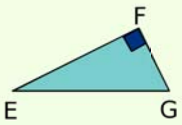
CHAPITRE G1 - TRIANGLE RECTANGLE

Méthode 1 : Démontrer qu'un point est sur un cercle

À connaître

Si un **triangle est rectangle**
alors **son cercle circonscrit** a pour diamètre son hypoténuse.

Exemple : Soit EFG un triangle rectangle en F.
Démontre que le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

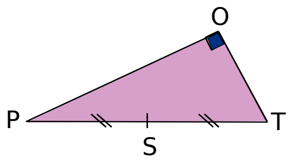
Figure	Données	Propriété	Conclusion
	Le triangle EFG est rectangle en F.	Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.	Le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

Méthode 2 : Calculer la longueur d'une médiane

À connaître

Si un **triangle est rectangle**
alors **la médiane issue du sommet de l'angle droit** a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Exemple : Le triangle POT est un triangle rectangle en O tel que TP = 8 cm. Le point S est le milieu du segment [TP]. Quelle est la longueur du segment [SO] ?



Étape préliminaire : Dans le triangle POT rectangle en O, [OS] joint le sommet O et le milieu S de [TP] donc [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.

Données	Propriété	Conclusion
Le triangle POT est rectangle en O, [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O, TP = 8 cm.	Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.	OS = $\frac{1}{2}$ TP OS = $\frac{1}{2}$ × 8 cm OS = 4 cm

Méthode 3 : Démontrer qu'un triangle est rectangle

À connaître

Si **un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés**
alors **il est rectangle** et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Remarque : Voici une autre formulation possible de cette propriété :

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle
alors le triangle ainsi formé est **rectangle en ce point**.

Exemple : Trace le cercle de diamètre [SR] tel que SR = 7 cm puis place sur ce cercle un point H tel que RH = 4 cm.

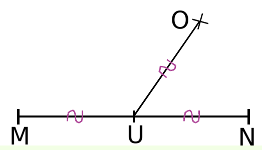
Démontre que le triangle RHS est rectangle en H.

Données	Propriété	Conclusion
Le point H appartient au cercle de diamètre [SR].	Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.	Le triangle SHR est rectangle en H.

À connaître

Si, **dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté**
alors **ce triangle est rectangle** et admet ce côté pour hypoténuse.

Exemple : MON est un triangle, U est le milieu de [MN] et on a : MN = 8 cm ; OU = 4 cm.
Démontre que le triangle MON est rectangle en O.



Étape préliminaire : Dans le triangle MNO, [OU] joint le sommet O et le milieu U de [MN] donc [OU] est la médiane relative au côté [MN].

Données	Propriété	Conclusion
Dans le triangle MNO, [OU] est la médiane relative au côté [MN], MN = 8 cm et OU = 4 cm.	Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.	Le triangle MNO est rectangle en O.

Méthode 4 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

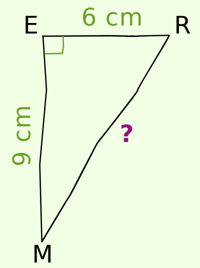
À connaître : Théorème de Pythagore

Si **un triangle est rectangle**
alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.

Exemple 1 : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Soit MER un triangle rectangle en E tel que ME = 9 cm et ER = 6 cm.
Calcule la valeur exacte de MR puis donne la valeur arrondie au millimètre.

Figure à main levée :



Le triangle MER est rectangle en E, son hypoténuse est le côté [MR]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$MR^2 = ME^2 + ER^2$

$MR^2 = 9^2 + 6^2$

$MR^2 = 81 + 36$

$MR^2 = 117$

La longueur MR est positive donc MR = $\sqrt{117}$ cm (valeur exacte).

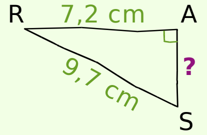
(On utilise ensuite la calculatrice et la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ pour obtenir une valeur de $\sqrt{117}$.
La calculatrice affiche alors : 10,81665383.
On a donc : 10,8 < $\sqrt{117}$ < 10,9.
Ainsi 10,8 et 10,9 sont deux valeurs approchées de $\sqrt{117}$ à un dixième près. 10,8 est la valeur plus "proche" de la valeur affichée par la calculatrice)

Donc MR ≈ 10,8 cm (**valeur arrondie au millimètre**).

Exemple 2 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et RA = 7,2 cm. Calcule AS.

Figure à main levée :



Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$RS^2 = RA^2 + AS^2$

$9{,}7^2 = 7{,}2^2 + AS^2$

$AS^2 = 9{,}7^2 - 7{,}2^2$

$AS^2 = 94{,}09 - 51{,}84$

$AS^2 = 42{,}25$

La longueur AS est positive donc AS = $\sqrt{42{,}25}$ cm.

(La valeur obtenue avec la calculatrice pour $\sqrt{42{,}25}$ est 6,5.

C'est une valeur exacte car $6{,}5^2 = 42{,}25$)

Donc AS = 6,5 cm (**valeur exacte**).

Méthode 5 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm. Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Remarque préliminaire : si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN] donc on **calcule séparément** LN^2 et $LU^2 + NU^2$:

D'une part, $LN^2 = 62^2$
$LN^2 = 3844$

D'autre part, $LU^2 + NU^2 = 46^2 + 42^2$
$LU^2 + NU^2 = 2116 + 1764$
$LU^2 + NU^2 = 3880$

On constate que $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.
Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.

Méthode 6 : Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

À connaître : Réciproque du théorème de Pythagore

Si, **dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**
alors **ce triangle est rectangle** et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Exemple : NEZ est un triangle tel que NE = 75 cm ; EZ = 45 cm et NZ = 60 cm. Démontre que ce triangle est rectangle.

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE] donc on **calcule séparément** NE^2 et $EZ^2 + NZ^2$:

D'une part, $NE^2 = 75^2$
$NE^2 = 5625$

D'autre part, $EZ^2 + NZ^2 = 45^2 + 60^2$
$EZ^2 + NZ^2 = 2025 + 3600$
$EZ^2 + NZ^2 = 5625$

On constate que $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.