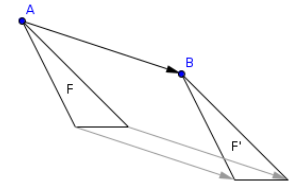


VECTEURS

1) TRANSLATION

Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B. La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.



Définition :

Soit A et B deux points du plan.
 La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
 Lorsque A et B sont distincts, le vecteur \overrightarrow{AB} est représenté par une flèche allant de A vers B .

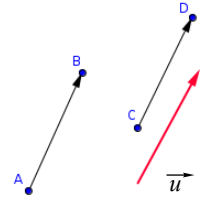
2) VECTEURS

Définition :

Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B .
 Les points A et B , pris dans cet ordre et les points C et D , pris dans cet ordre, représentent le même **vecteur** \vec{u} .

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Cas particulier : \overrightarrow{AA} est le **vecteur nul**. On écrit $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

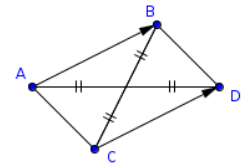


Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur \vec{u} car on peut le tracer en chaque point du plan.

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque :

Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

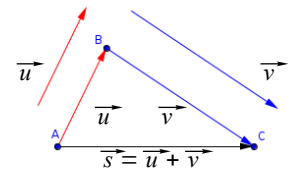
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont **même direction**.
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont **le même sens**.
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont **la même norme**.

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :

La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur \vec{s} résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur \vec{u} et t' de vecteur \vec{v} . On écrit :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$



Remarque :

La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

Propriété (relation de Chasles) :

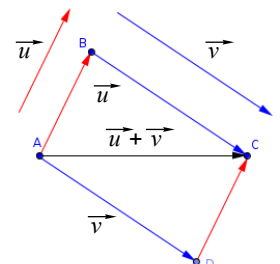
Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.
 Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Preuve :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, d'après la relation de Chasles.



Remarque :

Lorsque les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont dessinés avec une origine commune A , il suffit de dessiner le parallélogramme $ABCD$ pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{i} quatre vecteurs . On a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- si $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{w} = \vec{i}$ alors $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{i}$

Définition :

Soit \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur \vec{u} le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs \vec{u} et $-\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Application :

Soit trois points A , B et I . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment $[AB]$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- B est le symétrique de A par rapport à I .
- $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J)

Définition :

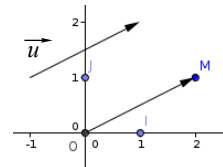
Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :

Puisque l'origine O a pour coordonnées $(0; 0)$, alors pour tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$,

Les coordonnées de \overrightarrow{OM} sont $\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple : $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque :

On note $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. On parle alors de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, plutôt que de repère (O, I, J) .

Propriété :

Soit \vec{u} un vecteur . Pour tous les points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AB} sont égales.

Remarque :

Les coordonnées d'un vecteur \vec{u} sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Propriétés :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de \vec{u} .

- Soit A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de \overrightarrow{AB} , de \overrightarrow{BC} et de \overrightarrow{AC} sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$.
On a bien $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ et $(y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_C - y_A$.
- Puisque $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, alors $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + (-x') \\ y + (-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel.
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

- $1\vec{u} = \vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$, $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$...
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Définition :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.
 \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans un repère, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

On peut aussi introduire la propriété suivante, appelée « condition analytique de colinéarité »

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Ce nombre se note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

Remarque :

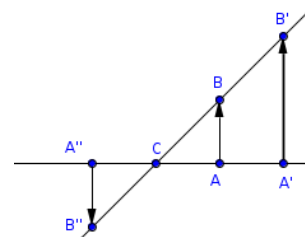
Soit A , B , A' et B' quatre points du plan.

- Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' , alors $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$

- Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' , alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$

Exemple :

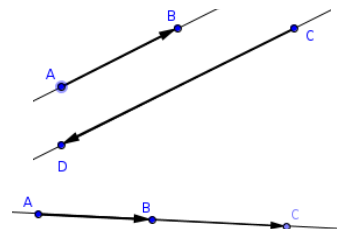
- Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport 2. On a $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.
- Les points A'' et B'' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport -1, c'est à dire par la symétrie centrale de centre C . On a $\overrightarrow{A''B''} = -\overrightarrow{AB}$.



Propriétés :

Soit A , B , C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires
- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.



Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas colinéaires.