : « obtenir un nombre pair » .

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A , on dit que ω réalise A .

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.

A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : $\text{card}(A)$	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : « obtenir un nombre pair » est composé de 3 éventualités .
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	
Événement impossible : $A = \emptyset$	événement qui ne se réalise jamais	
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	
C est la réunion de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : « obtenir un nombre au moins égal à 4 » ; $E = \{ 4 ; 5 ; 6 \}$ Soit l'événement F : « obtenir un nombre impair » ; $F = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$
C est l' intersection de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	
A et B sont disjoints ou incompatibles	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \emptyset$ 	
A et B sont contraires ou complémentaires . $B = \bar{A}$	$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ \bar{A} est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
 Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A .

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
 Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

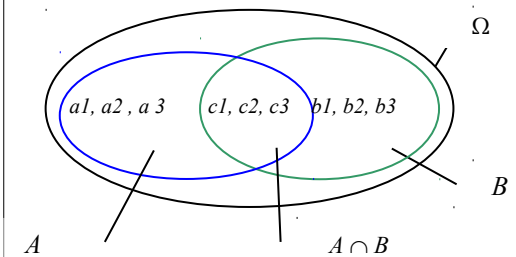
Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω , alors :

- La probabilité de l'événement certain est
- La probabilité de l'événement impossible est
- Si $A \subset B$, alors
- $P(A \cup B) =$
 Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) =$
- $P(\bar{A}) =$

Considérons l'exemple suivant (dans le cas général, la démonstration est la même)



Par abus de langage, on note souvent $P(\omega)$ au lieu de $P(\{\omega\})$

Preuve : (des deux dernières propriétés)

1)

On a : $A = \{a1, a2, a3, c1, c2, c3\}$ et $B = \{b1, b2, b3, c1, c2, c3\}$
 De plus $A \cap B = \{c1, c2, c3\}$ et $A \cup B = \{a1, a2, a3, c1, c2, c3, b1, b2, b3\}$

On a alors :

$$P(A \cup B) = P(\{a1\}) + P(\{a2\}) + P(\{a3\}) + P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\}) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Or :

$$P(B) = P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\}) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

$$= P(A \cap B) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

on en déduit que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cap B) = 0$, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) On a $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Ainsi d'après la propriété précédente, on a : $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A})$
 Or $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cap \bar{A}) = 0 \dots$

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω_i , on a :

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

$$\text{On a alors, pour tout événement } A : P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré », « boules indiscernables » ... indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :

Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité						

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » est : $P(A) =$

4) LOI DES GRANDS NOMBRES

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle fréquence d'apparition d'une éventualité donnée, noté ω_i , le nombre :

$$f_i = \frac{\text{Nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ est apparaît}}{\text{Nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé « La loi des grands nombres » ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Propriété :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Remarques :

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de probabilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences.

Exemple :

Lorsqu'on jette n fois le dé, la fréquence d'apparition de chacun des nombres est très variable lorsque n est petit et se stabilise autour de $\frac{1}{6}$ pour n grand .

La loi de probabilité que nous avons définie (grâce à la situation d'équiprobabilité) pour l'expérience aléatoire est bien validée ...