# Chapitre 5 - ARITHMÉTIQUE

## 1 ) LES ENTIERS NATURELS ET LES ENTIERS

**Définitions :**

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}=\{0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers** **(ou nombres entiers relatifs)** $\mathbb{Z}=\{...\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$

**Remarque :** La somme, la différence et le produit de deux entiers sont des entiers.

Pour la division dans $\mathbb{Z}$ , on utilise la division euclidienne (avec reste).

**Définition : division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**

Soit deux entiers $a$ et $b$ ( avec $b\neq 0$ ).
On peut écrire $a$ de façon unique sous la forme :
$a=b\times q+r$ (où $q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}$ , tel que $0\leqslant r<|b|$ )

$q$ est appelé **quotient** .

$r$ est appelé **reste** .

**Exemples :**

- $29=7\times 3+8$ n'est pas la division euclidienne de 29 par 3 car
- La division euclidienne de 29 par 3 est

## 2 ) MULTIPLES ET DIVISEURS

**Définitions :**

Soit deux entiers $n$ et $p$ .
Si le reste de la divison euclidienne de $n$ par $p$ est égal à 0, on dit que :

- $p$ est un **diviseur** de $n$ ou que $n$ est **divisible** par $p$ .
- $n$ est un **multiple** de $p$ .

Il existe un entier $q$ tel que $n=p\times q$

**Exemple :** $45=9\times 5$ .

**Remarques :**

- Tout nombre entier est un multiple de 1 et de lui-même (par exemple : 3 = 1 × 3 ou 5 = 5 × 1).
- L'entier 0 est un multiple de tout nombre entier $n$, car $0 = 0 \times n$ .
- 0 n'admet qu'un seul multiple :
- Tout nombre entier $n$ non nul admet une infinité de multiples: 0, $n$ , $2n$ , $3n$ …

**Propriété :**

Soit $a$ , $n$ et $m$ trois entiers, tels que $n$ et $m$ sont des multiples de $a$ .

La somme $n+m$ , la différence $m-n$ et le produit $n\times m$ sont aussi des multiples de $a$ .

**Preuve (pour la somme) :**

$n$ et $m$ sont des multiples de $a$ . Il existe donc deux entiers $k$ et $k'$ tels que $n=k\times a$ et $m=k'\times a$
On a alors :

**Exemple :**

324 et 111 sont des multiples de 3 .
324+111, 324-111 et 324 × 111 sont donc aussi des multiples de 3.

## 3 ) NOMBRES PAIRS ET NOMBRES IMPAIRS

**Propriété et définition :**

Soit un entier $n$ .

- Si $n$ est divisible par 2 ( c'est à dire un multiple de 2 ), on dit que $n$ est **pair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ , tel que $n = 2k$

- Si $n$ n'est pas pair, il est **impair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ , tel que $n = 2k+1$

**Critère de parité :**

Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.

**Propriété :**

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

**Preuve (pour la somme de deux nombres impairs) :**

Soit $n$ et $n'$ deux nombres impairs.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ , tels que $n = 2k+1$ et $n' = 2k'+1$ .
On a alors :

**Propriété :**

Soit un entier $n$ .
- Si $n$ est pair, alors $n^2$ est pair.
- Si $n$ est impair alors $n^2$ est impair.

**Preuve :**

Si $n$ est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ , tel que $n = 2k$ .
On a alors :

$$n^2 = (2k)^2 = 2k \times 2k = 2 \times (2k^2) = 2\mathrm{K} \quad \text{où} \quad \mathrm{K} = 2k^2$$

Comme $\mathrm{K} \in \mathbb{Z}$ , $n^2$ est pair.

Si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ , tel que $n = 2k+1$ .
On a alors :

**Exemples :**
- 24 est pair donc $24^2$ =576 est pair .
- $781^8$ est un nombre impair.

En effet, 781 est impair, donc 781² est impair, donc $(781^2)^2$ est impair et enfin $(((781^2))^2)^2 = 781^8$ est impair.

**Remarque :**

Les réciproques sont aussi vraies :
- si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair.
- si $n^2$ est impair, alors $n$ est impair.

## 4 ) NOMBRES PREMIERS

**Définition :**

Un entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Un nombre qui n'est pas premier est **composé**.

**Remarques :**

- 1 n'est pas un nombre premier.
- 0 n’est pas un nombre premier car il est divisible par tout entier non nul.

**Exemple :**

- 2,3,5,7,11,13,17 sont des nombres premiers.
- 45 n'est pas un nombre premier car $45 = 9 \times 5$ .

**Propriété : (admise)**

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

**Exemple :**

| | |
|---|---|
| 450<br>225 | 2<br>3 |

On obtient :

450=

| | |
|---|---|
| 17787 | |

On obtient :

17787=

On cherche les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

## 5 ) FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

**Définition :**

On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

**Exemple :** En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

$\frac{450}{17787} =$