Chapitre 12 - PROBABILITÉS

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE , ÉVENTUALITÉ , UNIVERS

Un exemple bien connu : (On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1 , 2 , … , 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .

Exemple :

B) ÉVÉNEMENT

Définition :

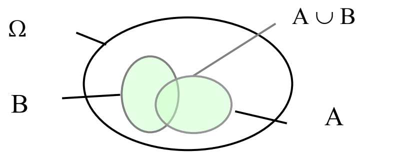
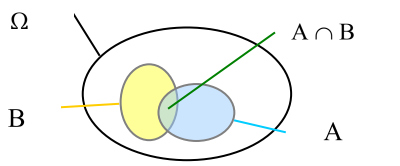
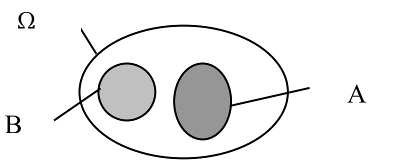
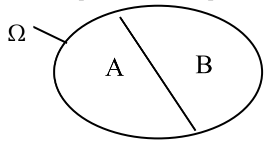
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) .
Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$) .

Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement A : " obtenir un nombre pair " . On a

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : " obtenir un nombre pair " est composé de 3 éventualités . card (A) = 3
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : " obtenir le nombre 3 " ; $B=\{3\}$
Événement impossible : $A = \varnothing$	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : " obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 "
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	L'événement D : " obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 "
C est **la réunion** de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : " obtenir un nombre au moins égal à 4 " ; $E=\{4;5;6\}$ Soit l'événement F : " obtenir un nombre impair " ; $F=\{1;3;5\}$ L'événement $E \cup F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair "
C est **l'intersection** de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement $E \cap F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair " c'est à dire " obtenir un nombre impair au moins égal à 4 "
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \varnothing$ 	Les événements E et B sont incompatibles .
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires.

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a :

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

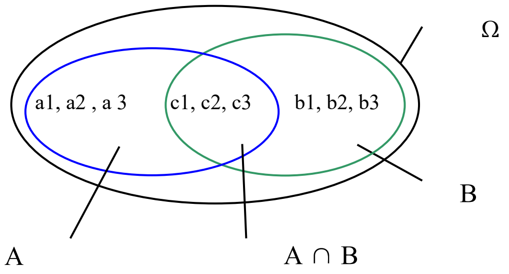
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Idée de preuve :

- L'exemple suivant illustre : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On voit bien que l'intersection intervient deux fois



- On a :

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω , on a :

$p_i = P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$P(A) = \dfrac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$

Remarque :

Les expressions suivantes " dé parfait ou équilibré " , " boules indiscernables " … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :

Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité						

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : " obtenir un nombre pair " est : P (A) =