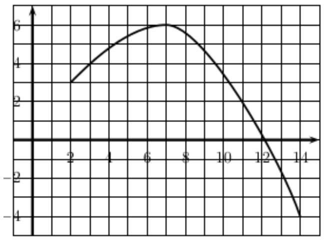
Sens de variation d'une fonction

Ex 13-1 : Décrire les variations

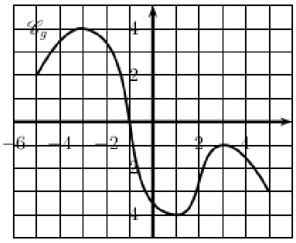
La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction f définie sur l'intervalle $[2;14]$.

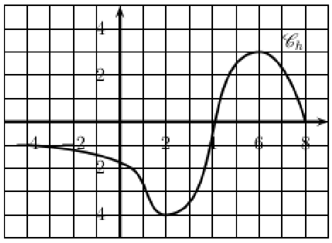


Décrire les variations de cette fonction.

Ex 13-2 : Tableau de variations à partir d'un graphique

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions g et h

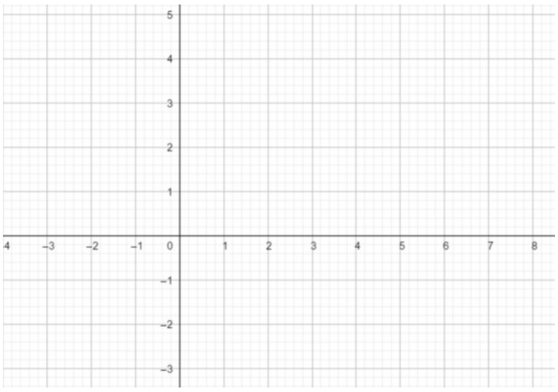


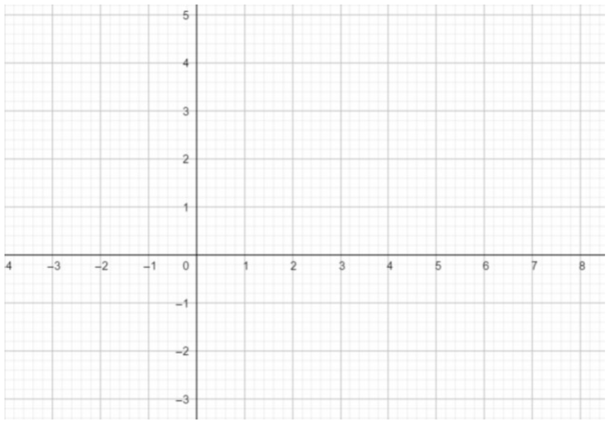


Ex 13-3 : Représentation graphique à partir d'un tableau de variations

x	-3		4		8
f	5	↘	-3	↗	1

Tracer deux repères et dessiner deux représentations graphiques possibles de la fonction f.





Ex 13-4 : Tableau de variations grâce à la calculatrice

Avec la calculatrice, conjecturer les variations des fonctions :
(On acceptera exceptionnellement dans les tableaux de variations des valeurs approchées à 0,1 près)

$f(x)=-x^2+6x-3$ sur l'intervalle $[0;5]$

$g(x)=x^2-2x-5$ sur l'intervalle $[-3;4]$

$h(x)=-x^2-5x$ sur l'intervalle $[-8;2]$

$i(x)=x^3-6x^2+11x-6$ sur l'intervalle $[0,8;3,2]$

$j(x)=x^4-14x^3+71x^2-154x+120$ sur l'intervalle $[1,8;5,1]$

<u>Ex 13-5 :</u> Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur $[-4;4]$ telle que :
- f est strictement croissante sur $[0;2]$
- f est strictement décroissante sur [2;4]
- $f(0)=f(4)=5$ et $f(2)=10$
- f est paire

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

<u>Ex 13-6 :</u> Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur [-1;5] telle que :
- f est strictement croissante sur [-1;0] et [2;5]
- f est strictement décroissante sur [0;2]
- $f(-1)=f(5)=-3$ et $f(0)=1$
- 2 est un antécédent de -5 par f.

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [-1;5].

<u>Minimum et maximum</u>

<u>Ex 13-7 :</u> Attention aux conclusions hâtives ...

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;7]$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

1) Peut-on déterminer le maximum de la fonction f grâce au tableau ci-dessus ?

b) On ajoute pour la suite de l'exercice que la fonction f est strictement décroissante sur [0;3] puis strictement croissante sur [3;7] . Reprendre la question 1)

2) a) Quel est le minimum de la fonction f ?

b) Ce minimum correspond à quelle valeur de x ?

3) a) Quel est le nombre a tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0;7]$, $f(x)\geqslant a$?

b) Quel est le nombre b tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0;7]$, $f(x)\leqslant b$?

<u>Ex 13-8:</u> Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si f est croissante sur [0;2], alors $f(1)\leqslant f(2)$.

2) Si $f(0)<f(2)$, alors f est strictement croissante sur [0;2].

3) Si pour tout réel x, $f(x)\leqslant 7$, alors la fonction f admet le nombre 7 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

4) Si f est croissante sur [0;2], alors $f(0)$ est le minimum de f sur [0;2]

<u>Ex 13-9 :</u> Extremums à partir d'une représentation graphique

1) Dans l'exercice 2 :
a) Quel est le maximum de la fonction g sur l'intervalle [-5;5] ?
Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

b) Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle [-5;5] ?
Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

c) Reprendre ces questions sur l'intervalle [0;5].

2) Déterminer les extremums de la fonction h sur [-4;8].

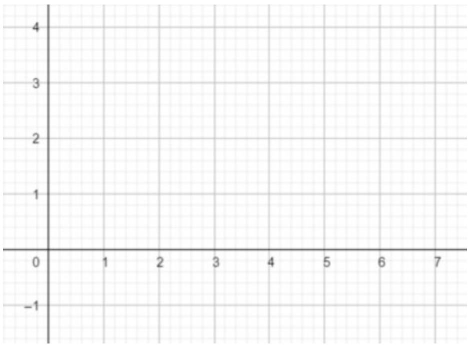
<u>Ex 13-10 :</u> Extremums à partir du tableau de variations

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f.

x	2		3		5		6
f	0	↗	2	↘	-1	↗	3

1) Tracer un repère et dessiner une représentation graphique possible de la fonction f.

2) Donner le maximum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.



3) Donner le minimum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.

<u>Ex 13-11 :</u> Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3;8]$ par $f(x)=3x^2-14x$

1) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant au dixième près.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2) D'après ce tableau, compléter les valeurs ci-dessous afin de tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.

Xmin = ... Xmax = ...

Ymin = ... Ymax = ...

3) a) À l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Arrondir au millième.

b) En quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au millième.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Écrire des valeurs au millième près.

5) Calculer le ou les éventuels antécédents de 0. Donner les valeurs exactes.

6) À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $f(x)=50$. Arrondir au millième.

<u>Ex 13-12 :</u> Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x)=-7x^2+60x$

1) Faire tracer la courbe représentative, bien cadrée, sur l'écran de la calculatrice.

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Arrondir au centième.

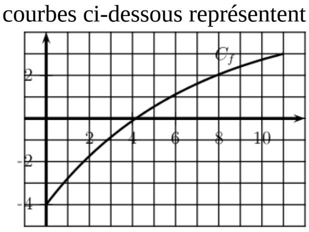
3) Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au centième.

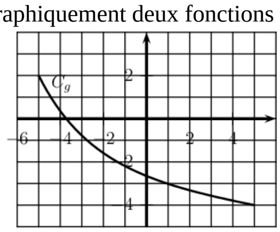
4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Écrire des valeurs au centième près.

<u>Comparer les images de deux nombres</u>

<u>Ex 13-13 :</u> Comparer des images à partir d'une courbe

Les courbes ci-dessous représentent graphiquement deux fonctions f et g .





Compléter ci-dessous avec les mots croissante ou décroissante et avec les signes > ou <, et tracer des traits dans les deux repères ci-dessous.

1) La fonction f est . . . . sur l'intervalle [. . . ; . . .].

1 . . . 3	et	$f(1)$ . . . $f(3)$
7 . . . 5	et	$f(7)$ . . . $f(5)$
9,29 . . . 9,3	et	$f(9{,}29)$ . . . $f(9{,}3)$

2) La fonction g est . . . . sur l'intervalle [. . . ; . . .].

−2 . . . −1	et	$g(-2)$ . . . $g(-1)$
2 . . . 4	et	$g(2)$ . . . $g(4)$
1,03 . . . 1	et	$g(1{,}03)$ . . . $g(1)$

<u>Ex 13-14 :</u> Comparer des images à partir d'un tableau de variations

Compléter :

$f(-7)$ ... $f(-5)$

$f(0)$ ... $f(2)$

$f(8)$ ... $f(6)$

$f(-1{,}3)$ ... $f(-1{,}32)$

x	-9		-2		3		9
f	10	↘	1	↗	4	↘	-8

Ex 13-15 : Comparer des images à partir des variations

On donne les informations ci-dessous sur une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;15]$.

– Sur l'intervalle $[-10;4]$, la fonction f est strictement croissante ;

– sur l'intervalle $[4;15]$, la fonction f est strictement décroissante.

Compléter ci-dessous avec les signes > ou <.

$f(-6)$ … $f(-9)$; $f(1)$ … $f(3)$

$f(9)$ … $f(11)$; $f(14)$ … $f(13)$

Ex 13-16 : Utilisation de la calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-7;3]$ par $f(x)=x^3+20x^2+50x-300$

1) À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-7;3]$. Arrondir au dixième près.

2) Sans aucun calcul, compléter ci-dessous avec les signes > ou <.

$f(-5,5)$ … $f(-6)$; $f(1)$ … $f(1,05)$

$f(-2,99)$ … $f(-2,9)$; $f(2,31)$ … $f(2,3)$

Ex 13-17 :

Soit une fonction f croissante sur l'intervalle $[-3;7]$.
Quel est l'ensemble des nombres dont les images par f sont supérieures au sens strict à $f(2)$?

Ex 13-18 :

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g

x	-4		6
g	2	$\searrow$	-5

Quel est l'ensemble des nombres dont les images par g sont inférieures au sens large à $g(1)$?

Fonctions affines

Ex 13-19 : Vrai ou faux

Soit f une fonction affine.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si $f(-2)<f(2)$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Si $f(-2)=f(2)$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Si f est une fonction linéaire et que $f(-2)<0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 13-20 : Tableau de variations et tableau de signes

Déterminer le tableau de variations et le tableau de signes des fonctions affines ci-dessous :

1) $f:x \longmapsto 3x-7$

2) $g:x \longmapsto 3(2-5x)$

3) $h:x \longmapsto 2x-2(1-4x)$

4) $i:x \longmapsto \dfrac{x-3}{5}$

5) $j : x \longmapsto (3-\pi)x+\sqrt{2}$

<u>Ex 13-21 :</u> Utiliser le taux de variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variations de la fonction affine vérifiant :

1) $f(2)=7$ et $f(5)=10$

2) $f(8)=2$ et $f(1)=7$

<u>Ex 13-22 :</u> Utiliser le taux de variations

$f : x \longmapsto 2x+b$ (b $\in$ f) est une fonction affine .
Sans calculer b , déterminer :

1) $f(15)-f(5)$

2) $f(-3)-f(0)$

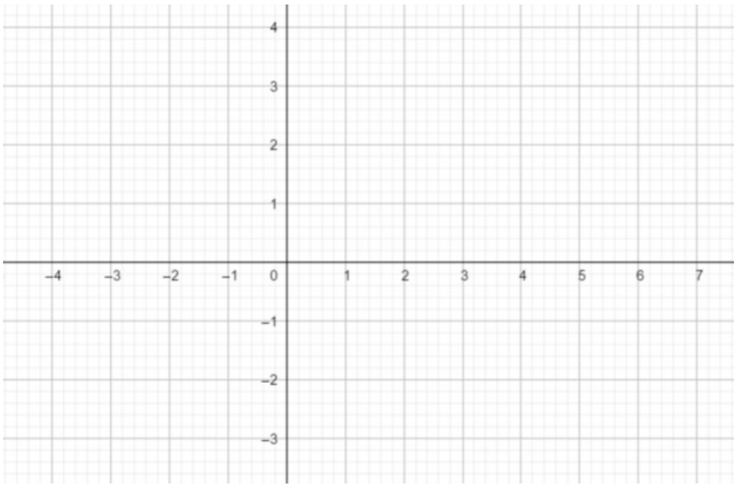
<u>Ex 13-23 :</u> Fonction affine par morceaux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq\text{-1} \\ 2x+2 & \text{si } x\in[\text{-1};1[\\ -x+5 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) Donner la représentation graphique de la fonction f .



3) Déterminer les extremums de f sur :
a) [-1;1]

b) [-1;6]

c) [-4;7]

<u>Fonctions de références</u>

<u>Ex 13-24 :</u> Comparer des nombres en utilisant les variations

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, comparer les nombres :

1) $2,4^2$ et $2,3^2$

2) $(-1,9)^2$ et $(-1,8)^2$

3) $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{11}$

4) $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-3}$

5) $(-4)^3$ et $(-4,1)^3$

6) $\sqrt{7}$ et $\sqrt{8}$

Ex 13-25 : Comparer sans calculatrice

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

1) $(\pi-5)^2$ et $(\pi-7)^2$

2) $\frac{1}{-3}$ et $-\frac{1}{4}$

3) 7 et $\sqrt{48}$

4) $(-3)^3$ et $0,11^3$

5) $\frac{1}{\sqrt{2}-5}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}-7}$

6) $(\sqrt{11}-1)^2$ et $(\sqrt{11}-2)^2$

Ex 13-26 : Encadrer $f(x)$

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+7}$.

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1;2], on a $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.

Ex 13-27 : Déterminer le sens de variations d'une fonction

En utilisant le sens de variations des fonctions de référence, déterminer les variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

2) $g(x)=\sqrt{x^2+3}$ sur $[0;1]$

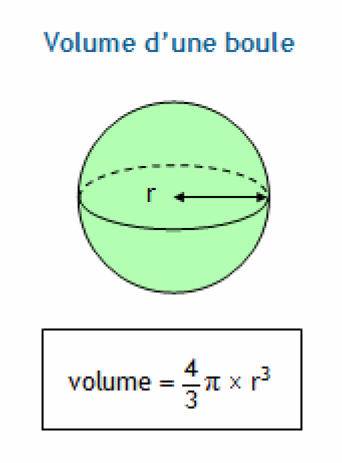
3) $h(x)=(x-3)^2+10$ sur $[-1;3]$

4) $i(x)=\frac{1}{4-x}$ sur $]4;+\infty[$

<u>Ex 13-28 :</u> Fonction cube et volume d'une boule

1) Quel est le sens de variation de la fonction cube sur $[0;+\infty[$?

2) En déduire le sens de variation de la fonction qui au rayon d'une boule associe son volume.



3) Une boule a un rayon compris entre 10 et 15 cm.
Encadrer (en arrondissant à l'unité) le plus précisément possible son volume.

<u>Ex 13-29 :</u> Géométrie et fonctions de référence

On considère un segment $[AB]$ de longueur 14 cm. Sur ce segment, on place un point M puis on trace un triangle équilatéral AMN et un carré MBCP.
On pose x=AM . Ainsi $0 \leqslant x \leqslant 14$.

1) On consière la fonction f qui, à un réel x de [0;14], associe le périmètre de AMN et la fonction g qui à un réel x de [0;14], associe le périmètre de MBCP.

a) Déterminer les sens de variations de f et g sans utiliser leurs expressions algébriques.

b) Exprimer $f(x)$ et $g(x)$, puis retrouver les résultats de la question précédente.

2) Reprendre les questions en considérant cette fois la fonction f qui, à un réel x de [0;14], associe l'aire de AMN et la fonction g qui à un réel x de [0;14], associe l'aire de MBCP.

Modéliser des situations de la vie courante

Ex 13-30 : Comète

Une comète à trajectoire parabolique s'approche de la terre . On suppose que la distance (en millions de km) entre la comète et la terre est une fonction d du temps t donnée par :

$$d(t)=(t-2)^2+10$$

où t est le temps (en années) écoulé depuis l'instant 0.

1) Démontrer que la fonction d est strictement décroissante sur [0;2], puis strictement croissante sur [2;10].

2) Dresser le tableau de variations de d sur l'intervalle [0;10].

3) Quelle est la distance minimale entre cette comète et la terre ?

Ex 13-31 : Apiculteur

Un apiculteur produit du miel qu'il vend au marché.
L'expérience lui a montré que si x (où $x\in[1;40]$) est le prix de vente, du kg de miel, le nombre d'acheteurs vaut $n(x)=200-5x$.
On suppose que chaque acheteur achète exactement un kg de miel et que le coût de production d'un kg de miel est de 8 euros.

1) Montrer que le bénéfice s'écrit $b(x)=-5(x-24)^2+1280$

2) a) Démontrer que la fonction b est strictement croissante sur [1;24] et strictement décroissante sur [24;40].

b) Dresser le tableau de variations de b sur l'intervalle [1;40]

c) En déduire, pour quel prix au kg le bénéfice obtenu est maximum et combien vaut ce bénéfice maximal ?

Ex 13-32 : Bénéfice maximum

Une entreprise produit et commercialise des briques en terre cuite et des tuiles. Chaque semaine, elle limite sa production à 13 tonnes.

Elle vend son produit 40000 euros la tonne et sont coût total de production, en milliers d'euros, est modélisé par c définie sur [0;13] par $c(x)=x^2+25x+36$.

1) On note $b(x)$ le bénéfice .
Donner une expression de $b(x)$ en fonction de x.

2) Conjecturer avec la calculatrice la production qui engendre un coût pour l'entreprise et la production qui rapporte un bénéfice maximum.

Algorithme - Python

Ex 13-33 :

Un maire s'intéresse à l'évolution de la population de sa ville.
Une étude a permis d'établir que la population de l'année $2017+n$ peut être estimée par la formule :
$p(n)$ où p est la fonction définie sur [0;23] par
$p(x)=2x^3-132x^2+2898x+9412$

1) Déterminer la population en 2023

2) On admet que la fonction p admet un maximum M sur [0;23] pour une valeur entière N et que la fonction est croissante jusqu'à cette valeur N.

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin qu'il affiche M et l'année où la population sera maximum :

```
def p(k):
   return(2*k**3-132*k**2+2898*k+9412)
M=………
N=………
for i in range( ……, ……. ):
   if (p(i)>M):
      M=………
      N=………
print("le maximum est",M,"atteint en",  ……… )
```

3) Qu'affiche le programme ?