

Chapitre 4 - FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1) VOCABULAIRE DES FONCTIONS

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.

On note $f : x \mapsto f(x)$ (lire : « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »)

Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x (lire : " f de x ").
- x est un **antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :

- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable. (On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple : Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x - 1$

Remarques :

- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
- Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) FONCTIONS AFFINES

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 5x - 2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si on dit que la fonction est **linéaire**.
- Si la fonction est du type $f : x \mapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

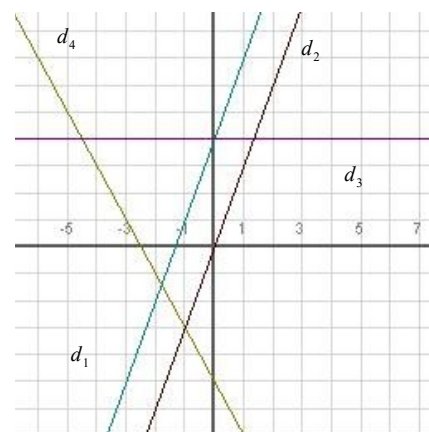
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto 3x + 4$ est représentée par la droite
- La fonction $x \mapsto 3x$ est représentée par la droite
- La fonction $x \mapsto -2x - 5$ est représentée par la droite
- La fonction $x \mapsto 4$ est représentée par la droite



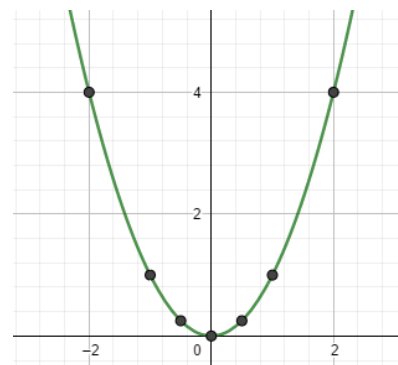
3) LA FONCTION CARRÉ

Définition :

La fonction définie sur \mathbb{R} , qui à tout nombre réel x associe son carré x^2 , est appelée **fonction carré**.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction de référence, on établit un tableau de valeurs, puis on place les points correspondant s dans un repère orthogonal (orthonormé de préférence)

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16



Définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y = x^2$.

Le point $O(0; 0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Remarque :

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. La parabole est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

4) LA FONCTION INVERSE

Définition :

La fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

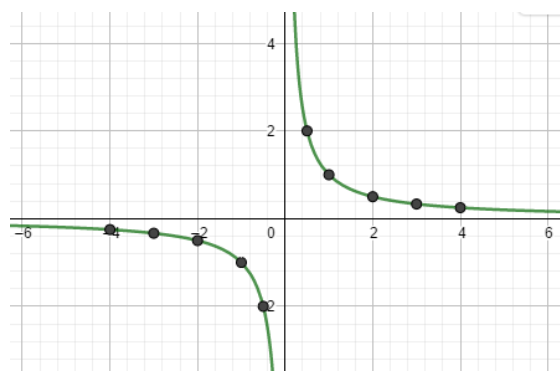
Définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :



Remarques :

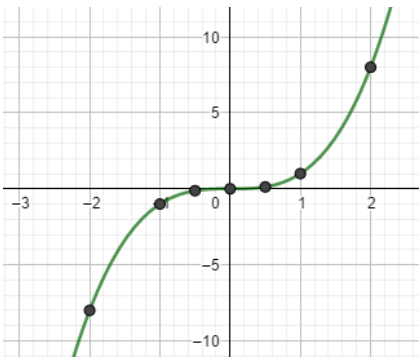
- La fonction inverse n'est pas définie en 0 . Ce qui explique que l'hyperbole est composée de deux branches distinctes.
- Les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe . Ce qui explique que l'hyperbole est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus sur $]0; +\infty[$

5) LA FONCTION CUBE

Définition :

La fonction définie sur \mathbb{R} , qui à tout nombre réel x associe son cube x^3 , est appelée **fonction cube**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^3$	-64	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27	64



Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentant la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Remarque : Les nombres x et x^3 sont de même signe . Ce qui explique que la courbe représentant la fonction cube au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus sur $]0; +\infty[$

6) LA FONCTION RACINE CARRÉE

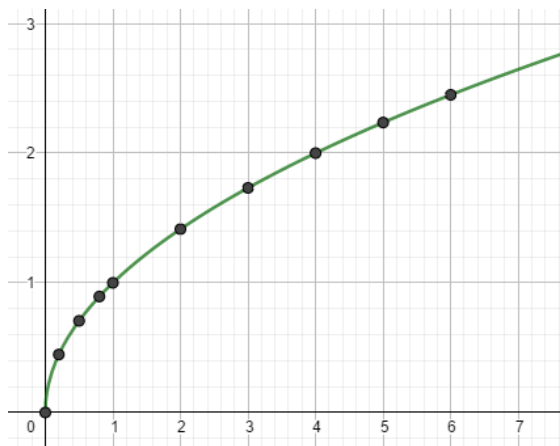
Définition :

La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée**.

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

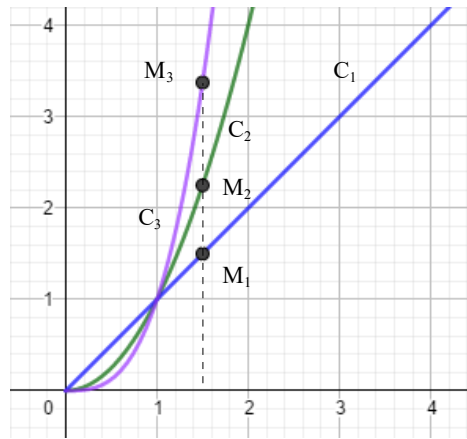
Remarque : Pour tout réel $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$.

Ce qui explique que la courbe représentant la fonction racine carrée est dans la partie du repère où abscisses et ordonnées sont positives.



7) POSITIONS RELATIVES

On note respectivement C_1 , C_2 et C_3 les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$.



Les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ sont communs aux trois courbes

Propriété :

- Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $x \geq x^2 \geq x^3$.

Conséquence graphique sur $[0; 1]$: C_1 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_3

- Pour tout $x \geq 1$, on a $x \leq x^2 \leq x^3$

Conséquence graphique sur $[1; +\infty[$: C_3 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_1

Preuve :

Soit un réel $x \geq 0$.

On considère les points $M_1(x; x)$, $M_2(x; x^2)$ et $M_3(x; x^3)$

- Sur $[0; 1]$, on a :

- Sur $[1; +\infty[$, on a :