PUISSANCE ENTIERE D'UN NOMBRE RELATIF

1) DEFINITION DES PUISSANCES

A) PUISSANCES D'EXPOSANT POSITIF

Soit **a** un nombre relatif et **n** un entier positif non nul.
Le produit de **n** facteurs égaux à **a** est le nombre noté $\mathbf{a^n}$.

Cette écriture $\mathbf{a^n}$ se lit **« a puissance n »** ; n est **« l'exposant »**
Cas particuliers : $\mathbf{a^2}$ se lit **« a au carré »** et $\mathbf{a^3}$ se lit **« a au cube »**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Ex :
- $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243 \quad (3^5 \neq 3 \times 5)$
- $(-4{,}2)^2 = (-4{,}2) \times (-4{,}2) = 17{,}64$

Convention :
- $\mathbf{a^0 = 1}$ (avec $a \neq 0$)
- $\mathbf{a^1 = a}$

Ex :
- $\pi^1 = \pi$
- $(-3)^0 = 1$

B) PUISSANCES D'EXPOSANT NEGATIF

Soit **a** un nombre relatif non nul et **n** un entier positif.

$\mathbf{a^{-1} = \dfrac{1}{a}}$ ($\mathbf{a^{-1}}$ est l'inverse de **a**)

$\mathbf{a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}}$ ($\mathbf{a^{-n}}$ est l'inverse de $\mathbf{a^n}$)

Ex :
$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$, $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$, $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 5}$

C) SIGNE DE a^n

Le nombre $\mathbf{a^n}$ est négatif dans le seul cas où **a** est négatif et **n** est impair ; dans tous les autres cas $\mathbf{a^n}$ est positif.

Ex :

– « espace » 3^7

- $(-3)^7$ est négatif , donc $(-3)^7 = -\ 3^7$
- $(-3)^{-4}$ est positif , donc $(-3)^{-4} = 3^{-4}$

2) PUISSANCES DE 10

A) DEFINITION

Soit **n** un entier positif.
- $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{\text{n zéros}}$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{\text{n zéros ou n chiffres après la virgule}}$

Ex :
- $10^3 = 1000$ (mille)
  $10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (un milliard)
- $10^{-3} = 0{,}001$ (un millième)
  $10^{-6} = 0{,}000001$ (un millionième)

B) NOTATION SCIENTIFIQUE

Ecrire un nombre en **notation scientifique**, c'est l'écrire comme le produit d'un nombre décimal, n'ayant qu'un seul chiffre (autre que zéro) avant la virgule, par une puissance de dix.

Ex :

- $326480 = 3{,}2648 \times 10^{5}$
- $0{,}000295 = 2{,}95 \times 10^{-4}$

Pour multiplier par 10^{4}, on déplace la virgule de 4 rangs vers la droite …

C) OPERATIONS

Soit **m** et **n** deux entiers relatifs. On a :

PRODUIT DE DEUX PUISSANCES DE DIX

$$\mathbf{10^{m} \times 10^{n} = 10^{m+n}}$$

Ex :

- $10^{6} \times 10^{-6} = 10^{6+(-6)} = 10^{0} = 1$
- $10^{3} \times 10^{2} = 10^{3+2} = 10^{5}$

Remarque importante :

Une somme de deux puissances de dix n'est pas une puissance de dix.
Par exemple : $10^{3} + 10^{2} = 1100$ **et** $1100 \neq 10^{5}$

QUOTIENT DE DEUX PUISSANCES DE DIX

$$\mathbf{\frac{10^{m}}{10^{n}} = 10^{m-n}}$$

Ex :

- $\dfrac{10^{5}}{10^{3}} = 10^{5-3} = 10^{2}$
- $\dfrac{10^{3}}{10^{7}} = 10^{3-7} = 10^{-4}$
- $\dfrac{10^{2}}{10^{-3}} = 10^{2-(-3)} = 10^{5}$

PUISSANCE D'UNE PUISSANCE DE DIX

$$\mathbf{(10^{m})^{n} = 10^{m \times n}}$$

Ex :

- $(10^{3})^{-2} = 10^{3 \times (-2)} = 10^{-6}$

3) PRODUIT ET QUOTIENT DE DEUX PUISSANCES D'UN MEME NOMBRE

Soit **a** un nombre relatif **non nul** , **m** et **n** des entiers relatifs.

A) PRODUIT

$$\mathbf{a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}}$$

Ex :

- $4^{2} \times 4^{3} = 4^{2+3} = 4^{5}$
- $3^{2} \times 3^{-3} = 3^{2+(-3)} = 3^{2-3} = 3^{-1}$

B) QUOTIENT

$$\mathbf{\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}}$$

Ex :

- $\dfrac{4^{2}}{4^{3}} = 4^{2-3} = 4^{-1}$
- $\dfrac{3^{2}}{3^{-3}} \times = 3^{2-(-3)} = 3^{2+3} = 3^{5}$

4) PUISSANCE D'UN PRODUIT

Soit **a** et **b** deux nombres relatifs non nuls et **n** un entier relatif. On a :

$$\mathbf{(a\,b)^{n} = a^{n}\,b^{n}}$$

Ex :

- $(ab)^{2} = a^{2}\,b^{2}$
- $(2 \times 3)^{3} = 2^{3} \times 3^{3}$