Chapitre 8 - ÉQUATIONS, INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

1) ÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **une équation** à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'équation.

Deux équations **équivalentes** sont deux équations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Propriété :

Soit a , b , et c trois réels.

- Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une égalité (et donc d'une équation) , on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad a-c=b-c \quad \Leftrightarrow \quad a+c=b+c$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une égalité (équation) par un même nombre, on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad ac=bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{c} \quad (\ c\neq 0 \ )$$

Exemple :

On retranche $2x$ à chaque membre

On ajoute 5 à chaque membre

On divise chaque membre par 2

$4x-5=2x+10 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Propriété : Équation produit

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\mathrm{A}(x)\times\mathrm{B}(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}(x)=0 \ \text{ ou } \ \mathrm{B}(x)=0$$

Cette méthode permet de résoudre certaines équations qui ne sont pas du premier degré

Exemple :

$2x^2=5x \quad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Propriété : Équation $x^2=a$

Soit a un réel , l'équation $x^2=a$

- n'admet pas de solution si $a<0$
- admet une unique solution 0 si $a=0$
- admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$

Exemples :

- $x^2=5 \quad \Leftrightarrow$
- $t^2=3-\pi$

2) INÉGALITÉS

Propriété : Addition et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une inégalité (et donc d'une inéquation) , on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a+c \leqslant b+c \quad \Leftrightarrow \quad a-c \leqslant b-c$$

Preuve :

Rappel : « Pour comparer deux nombres, on peut comparer leur différence par rapport à zéro »

Propriété : Multiplication et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité (inéquation) par un même nombre strictement **positif**, on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac \leqslant bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c} \quad (\; c \neq 0 \;)$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement **négatif**, on obtient une inégalité de **sens contraire**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac \geq bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c} \quad (\; c \neq 0 \;)$$

Idée de preuve :

Soit f et g les fonctions linéaires définie par $f(x)=cx$ et $g(x)=\frac{1}{c}x$.

Si $c>0$, f et g sont croissantes et si $c<0$, f et g sont décroissantes.

En appliquant les fonctions f et g à l'inégalité $a \leqslant b$, on en déduit les résultats.

Par exemple, si $c<0$:

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad g(a) \geqslant g(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} \times a \geqslant \frac{1}{c} \times b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$$

Propriété : comparaison à l'aide d'un quotient

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- Pour comparer deux réels strictement positifs, on peut comparer leur quotient à 1.
- Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$, alors $a \leqslant b$
- Si $\frac{a}{b} \geqslant 1$, alors $a \geqslant b$

Propriété : Ajouter des inégalités de même signe

Soit a , b , c et d quatre réels . La propriété ci-dessous présentée avec $\leqslant$ est aussi vraie pour <, $\geqslant$ et >.

Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a+c \leqslant b+d$

Exemple :

$\pi < 3,2$ et $\sqrt{2} < 1,5$, donc

Remarques :

- On peut aussi multiplier membre à membre des inégalités **si elles sont positives**.
- On ne peut pas diviser ou soustraire membre à membre des inégalités.

3) INÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'inégalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'inéquation.

Deux inéquations **équivalentes** sont deux inéquations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Exemple :

On retranche $2x$ à chaque membre

On ajoute 7 à chaque membre

On divise chaque membre par 3

$5x-7 \leqslant 2x+8 \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Méthode : Inéquation produit

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax+b)(cx+d)<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax+b)(cx+d)$.

La méthode est identique pour $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$, $(ax+b)(cx+d) \geqslant 0$ et $(ax+b)(cx+d)>0$

Exemple :

Résolution de $(-3x+1)(2x-5)>0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

Plusieurs méthodes pour étudier le signe de $2x-5$:

- On peut résoudre : $2x-5>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>5 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{5}{2}$

On en déduit immédiatement les solutions de l'inéquations $2x-5<0$ et les solutions de l'équation $2x-5=0$ et donc la valeur charnière $\frac{5}{2}$.

- On peut aussi utiliser les propriétés sur la croissance de la fonction affine f définie par $f(x)=2x-5$

On procède de la même façon pour $-3x+1$: $-3x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x>-1 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{3}$

On en déduit le signe de $(-3x+1)(2x-5)$.

x			
$-3x+1$			
$2x-5$			
$(-3x+1)(2x-5)$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

Méthode : Inéquation quotient

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $\frac{ax+b}{cx+d}<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$.
La méthode est identique pour $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$, $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ et $\frac{ax+b}{cx+d}\geq 0$

Exemple :

Résolution de $\frac{-3x+1}{2x-5}<0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

On en déduit le signe de $\frac{-3x+1}{2x-5}$.

x			
$-3x+1$			
$2x-5$			
$\frac{-3x+1}{2x-5}$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :