DROITES ET SYSTÈMES

1) ÉQUATIONS DE DROITES

Dans ce paragraphe, un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est fixé.

A) VECTEURS DIRECTEURS

Définition :

Soit d une droite du plan.

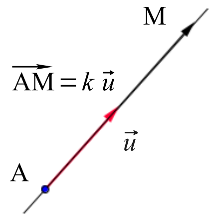
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarques :
- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



Remarque : Une droite est parfaitement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

B) ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle équation de d toute relation vérifiée par les coordonnées $(x ; y)$ des points de d.

Exemple :
Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Cela signifie que les coordonnées x et y de n'importe quel point de d vérifient la relation $y = 2x - 1$.
Pour qu'un point appartienne à d, il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation de d.

Par exemple le point $A(2 ; 3)$ appartient à d car on a bien $3 = 2 \times 2 - 1$

En revanche le point $B(1 ; 4)$ n'appartient à d car $4 \neq 2 \times 1 - 1$

Remarque :

Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $y = 2x - 1$ est <u>une</u> équation de la droite d, $2y = 4x - 2$ en est une autre, ainsi que $2x - y - 1 = 0$

Cas particuliers :

- $x = 4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (une droite dont tous les points ont même abscisse)
- $y = 3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (une droite dont tous les points ont même ordonnée)

Quelle est la forme générale des équations de droite ?

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Soit $M(x ; y)$ un point du plan.
On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$
$M \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})=0 \Leftrightarrow (x-1)\times 1-(-1)\times(y-2)=0 \Leftrightarrow x-1+y-2=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$

Propriété :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. (On note $(a\,;b)\neq(0\,;0)$)

  Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Preuve :

• Toute droite d étant définie de manière unique par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur non nul, on note :

$\mathrm{A}\,(x_0\,;\,y_0)$ un point de d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs (α et β ne sont pas simultanément nuls)

Soit $\mathrm{M}\,(x\,;\,y)$ un point du plan.

M appartiendra à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ ,\ \vec{u})=0 \ \Leftrightarrow\ (x-x_0)\beta-(y-y_0)\alpha=0 \ \Leftrightarrow\ \beta\,x-\alpha\,y+\alpha\,y_0-\beta\,x_0=0$$

En posant $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=\alpha\,y_0-\beta\,x_0$, on constate que l'équation de la droite d est de la forme $ax+by+c=0$ où a et b ne sont pas simultanément nuls (car α et β ne le sont pas).

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d.

• Réciproquement, si l'équation d'un ensemble de points $\mathrm{M}\,(x\,;\,y)$ est de la forme $ax+by+c=0$, alors soit $\mathrm{A}\,(x_0\,;\,y_0)$ un point de cet ensemble, vérifiant $ax_0+by_0+c=0$.

Par soustraction membre à membre des deux égalités, il vient $a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)=0 \ \Leftrightarrow\ a\,(x-x_0)-(-b)\,(y-y_0)=0$,

ce qui est la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

C) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Propriété et définition :

- Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=mx+p$ où m et p sont deux réels.

  Cette équation est appelée **équation réduite** de d.

  Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est **le coefficient directeur** de d.

- Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$ où k est un réel.

Preuve :

• Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, $\vec{u}$ n'est pas colinéaires à $\vec{j}$ et donc $b\neq0$.

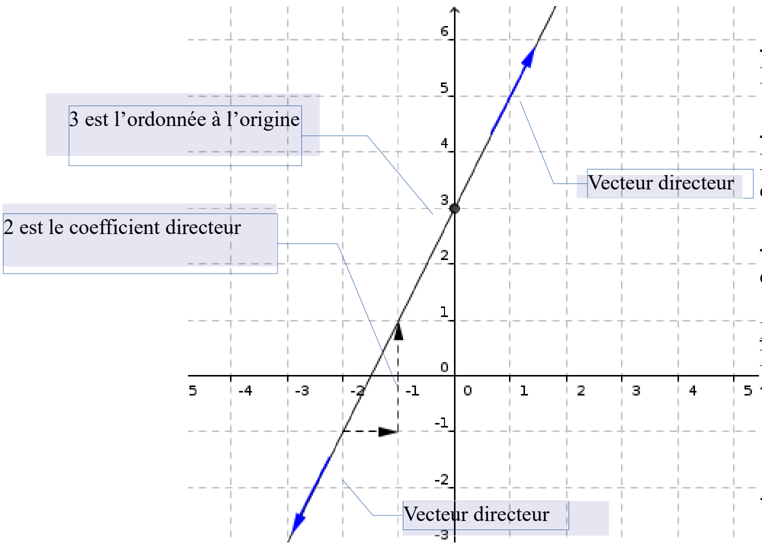
L'équation $ax+by+c=0$ se réécrit donc sous la forme $y=mx+p$ avec $m=-\dfrac{a}{b}$ et $p=-\dfrac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de cette droite étant $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, un autre est $\vec{v}=\dfrac{-1}{b}\vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

• Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ avec $a\neq0$.

Puisque $b=0$ et $a\neq0$, une équation de d est donc $ax+c=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ qui est de la forme $x=k$ ($k\in\mathbb{R}$).

Exemple :



- Le coefficient directeur est 2.
Il indique l'accroissement de y pour un accroissement de x égal à 1.

- L'ordonnée à l'origine est 3.
Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

- Un vecteur directeur est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite . Il indique la direction de la droite.

Remarque :
Le coefficient directeur de la droite d , d'équation $y=mx+p$, indique :
- la direction de d :
  - si $m=0$, d est parallèle à l'axe des abscisses
  - si $m>0$, d « monte » de la gauche vers la droite
  - si $m<0$, d « descend » de la gauche vers la droite
- l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses

D) DROITES PARALLÈLES

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites $d: y=mx+p$ et $d': y=m'x+p'$.

Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$d \,//\, d' \Leftrightarrow m=m'$

Preuve :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et de d' .

Dire que d et d' sont parallèles, signifie qu'elles ont la même direction, c'est à dire que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire que :

$$\det(\vec{u},\vec{u'})=0 \Leftrightarrow 1\times m - 1\times m'=0 \Leftrightarrow m=m'$$

2) SYSTÈMES LINÉAIRES

A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

Définition :

Toute équation de la forme $ax+by=c$, où a , b et c sont des réels donnés, est **une équation linéaire à deux inconnues** x et y .

Tout couple $(x_0;y_0)$ vérifiant $ax_0+by_0=c$ est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax+by=c$ où $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite . Les solutions de l'équation sont les couples $(x;y)$ coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Définition :

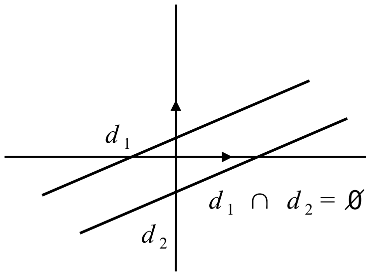
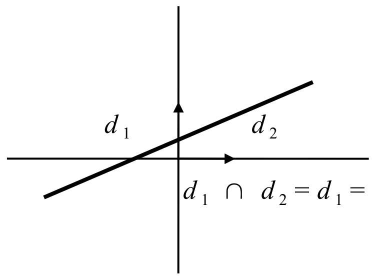
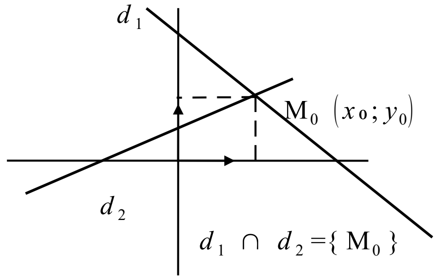
On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme :

(S) $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2)\end{cases}$ où a , b , c , a' , b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) $(x;y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

C) RÉSOLUTION

Interprétation géométrique : Soit le système (S) dans lequel nous supposons $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$.
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les équations (L_1) et (L_2) sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.
Un couple $(x;y)$ de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point $M(x;y)$ appartient à d_1 et à d_2.
Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d_1 et d_2.

d_1 et d_2 sont strictement parallèles	d_1 et d_2 sont confondues	d_1 et d_2 sont sécantes
		
$ab'-a'b=0$		$ab'-a'b\neq 0$
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions : tous les couples coordonnées des points de d_1 (ou de d_2)	(S) a une unique solution : $(x_0;y_0)$ coordonnées de M_0

- Si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a'}{b'}\end{pmatrix}$.

On peut aussi choisir $\vec{v_1}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$. Le résultat est alors immédiat en exprimant det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$)= $ab'-a'b$ ….

- Si d_1 et/ou d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

Propriété :

Le système (S) $\begin{cases}ax+by=c\ (L_1)\\a'x+b'y=c'\ (L_2)\end{cases}$ tel que $ab'-a'b\neq 0$ admet une **unique** solution.

Méthodes numériques de résolution : Résoudre le système (S) : $\begin{cases}3x-2y=5\ (L_1)\\x+3y=9\ (L_2)\end{cases}$

$3\times 3-(-2)\times 1=9+2=11$. Le système (S) admet donc une unique solution.

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation	• (L_2) permet d'écrire : $x=9-3y$	Il ne faut pas partir tête baissée … Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.
• Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y.	• En remplaçant x par $9-3y$ dans (L_1), on obtient : $3(9-3y)-2y=5$ $\Leftrightarrow 27-9y-2y=5$ $\Leftrightarrow 22=11y$ $\Leftrightarrow y=2$	On obtient une équation à une inconnue (y ici) On a trouvé y
• Calculer x en utilisant la valeur de y	• En remplaçant y par 2 dans $x=9-3y$, on obtient : $x=9-3\times 2=9-6=3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système	• On vérifie que le couple $(3;2)$ est solution du système (S) : $3\times 3-2\times 2=9-4=5$ ($(3;2)$ vérifie (L_1)) $3+3\times 2=3+6=9$ ($(3;2)$ vérifie (L_2))	Attention à l'ordre !
• Conclure	• Le couple $(3;2)$ est donc l'unique solution du système (S)	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases}3x-2y=5\\x+3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(9-3y)-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27-9y-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}22=11y\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple)	• On multiplie les deux membres de l'équation (L_2) par 3 . On obtient : $\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\3(x+3y)=3\times 9(L_2\leftarrow 3L_2)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\3x+9y=27(L_2)\end{cases}$	Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L_2) par 3 et que l'on a remplacé l'équation (L_2) par $(3L_2)$
• Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y)	• On soustrait membre à membre (L_2) à (L_1) ; On obtient : $3x-2y-(3x+9y)=5-27$ $\Leftrightarrow -11y=-22$ $\Leftrightarrow y=2$	On a trouvé y
• Remplacer y par sa valeur dans une des équations.	• On remplace y par 2 dans (L_1) . On obtient : $3x-2\times 2=5$ $\Leftrightarrow 3x=9$ $\Leftrightarrow x=3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système • Conclure	• … déjà vu ! • … ça aussi !	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\x+3y=9(L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\3(x+3y)=27(L_2\leftarrow 3L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\3x+9y=27(L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5(L_1)\\-11y=-22(L_2\leftarrow L_1-L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\times 2+5(L_1)\\y=2(L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$