# PROBABILITÉS

## 1 ) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

### A ) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE , ÉVENTUALITÉ , UNIVERS

**Un exemple bien connu :** ( On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre )

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1 , 2 , … , 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note $\Omega$ .

**Exemple :** Les éventualités sont 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6 et $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

### B ) ÉVÉNEMENT

**Définition :**

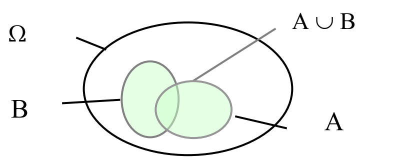
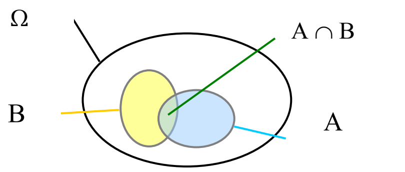
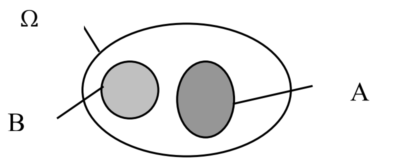
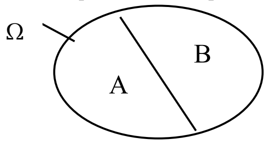
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité $\omega$ **appartient** à l'univers $\Omega$ ( on note $\omega \in \Omega$ ).
Un événement A est **inclus** dans l'univers $\Omega$ ( on note $A \subset \Omega$ ).

**Exemple :** Par exemple, on peut considérer l'événement A : " obtenir un nombre pair " . On a $A = \{2;4;6\}$

**Remarque :** Lorsqu'une éventualité $\omega$ appartient à un événement A, on dit que $\omega$ réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers $\Omega$ lié à une expérience aléatoire.

| VOCABULAIRE ET NOTATION | SIGNIFICATION | EXEMPLE |
|---|---|---|
| **Cardinal de A** : card (A ) | nombre d'éventualités qui composent A | L'événement A : " obtenir un nombre pair " est composé de 3 éventualités . card (A ) = 3 |
| **Événement élémentaire** | événement réduit à une seule éventualité | L'événement B : " obtenir le nombre 3 " ; $B=\{3\}$ |
| **Événement impossible** : $A = \varnothing$ | événement qui ne se réalise jamais | L'événement C : " obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 " |
| **Événement certain** : $A = \Omega$ | événement qui se réalise toujours | L'événement D : " obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 " |
| C est **la réunion** de A et de B :<br>$C = A \cup B$<br>( on dit A ou B ) | C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B<br> | Soit l'événement E : " obtenir un nombre au moins égal à 4 " ; $E=\{4;5;6\}$<br>Soit l'événement F : " obtenir un nombre impair " ; $F=\{1;3;5\}$<br>L'événement $E \cup F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair "<br>$E \cup F = \{1;3;4;5;6\}$ |
| C est **l'intersection** de A et de B :<br>$C = A \cap B$<br>( on dit A et B ) | C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps.<br> | L'événement $E \cap F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair " c'est à dire " obtenir un nombre impair au moins égal à 4 "<br>$E \cap F = \{5\}$ |
| A et B sont **disjoints** ou **incompatibles** | A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ;<br>$A \cap B = \varnothing$<br> | Les événements E et B sont incompatibles .<br>$E \cap B = \varnothing$ |
| A et B sont **contraires** ou **complémentaires**.<br>$B = \overline{A}$ | $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$<br>$\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A .<br> | Les événements A et F sont contraires.<br>$F = \overline{A}$ |

## 2 ) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

**Définition :**

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur $\Omega$ , c'est associer à chaque résultat $\omega_i$ un nombre $p_i$ ( appelé probabilité de l'issue $\omega_i$ ) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P ( A ) , est la somme des probabilités $p_i$ des éventualités qui constituent A.

**Modéliser** une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

**Remarque :** Pour toute éventualité $\omega_i$ on a : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ .

**Propriétés :**

Soit A et B deux événements de $\Omega$ , alors :

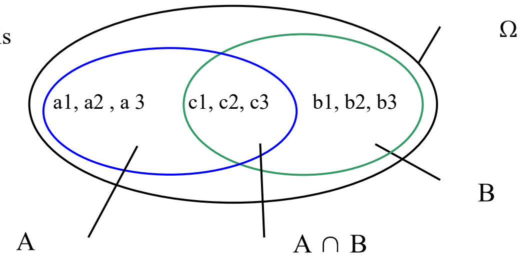
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$ , alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

**Idée de preuve :**

- L'exemple suivant illustre : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On voit bien que l'intersection intervient deux fois




- On a : $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

## 3 ) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

**Définition - Propriété :**

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .

Dans ce cas, si l'univers $\Omega$ est composé de $n$ éventualités $\omega$ , on a :

$p_i = P ( \{ \omega \} ) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors, pour tout événement A : $P ( A ) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$P ( A ) = \dfrac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$

**Remarque :**

Les expressions suivantes " dé parfait ou équilibré " , " boules indiscernables " … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

**Exemple :**

Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

| face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| probabilité | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : " obtenir un nombre pair " est : $P (A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$