POURCENTAGE

1) POURCENTAGE ET PROPORTION

A) CALCULER UN POURCENTAGE

Définition :

Soit t un nombre positif.

Prendre t % d'une quantité c'est multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$

Exemples :

- Prendre 5 % de 1200 : $\frac{5}{100} \times 1200 = 60$

- Prendre 300 % d'une quantité x : $\frac{300}{100} x = 3x$

Remarque : On peut appliquer un pourcentage plus grand que 100%

B) EXPRIMER UNE PROPORTION

Définition :

La **proportion** d'une sous-population dans une population est :

$$p = \frac{\text{nombre d'individus de la sous-population}}{\text{nombre d'individus de la population}}$$

- Une population est un ensemble d'éléments appelés individus.

- Une proportion est toujours comprise entre 0 et 1.

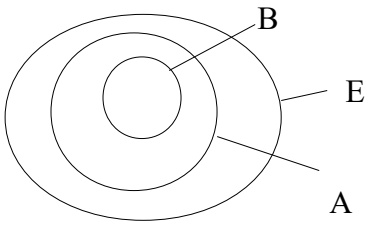
- On peut l'exprimer sous forme de fraction, sous forme décimale ou en pourcentages.

Exemple :

Dans une classe de seconde de 33 élèves, il a 15 filles.

La proportion de filles dans la classe est $\frac{15}{33} \approx 0{,}4545$, ce qui correspond à 45,45 % de l'effectif de la classe.

2) POURCENTAGE DE POURCENTAGE



Propriété :

Soit E une population, A une sous-population de E de proportion p_A et B une sous-population de A de proportion p_B par rapport à A. La proportion de B par rapport à E est :

$$p_A \times p_B$$

Preuve :

Soit n_E , n_A et n_B les effectifs respectifs de E,A et B.

On a : $p_A \times p_B = \frac{n_A}{n_E} \times \frac{n_B}{n_A} = \frac{n_B}{n_E}$

On retrouve bien la proportion de B par rapport à E.

Exemple :

Au dernier DS, 45 % des élèves ont eu la moyenne, dont 60 % de filles.

Le pourcentage de filles ayant eu la moyenne dans la classe est : $\frac{45}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{27}{100}$, c'est à dire 27 %

3) POURCENTAGE D'ÉVOLUTION

Propriété et définition :

- Augmenter une valeur de a %, revient à la multiplier par $1 + \frac{a}{100}$.

- Diminuer une valeur de a %, revient à la multiplier par $1 - \frac{a}{100}$.

- $\text{CM} = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$

On appelle **coefficients multiplicateurs**, noté CM, les nombres $1 + \frac{a}{100}$ et $1 - \frac{a}{100}$.

Exemple :

- Augmenter une valeur de 1 %, revient à la multiplier par $CM=1+\frac{1}{100}=1,01$

- Augmenter une valeur de 100 %, revient à la multiplier par $CM=1+\frac{100}{100}=2$, ce qui revient à la doubler.

- Diminuer une valeur de 17 %, revient à la multiplier par $CM=1-\frac{17}{100}=0,83$

Définition :

- **La variation absolue** d'une valeur est : valeur finale – valeur initiale

- **Le taux d'évolution** (variation relative à la valeur initiale) d'une valeur est :

$$t=\frac{\text{valeur finale-valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$$

- La variation absolue est de la même nature que la valeur étudiée.

- La variation absolue est positive en cas d'augmentation et négative en cas de diminution.

- Le taux d'évolution n'a pas d'unité . On préfère l'écrire sous forme de pourcentage.

Exemple :

La moyenne d'une classe de seconde passe de 13,2 à 12,4 entre le deuxième et le troisième trimestre.

- La variation absolue est : $12,4-13,2=-0,8$

- Le taux d'évolution est : $t=\frac{12,4-13,2}{13,2}\approx$ -0,06, c'est à dire environ -6 %

- Le coefficient multiplicateur est : $CM=\frac{12,4}{13,2}\approx 0,94$. On constate que $CM=1+t$.

Propriété :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution t vérifie :

$$CM=1+t$$

Preuve :

On note respectivement v_i et v_f la valeur initiale et la valeur finale . On a :

$$1+t=1+\frac{v_f-v_i}{v_i}=\frac{v_i}{v_i}+\frac{v_f-v_i}{v_i}=\frac{v_f}{v_i}=CM$$

Récapitulatif :

	Valeur finale	Variation absolue	Taux d'évolution	CM
Augmentation de a %	Supérieure à la valeur initiale	positive	$t>0$	$CM>1$
Diminution de a %	Inférieure à la valeur initiale	négative	$t<0$	$CM<1$

4) ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

Propriété et définition :

- Si une valeur subit deux évolutions successives CM_1 et CM_2 , le coefficient multiplicateur global CM_g vérifie :

$$CM_g=CM_1\times CM_2$$

- Le taux d'évolution global t_g , pour passer de la valeur initiale à la valeur finale vérifie :

$$CM_g=1+t_g \quad \Leftrightarrow \quad t_g=CM_g-1$$

ATTENTION :

Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 10% ne signifie pas que la valeur est inchangée.
On n'ajoute pas les taux d'évolution.

Exemple :

Un prix de 150 euros subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 %

On a $CM_g = 1,1 \times 0,9 = 0,99$ et $t_g = CM_g - 1 = -0,01$

Ces deux évolutions correspondent à une baisse de 1 %.

Remarque :

Il n'est pas utile de connaître le prix initial pour calculer le taux d'évolution global.

5) ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Propriété et définition :

Une valeur évolue d'un taux t .
Le taux d'évolution réciproque est le taux d'évolution qui permet de passer de la valeur finale à la valeur initiale.

Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

Le taux d'évolution réciproque vérifie :

$$CM_r = 1 + t_r \quad \Leftrightarrow \quad t_r = CM_r - 1$$

Exemple :

Pour le taux de TVA classique de 20 %, le coefficient multiplicateur entre le prix Hors taxe et le prix toutes taxes est CM=1,2.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM_r = \frac{1}{CM} = \frac{1}{1,2} \approx 0,833$

Ce qui correspond environ à une baisse de 16,7 % et absolument pas une baisse de 20%.