

CHAPITRE N8 – FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Méthode 1 : Reconnaître une fonction affine ou linéaire, calculer l'image d'un nombre

À connaître

On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.

On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x$) où a est un nombre.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

Exemple : Soient les fonctions f , g et h telles que $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 5x - 2$. Indique, en justifiant, si les fonctions précédentes sont affines, linéaires ou ni l'un ni l'autre ; calcule ensuite l'image de 3 par la fonction f et celle de -7 par la fonction h .

- $f(x) = 2 \times x$ donc la fonction f est **linéaire** avec $a = 2$.
- La fonction g n'est ni affine ni linéaire car on doit élever x au carré.
- $h(x) = 5 \times x + (-2)$ donc la fonction h est **affine** avec $a = 5$ et $b = -2$.

- $f(3) = 2 \times 3$ On remplace x par 3.
 $f(3) = 6$ On calcule.
L'image de 3 par la fonction f est 6.
- $h(-7) = 5 \times (-7) - 2$
 $h(-7) = -37$
L'image de -7 par la fonction h est -37 .

Méthode 2 : Déterminer, par le calcul, l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : On définit les fonctions f et g par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 12$. Détermine l'antécédent de 7 par la fonction f et l'antécédent de 13 par la fonction g .

On cherche le nombre x qui a pour image 7 par la fonction f .

L'image de x est $f(x)$ donc on résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \\ \text{càd } 2x &= 7 \\ \text{càd } x &= 3,5 \end{aligned}$$

L'antécédent de 7 par f est donc 3,5.

On cherche le nombre x qui a pour image 13 par la fonction g .

L'image de x est $g(x)$, on résout donc l'équation $g(x) = 13$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 5x - 12 &= 13 \\ \text{càd } 5x &= 25 \\ \text{càd } x &= 5 \end{aligned}$$

L'antécédent de 13 par g est donc 5.

Méthode 3 : Représenter graphiquement une fonction affine ou linéaire

À connaître

Un repère étant défini, dire qu'un point appartient à la **représentation graphique de la fonction affine** $f : x \mapsto ax + b$ signifie que ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ c'est-à-dire $y = ax + b$.

La représentation graphique **d'une fonction affine** est **une droite**.

Dans le cas de la **fonction linéaire**, cette droite passe par l'origine du repère.

Remarque : a s'appelle le **coefficient directeur**, il indique la direction de la droite représentative : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1 (c'est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et de x).

b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$, la droite passe par le point $(0 ; b)$.

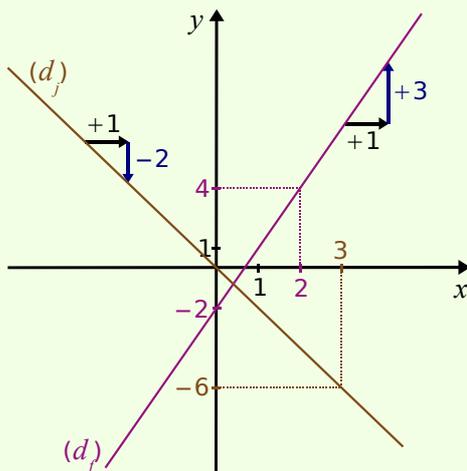
Exemple : Représente graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ et la fonction j définie par $j : x \mapsto -2x$.

f est affine donc sa représentation graphique est une droite.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points.

On établit un tableau de valeurs en calculant les images de deux nombres.

Valeurs de x	0	2
Valeurs de $f(x)$	-2	4
Points de la droite	$(0 ; -2)$	$(2 ; 4)$



j est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître un de ses points : on calcule l'image d'un nombre.

Valeur de x	3
Valeur de $j(x)$	-6
Point de la droite	$(3 ; -6)$

On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes.

- Pour la fonction f , en violet :

On place dans le repère les points de coordonnées $(0 ; -2)$ et $(2 ; 4)$.

On trace la droite (d_f) passant par ces deux points.

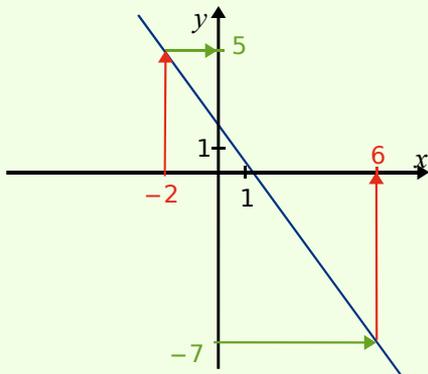
- Pour la fonction j , en marron :

On place dans le repère le point de coordonnées $(3 ; -6)$.

On trace la droite (d_j) passant par ce point et l'origine du repère.

Méthode 4 : Déterminer graphiquement l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée g .
Lis l'image de -2 et l'antécédent de -7 .



Pour lire l'image de -2 :

L'image de -2 est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse -2 .
On lit approximativement 5 . Donc l'image de -2 par la fonction g est environ 5 .

Pour lire l'antécédent de -7 :

L'antécédent de -7 est l'abscisse du point de la droite d'ordonnée -7 .
On lit approximativement 6 .
Donc l'antécédent de -7 par la fonction g est environ 6 .

Méthode 5 : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.

f étant linéaire, on a $f(x) = ax$ où a est le coefficient de cette fonction à déterminer.

$f(5) = 4$ et $f(5) = 5a$ donc $5a = 4$.

On en déduit $a = \frac{4}{5}$ et f est définie par $f(x) = \frac{4}{5}x$.

Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(5) = 4$ et $g(-2) = 25$.

La fonction g est affine donc $g(x) = ax + b$ où a et b sont à déterminer.

$g(5) = 4$ et $g(5) = 5a + b$ donc $5a + b = 4$.

$g(-2) = 25$ et $g(-2) = -2a + b$ donc $-2a + b = 25$.

$$\text{Donc } \begin{cases} 5a + b = 4 \\ -2a + b = 25 \end{cases}$$

On résout donc le système et on obtient $a = -3$ et $b = 19$. Ainsi g est définie par :
 $g(x) = -3x + 19$.

Remarque : a est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $g(x)$ et de x donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Donc, ici, $a = \frac{g(-2) - g(5)}{-2 - 5} = \frac{25 - 4}{-2 - 5} = \frac{21}{-7} = -3$ et $g(x) = -3x + b$.

b s'obtient ensuite en utilisant $g(5) = 4$ ou $g(-2) = 25$.