Chapitre N2 – Calcul Litteral et Equations

Méthode 1 : Développer avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b,
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x+3)^2$.

On utilise l'identité $(a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 3 dans $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x-4)^2$.

On utilise l'identité $(a-b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 4 dans $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x-5)^2$.

On utilise l'expression $(a-b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$(3x-5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$ ⟶ On remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$(3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x+2)(7x-2)$.

On utilise l'expression $(a+b)(a-b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$(7x+2)(7x-2) = (7x)^2 - 2^2$ ⟶ On remplace a par $7x$ et b par 2 dans $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$(7x+2)(7x-2) = 49x^2 - 4$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Méthode 2 : Factoriser avec un facteur commun

À connaître

Pour tous nombres a, b et k : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression A = $3y + 21$ puis factorise.

A = $3 \times y + 3 \times 7$	⟶ On repère un facteur commun.
A = $3(y + 7)$	⟶ On factorise.

Exemple 2 : Factorise l'expression B = $2x + xy$.

B = $2 \times x + x \times y$	⟶ On repère un facteur commun.
B = $x(2 + y)$	⟶ On factorise.

Exemple 3 : Factorise l'expression C = $(2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$.

C = $(2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$	⟶ On repère un facteur commun.
C = $(2x + 5)[(3x + 7) + (6x + 1)]$	⟶ On factorise.
C = $(2x + 5)(9x + 8)$	⟶ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 4 : Factorise l'expression D = $(9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

D = $(9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$	⟶ On repère un facteur commun.
D = $(9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)]$	⟶ On factorise.
D = $(9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11]$	⟶ On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « – ».
D = $(9x - 4)(2x - 5)$	⟶ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 5 : Factorise l'expression E = $(5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

E = $(5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7)$	⟶ On repère un facteur commun.
E = $(5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)]$	⟶ On factorise.
E = $(5x - 7)[9x - 2 - 5x + 7]$	⟶ On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « – ».
E = $(5x - 7)(4x + 5)$	⟶ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Méthode 3 : Factoriser avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b,
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad ; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad ; \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Exemple 1 : Factorise l'expression A = $x^2 + 6x + 9$.

A = $x^2 + 6x + 9$ ⟶ On observe trois termes précédés du signe +.

A = $x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

A = $(x + 3)^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression B = $25x^2 - 20x + 4$.

B = $25x^2 - 20x + 4$ ⟶ On observe trois termes et des signes différents.

B = $(5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ *avec* $a = 5x$ et $b = 2$.

B = $(5x - 2)^2$ ⟶ On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression C = $64x^2 - 49$.

C = $64x^2 - 49$ ⟶ On observe la différence de deux carrés.

C = $(8x)^2 - 7^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.

C = $(8x + 7)(8x - 7)$ ⟶ On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

Méthode 4 : Résoudre une équation produit

Exemple : Résous l'équation $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs au moins est nul.
On en déduit que :

$x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$

càd $x = -3$ ou $x = 7$

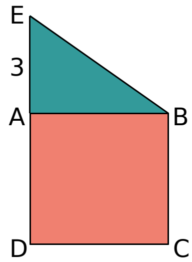
On teste les valeurs trouvées.

Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.

Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.

Les solutions de l'équation produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont -3 et 7.

Méthode 5 : Mettre un problème en équation



Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré et ABE est un triangle rectangle en A tel que AE = 3 cm. Tous les points sont distincts.

Quelle doit être la longueur du côté du carré ABCD pour que son aire soit égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure en cm du côté du carré ABCD.
Comme les points sont distincts alors $x > 0$.
Donc AB = BC = CD = DA = x.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note x.

Étape n°2 : Mettre en équation

$A_{ABCD} = AB \times AD$
$A_{ABCD} = x \times x = x^2$

$A_{ABE} = AB \times AE \div 2$
$A_{ABE} = x \times 3 \div 2 = 1{,}5x$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x.

On veut que :
Aire du carré ABCD = Aire du triangle rectangle ABE.
Le nombre cherché vérifie donc l'équation :

$$x^2 = 1{,}5x.$$

La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

Pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit.

$x^2 - \mathbf{1{,}5x} = 1{,}5x - \mathbf{1{,}5x}$
càd $x^2 - 1{,}5x = 0$

On élimine les termes en x dans le membre de droite.

càd $\mathbf{x} \times x - 1{,}5 \times \mathbf{x} = 0$
càd $\mathbf{x}(x - 1{,}5) = 0$

On factorise pour se ramener à une équation produit.

Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs au moins est nul.

$x = 0$ ou $x - 1{,}5 = 0$
càd $x = 0$ ou $x = 1{,}5$

On résout l'équation produit.

Étape n°4 : Vérifier que les valeurs trouvées sont solutions du problème

On teste les valeurs trouvées.

Pour $x = 0$: $x^2 = 0$ et $1{,}5x = 0$.

Pour $x = 1{,}5$: $x^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ et $1{,}5x = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.
Comme x est un nombre strictement positif, la solution 0 ne convient pas à ce problème.

On vérifie que les valeurs trouvées répondent à la question.

Étape n° 5 : Conclure

La solution du problème est donc 1,5 cm.

On conclut.