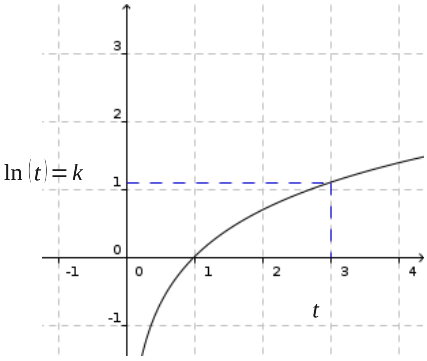
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

1) DÉFINITION



Nous avons déjà étudier la fonction logarithme népérien.
Nous avons vu que lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction $\ln$ est strictement croissante.
En particulier, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln(x) = 0$: c'est $x = 1$.
De même, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln(x) = 1$: c'est $x = e$.

Plus généralement, pour tout réel k, il existe un unique réel $t \in]0\,;+\infty[$ tel que $\ln t = k$.

Ce réel t est noté $\exp(k)$. On lit « exponentielle de k»

Propriété et définition :

> Pour tout réel x, on appelle exponentielle de x et on note $\exp(x)$ l'unique réel de $]0\,;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.
> On appelle fonction exponentielle la fonction $\begin{array}{l} \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \exp(x) \end{array}$

$$\begin{cases} \exp(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y \in]0\,;+\infty[\end{cases}$$

Remarques :

- $\exp(0)$ est le nombre dont le logarithme népérien est 0, donc $\exp(0) = 1$
- $\exp(1)$ est le nombre dont le logarithme népérien est 1, donc $\exp(1) = e$. $e \approx 2{,}718$ (à 10^{-3} près)
- Pour tout entier relatif n, on a $n = \ln(e^n)$ et par conséquent $\exp(n) = e^n$

Notation:
On conviendra d'étendre cette notation pour un réel x quelconque.
On notera alors : $\begin{array}{l} \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto e^x \end{array}$

On a donc: $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y \in]0\,;+\infty[\end{cases}$

Remarque :
La notation e^2 a une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)
Par contre la notation e^{π} ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

2) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

- Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel strictement positif x, on a $e^{\ln x} = x$.

Propriétés :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout réel x , $e^x > 0$

Propriété :

> La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite
(par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Conséquences :

Pour tous réels a et b
- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

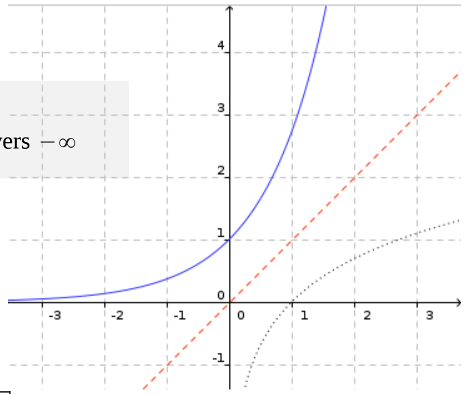
Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$

Représentation graphique :

On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$



Remarque :
Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriété : relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve :
Soit a et b deux réels quelconques.
On a : $\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$

On en déduit : $e^{\ln(e^a \times e^b)} = e^{a+b} \Leftrightarrow e^{a+b} = e^a e^b$

Exemples :

- $e^2 e^7 = e^9$
- $e^{\ln(8)+1} = e^{\ln(8)} e^1 = 8e$
- $e^{x+y+z} = e^{x+y} e^z = e^x e^y e^z$
- $e^{-3} \times e^3 = e^{-3+3} = e^0 = 1$. On en déduit que $e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$
- $e^{x-3} = e^x e^{-3} = e^x \times \dfrac{1}{e^3} = \dfrac{e^x}{e^3}$
- $e^{3x} = e^{x+x+x} = e^x e^x e^x = (e^x)^3$

On généralise facilement les exemples ci-dessus et on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

4) DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant chacun des membres de l'égalité $\ln(e^x) = x$ vraie pour tout réel x et en utilisant la formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, on obtient :

$\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$, d'où $(e^x)' = e^x$.

Propriété :

La fonction exponentielle $f : x \longmapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = e^x$

La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée et on en déduit facilement une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$

$u : x \longmapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = -\sin(x)$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\sin(x) e^{\cos(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Une primitive sur I de $f: x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ est $F: x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h: x \longmapsto (4x+6)\mathrm{e}^{x^2+3x}$.

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. h admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x)=2(2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x}=2\times u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}$ où $u: x \longmapsto x^2+3x$

On en déduit que les primitives de la fonction h sont les fonctions H_k définies sur $\mathbb{R}$ par $H_k: x \longmapsto 2\mathrm{e}^{x^2+3x}+k$

5) PUISSANCES D'EXPOSANTS REELS

A) LA NOTATION a^x

Si n est un entier naturel, la notation a^n a un sens pour tout réel a. Dans le cas où n est un entier négatif, la notation a^n a un sens pour tout réel a non nul car $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}$. On se propose de donner un sens à la notation a^b quand b est un réel quelconque.

Définition :

Soit x un réel et a un réel strictement positif.
a exposant x (ou a puissance x) est le réel noté a^x défini par :

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Cette définition est cohérente avec celle de a^n lorsque a est un réel strictement positif et n un entier . En effet :

$$\mathrm{e}^{n\ln(a)}=\mathrm{e}^{\ln(a^n)}=a^n$$

Exemple :

$3{,}4^{2{,}7}=\mathrm{e}^{2{,}7\ln(3{,}4)}$. Avec la calculatrice, on obtient $3{,}4^{2{,}7}\approx 27{,}23$ (à 10^{-2} près)

Les règles de calcul des exposants entiers s'étendent aux exposants réels :

$a^m a^n=a^{m+n}$; $(a\times b)^m=a^m\times b^m$; $(a^m)^n=a^{mn}$; $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ (avec $a\neq 0$) ; $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ (avec $a\neq 0$)

B) LES FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE *a*

Définition :

Soit a un réel strictement positif.
On appelle **fonction exponentielle de base *a*** la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$$

- La fonction exponentielle de base 1, $\exp_1: x \longmapsto 1^x$ est constante et vaut 1.
- La fonction exponentielle de base e , $\exp_e: x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est la fonction exponentielle déjà étudiée.

C) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE 10

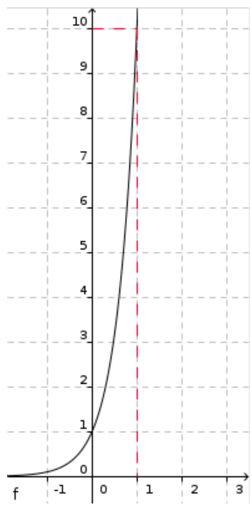
Pour tout entier naturel n, l'équation $\log(x)=n$ a une solution unique $x=10^n$.
Plus généralement, pour tout réel k, il existe un unique réel $t\in]0;+\infty[$ tel que $\log(t)=k$.
Ce réel est $t=10^k$.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle de base 10** la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=10^x$.

La fonction $f: x \longmapsto 10^x$ est strictement croissante.

On peut écrire $f(x)=10^x=\mathrm{e}^{x\ln(10)}$

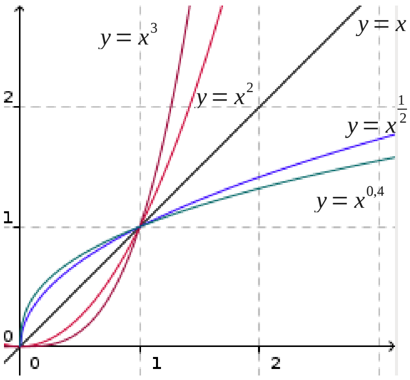


6) LES FONCTIONS PUISSANCES

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout réel strictement positif, on note x^a le nombre $e^{a\ln(x)}$
- On appelle **fonction puissance** la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^a=e^{a\ln(x)}$



Exemple :

Les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto x^3$, $x\longmapsto x^{\frac{1}{2}}$, $x\longmapsto x^{0,4}$

Remarque :

Les fonctions $x\longmapsto x^a$ sont strictement croissantes.

L'allure de la courbe représentative dépend la position de a par rapport à 1

7) COMPARAISON DES COMPORTEMENTS À L'INFINI

Propriété :

Pour tout entier $n>0$, on a ;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$$

Remarque : On peut retenir :

- A l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.
- A l'infini, toute puissance l'emporte sur le logarithme népérien.