Les entiers naturels et les entiers

Ex 5-1 : Vrai ou faux (justifier ou donner un contre-exemple)

1) $-4a$ où $a\in\mathbb{R}$ est un entier.

2) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}$

3) Si $a=5b$ (où $b\in\mathbb{Z}$), alors a est un entier naturel.

4) La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.

5) Le quotient de deux entiers est un entier.

6) Tout entier naturel est un entier.

7) Tout entier relatif est un entier.

Ex 5-2 :

Parmi les nombres ci-dessous indiquer ceux qui sont des entiers naturels :

a) 4 b) $\frac{48}{4}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{11}$ e) $-\frac{12}{5}$ f) -10^7 g) 10^5

Division euclidienne

Ex 5-3 :

Dans chacun des cas ci-dessous, effectuer la division euclidienne de a par b :

1) $a=1257$ et $b=13$

2) $a=489$ et $b=48$

3) $a=45$ et $b=456$

4) $a=4522$ et $b=2$

Ex 5-4 : QCM

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).
Le reste de la division d'un entier par 4 peut être :

a) 5 b) 1 c) -2 d) 2,5 e) 4

Ex 5-5 :

1) Soit $a=4k+5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).
Quel est le reste de la division euclidienne de a par 4 ?

2) On sait que le reste de la division euclidienne d'un entier naturel b par 5 est 3 . Comment peut-on écrire b ?

Ex 5-6 : Partitionnement des entiers naturels

1) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 3 ?

2) Justifier que tout entier a peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ (où $k\in\mathbb{N}$)

3) Montrer que tout entier peut s'écrire sous l'un des formes suivantes : $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$ (où $k\in\mathbb{N}$)

4) Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs est divisible par 4.

5) Que peut-on dire du produit de n ($n\in\mathbb{N}^*$)entiers consécutifs ?

Multiples et diviseurs

Rappel : Quelques critères de divisibilité

2 : un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8 (Ex : 13144 ; 24586)

5 : un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est : 0 ou 5 (Ex : 3250 ; 2335)

10 : un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est : 0 (Ex : 450 ; 5480)

4 : un nombre est divisible par 4 lorsque les deux chiffres de droite forment un nombre multiple de 4:
00, 04, 08, 12,............80, 84, 88, 92, 96 (Ex : 2548 ; 43576)

3 : un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3 (Ex : 831 ; 8433)

9 : un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9 (Ex : 21345678)

11 : un nombre est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est un multiple de 11 (Ex : 919380)

Ex 5-7 :

1) Justifier que 240 est un multiple de 15.

2) En utilisant 240 et 15, compléter :

a) ….. est un diviseur de ….. b) ….. a pour diviseur …..

c) ….. est divisible par ….. d) ….. est un multiple de …..

Ex 5-8 :

1) Donner tous les diviseurs de 24.

2) Donner tous les diviseurs positifs de 13.

3) Donner tous les diviseurs de 1.

4) Donner tous les diviseurs de 0.

5) Donner tous les multiples de 0.

Ex 5-9 :

1) Comment peut-on écrire un multiple de 7 .

2) Donner tous les multiples de 7 compris entre 127 et 189.

Ex 5-10 :

Déterminer un entier inférieur à 1000 pair, divisible par 7 et 13 et multiple de 5.

Ex 5-11 : Somme , réciproque et contraposée

1) Montrer que si a et b sont deux multiples de 13 alors $a+b$ est un multiple de 13.

2) Énoncer cette propriété avec le mot « diviseur ».

3) Énoncer la réciproque de cette propriété . Est-elle vraie ?

4) Énoncer la contraposée de cette propriété ? Est-elle vraie ?

Ex 5-12 : Démonstration du cours

Soit a , n et m trois entiers, tels que n et m sont des multiples de a .
Montrer que la différence $m-n$ et le produit $n\times m$ sont aussi des multiples de a .

Ex 5-13 :

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s)
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{N}=10\mathrm{n}+15$. N est un multiple de :

a) 5 b) 10 c) 15 d) 3 e) 2

Ex 5-14 :

Soit a et b deux entiers tels que a est un multiple de 9 et b est un multiple de 15. Montrer que $a+b$ est un multiple de 3.

Ex 5-15 :

Soit a et b deux entiers.
1) Montrer que si a est un diviseur de $a+b$, alors a est un diviseur de b .

2) Montrer que si a est un diviseur de b , alors a^2 est un diviseur de b^2 .

Ex 5-16 :

Existe-t-il un entier naturel multiple de 14 et diviseur de 100 ?

Ex 5-17 :

Montrer que si 13 est un diviseur de a , alors 13 est un diviseur de a^2 .

Ex 5-18 : Tableur : utilisation de mod

Dans un tableur **MOD(a,b)** renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

On cherche la liste des diviseurs positifs d'un entier inférieur à 1000.

1) Saisir dans la colonne A la liste des entiers compris entre 1 et 1000.

	A	B	C
1	Diviseur de	528	Nombre de diviseurs
2	1	0	20
3	2	0	
4	3	0	
5	4	0	

2) Saisir en B1 l'entier dont on cherche les diviseurs.

3) Saisir en B2, puis recopier vers le bas, la formule permettant d'afficher le reste dans la division euclidienne du nombre donné en B1 par le nombre en A2.

4) Saisir en C2 la formule affichant le nombre de diviseurs de l'entier donné. (On peut utiliser la fonction **NB.SI**)

5) Faire le test avec 804 et 897.

Ex 5-19 : Vrai ou faux

Justifier ou donner un contre-exemple.

1) Si un entier a divise un entier b et un entier c , alors a^2 divise bc .

2) Si le carré d'un entier a divise un entier b , alors a divise $\sqrt{b}$.

3) Si un entier m , divise un entier a , il existe alors un entier n tel que $a=m\times n$. Ainsi, un entier naturel a a toujours un nombre pair de diviseurs positifs.

Ex 5-20 : $\overline{aaaaaa}$

On note $\overline{aaaaaa}$ le nombre formé de 6 chiffres a .

1) Montrer que pour tout chiffre a , $\overline{aaaa}$ est divisible par 101.

2) Montrer que pour tout chiffre a et b , $\overline{aabbb}$ est divisible par 37.

Nombres pairs et nombres impairs

Ex 5-21 : Produit

1) Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.

2) Montrer que le produit de deux nombres pairs est divisible par 4.

Ex 5-22 : Somme

1) Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

2) Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

3) Montrer que la somme de deux impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Ex 5-23 : Multiple de 8

Soit n un nombre pair et $\mathrm{N}=n^2(3n+24)$.
Montrer que N est un multiple de 8.

Ex 5-24 : Cube

1) Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.

2) Montrer que le cube d'un nombre impair est impair.

Ex 5-25 :

Soit les nombres $m=4p$ et $n=5q$ où p et q sont des entiers.
1) Montrer que m est pair.

2) n peut-il être pair ?

3) Montrer que mn est un multiple de 10.

Ex 5-26 : Raisonnement par l'absurde

Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair . Montrer que n est pair.

Ex 5-27 : Raisonnement par l'absurde dans un triangle rectangle

Soit un triangle rectangle tel que ses trois côtés sont des nombres entiers.
Montrer qu'au moins un de ces nombres est pair.

<u>Ex 5-28 :</u> Python

On admet que tout nombre pair se décompose de façon unique comme le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.
Compléter le programme ci-dessous de telle sorte que la fonction pair retourne le nombre impair et l'exposant de 2.

```
def pair(n) :
    exp=0
    while ………... ………... :
        n=n//2    (a//b renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b)
        …………
    return(exp,n)
```

<u>Nombres premiers</u>

<u>Ex 5-29 :</u> Critères de divisibilité

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

425 , 43576 , 97 , 342153 , 909381 , 454452

<u>Ex 5-30 :</u> Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer les nombres ci-dessous en produit de facteurs premiers :

45

37

62

85

41

242

93

500

<u>Ex 5-31 :</u> Vrai ou faux (justifier ou donner un contre-exemple)

1) Tous les nombres premiers sont impairs.

2) Si un nombre p est premier alors $p+2$ n'est pas premier.

3) 1 est un nombre premier.

4) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

5) 111 111 111 111 est premier.

<u>Ex 5-32 :</u> Puissance d'un nombre premier

Soit p un nombre premier .

1) Le nombre p^2 est-il premier ?

2) Quels sont les diviseurs positifs de p^2 ?

3) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^n où $n\in\mathbb{N}$

<u>Fractions irréductibles</u>

<u>Ex 5-33 :</u>

1) Décomposer 35 et 54 en produits de facteurs premiers.

2) Rendre irréductible : $\frac{15}{35}$ et $\frac{18}{54}$

<u>Ex 5-34 :</u> Calculs et PPCM

Calculer et rendre irréductibles les expressions suivantes en utilisant le ppcm des dénominateurs (plus petit commun multiple) :

$A=\frac{3}{16}-\frac{5}{12}$

$B=\frac{8}{25}+\frac{1}{60}$

$C=\frac{14}{21}+\frac{6}{112}$

$D=\frac{3}{8}+\frac{4}{30}-\frac{21}{18}$

Ex 5-35 : Dénominateur, numérateur, somme et différence

1) Déterminer une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 132.

2) Déterminer une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la différence entre le dénominateur et le numérateur est 60.

3) Existe-il une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 29.

Ex 5-36 : Prise d'initiative

Soit a et b deux entiers naturels avec $b\neq 0$.
Déterminer toutes les fractions $\frac{a}{b}$ égales à $\frac{168}{315}$ avec $a<168$ et $b<315$?

Ex 5-37 : Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers

1) a) Décomposer 48400 et 94864 en produit de facteurs premiers.

b) Justifier que ces deux nombres sont divisibles par 44^2 .

2) Déterminer sans calculatrice :

a) La racine carrée de 48400.

b) La racine carrée de 94864

c) La fraction irréductible égale à $\frac{48400}{94864}$

Algorithme

Ex 5-38 : Multiple

Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b .

Ex 5-39 : Multiple

Écrire un algorithme permettant de déterminer pour des entiers a et b donnés, le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b .

Ex 5-40 : Nombre premier ou pas ?

Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel a est premier.