# LES NOMBRES COMPLEXES

## 1 ) DÉFINITION - REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

**Définition :**

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté $i$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre $z$.

**Nombres complexes particuliers :**

Soit un nombre complexe $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- si $b=0$, on a $z=a$, $z$ est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$ )
- si $a=0$, on a $z=bi$, on dit que $z$ est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

**Remarques :**

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel $x$ correspond au point d'abscisse $x$ sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si $x$ et $y$ sont des réels, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (Le point d'abscisse $x$ se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse $y$)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a ; b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe $z$ est inférieur à un nombre complexe $z'$ ou qu'un nombre complexe $z$ est positif.

**Propriété :**

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

**Preuve :**

Considérons un nombre complexe $z$ s'écrivant de deux façons : $z = a+bi$ et $z = a'+b'i$, avec $a$, $b$, $a'$, $b'$ réels.
On a alors $a+bi = a'+b'i$ et on en déduit $a-a' = i(b'-b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \dfrac{a-a'}{b'-b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\dfrac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.
Alors $b'-b=0$ et comme on sait que $a-a' = i(b'-b)$, on en déduit $a-a'=0$ c'est-à-dire $a=a'$.
On a donc obtenu $a=a'$ et $b=b'$. Les deux écritures de $z$ sous la forme $a+bi$ et $a'+b'i$ sont donc identiques.

**Définition :**

Soit un nombre complexe $z$.
L'écriture $z = a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe $z$.
$a$ est appelé **partie réelle** de $z$, et $b$ **partie imaginaire** de $z$.
On note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

**Remarques :**
- La partie réelle de $z$ est un nombre réel.
- La partie imaginaire de $z$ est un nombre réel.

**Propriété :**

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si $a$, $b$, $a'$, $b'$ sont des réels, on a

$$a+bi = a'+b'i \quad \Leftrightarrow \quad a=a' \text{ et } b=b'$$

**Preuve :**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes : $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$, avec $a$, $b$, $a'$, $b'$ réels.
On a alors $a = \text{Re}(z)$, $a' = \text{Re}(z')$, $b = \text{Im}(z)$ et $b' = \text{Im}(z')$
Si $z = z'$, alors $a+bi = a'+b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a=a'$ et $b=b'$.
Donc $z$ et $z'$ ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

**Réciproquement :**
Si $z$ et $z'$ ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a=a'$ et $b=b'$
et par conséquent $a+bi = a'+b'i$, c'est-à-dire $z=z'$

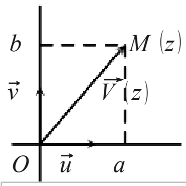
**Exemple :** Soit $z = 2+3i$ et $z' = i-5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$z+z' = -3+4i$ $\qquad$ $z-z' = 7+2i$

$2z-3z' = 19+3i$ $\qquad$ $z \cdot z' = -13-13i$ $\qquad$ $z^2 = -5+12i$

**Définition :**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Au point $M$ de coordonnées $(a ; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $M$ ou que $M(a ; b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.
Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a ; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}(a ; b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

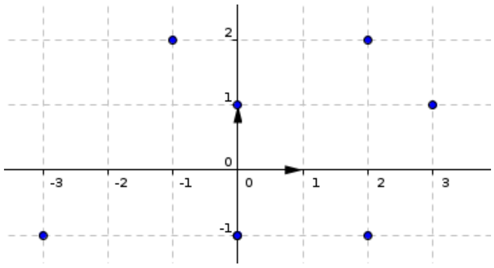



Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

**Exemple :** Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 2i$ ; $z_2 = 3 + i$ ; $z_3 = -1 + 2i$ ; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$ ; $z_6 = -i$ ; $z_7 = 1$ ; $z_8 = -i - 3$




**Propriétés :**

Si $M$ a pour affixe $z = a + bi$ et si $M'$ a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec $a, b, a', b'$ réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu $I$ de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$

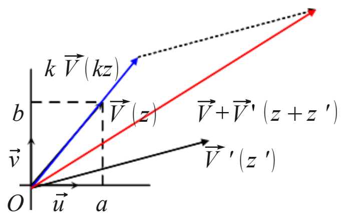
**Preuve :**

$M$ a pour coordonnées $(a ; b)$ et $M'$ a pour coordonnées $(a' ; b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a' - a) + (b' - b)i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$
- le milieu $I$ de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a + a'}{2} ; \dfrac{b + b'}{2}\right)$, donc son affixe est :
$z_I = \dfrac{a + a'}{2} + \dfrac{i(b + b')}{2} = \dfrac{a + a' + bi + b'i}{2} = \dfrac{a + bi + a' + b'i}{2} = \dfrac{z + z'}{2}$

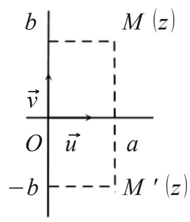
**Propriétés :**

- Si $\vec{V}$ a pour affixe $z$ et $\vec{V'}$ pour affixe $z'$, alors $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si $k$ est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe $kz$.




**Preuve :**

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de $z$ et $z'$.
Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.
On sait alors que le vecteur $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$.
Il a donc pour affixe :
$a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'$.
- Si $k$ est un réel, alors on sait que $k\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$, donc $k\vec{V}$ a pour affixe :
$ka + kbi = k(a + bi) = kz$.




Si $M$ est le point d'affixe $z$, le point $M'$ d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses.

**Définition :**

Soit $z$ un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
On appelle **conjugué** de $z$ le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bi$.

**Exemple :** Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$\bar{z} = 3 - 5i$ $\quad$ $\bar{z}' = -2 - 3i$ $\quad$ $\bar{z} + \bar{z}' = 1 - 8i$ $\quad$ $z + z' = 1 + 8i$

$\overline{z + z'} = 1 - 8i$ $\quad$ $\bar{z} \cdot \bar{z}' = -21 + i$ $\quad$ $zz' = -21 - i$ $\quad$ $\overline{zz'} = -21 + i$

**Propriétés :**

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$ ; $\overline{zz'} = \bar{z} . \bar{z}'$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}'}$ ; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ ; $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

**Preuve :**

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$ .

- $\overline{z}=a-bi$ donc $\overline{\overline{z}}=a+bi=z$
- $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$ donc $z\cdot\overline{z}$ est un réel positif
- $z+z'=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i$ .
  Comme $(a+a')$ et $(b+b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z+z'}=(a+a')-(b+b')i=a-bi+a'-b'i=\overline{z}+\overline{z}'$
- $z-z'=a+bi-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$ .
  Comme $(a-a')$ et $(b-b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z-z'}=(a-a')+(b-b')i=a-bi-a'+b'i=\overline{z}-\overline{z}'$
- $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'}=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i$
  D'autre part $\overline{z}\cdot\overline{z}'=(a-bi)(a'-b'i)=aa'-ab'i-a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i=\overline{zz'}$
- Si $z'\neq 0$ , $\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{a'+b'i}=\dfrac{a'-b'i}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\dfrac{a'-b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{-b'}{(a'^2+b'^2)}i$
  Comme $\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}$ et $\dfrac{-b'}{a'^2+b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\dfrac{1}{z'}}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+i\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}$
  D'autre part $\overline{z}'=a'-b'i$, donc $\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{1}{a'-b'i}=\dfrac{a'+b'i}{(a'-b'i)(a'+b'i)}=\dfrac{a'+b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}i=\overline{\dfrac{1}{z'}}$
- *Si* $z'\neq 0$ , $\overline{\dfrac{z}{z'}}=\overline{z\times\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$
- $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=\mathrm{Re}(z)$ ; $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=\mathrm{Im}(z)$
- $z=\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi \Leftrightarrow a+bi-a+bi=0 \Leftrightarrow 2bi=0 \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
- $z=-\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=-a+bi \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

**Remarque :** La propriété $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

**Exemple :** $\dfrac{1+i}{2-i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4-i^2}=\dfrac{1+3i}{4+1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

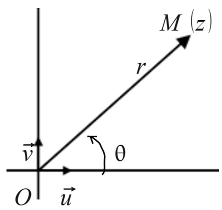
## 2 ) FORME TRIGONOMÉTRIQUE - MODULE - ARGUMENT

### A ) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

**Coordonnées polaires :**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ .
Soit $M(a;b)$ un point du plan (distinct de $O$) .
On appelle **coordonnées polaires** de $M$ , tout couple de nombres réels $(r,\theta)$ tel que :

$r=OM$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta+2k\pi$ , $k\in\mathbb{Z}$




On a alors $r=\sqrt{a^2+b^2}$
$a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$

$z=a+ib$
$=r\cos\theta+ir\sin\theta$
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

**Remarque :**

Soit $M$ le point d'affixe $x$ avec $x\in\mathbb{R}$ , on a $r=OM=|x|$

**Définition :**

Tout nombre complexe non nul $z$ peut-être écrit sous la forme :
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ , avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.
On dit que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de $z$.

**Propriété :**

Si deux nombres complexes $z$ et $z'$ sont écrits sous forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, on a :

$$z=z' \Leftrightarrow r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

**Preuve :** Considérons les points $M$ et $M'$ d'affixes respectives $z$ et $z'$. On peut écrire :

$$z=z' \Leftrightarrow M=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'})\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

## B ) MODULE

**Définition :**

Soit le nombre complexe $z$ de forme algébrique $a+bi$ et soit $M$ le point d'affixe $z$.
On appelle **module** de $z$ le nombre réel positif $r=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ . On note $r=|z|$ .

**Remarque :**
La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque $x$ est un nombre réel, on a $r=OM=|x|$.
Pour un réel $x$ , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de $x$" ou "module de $x$".
Pour un nombre complexe non réel $z$ , $|z|$ sera lu impérativement "module de $z$".

**Exemple :** - Calculer le module de $z_1=3+4i$ :

$|z_1|=5$

- $z_2=\sqrt{3}+i$ :

$|z_2|=2$

**Propriétés :**

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe $z$ , on a $\|\vec{V}\|=|z|$
- Soit $A$ et $B$ deux points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , on a $AB=|z_B-z_A|$

**Preuve :**
Si $\vec{V}$ est un vecteur d'affixe $z$, on a $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$ avec $M$ d'affixe $z$ . Alors $\|\vec{V}\|=\|\overrightarrow{OM}\|=OM=|z|$.
Si $A$ et $B$ sont les points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B-z_A=$ ...

**Propriétés :**

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|\bar{z}|=|z|$
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$
- si $z'\neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z'}\right|=\dfrac{1}{|z'|}$
- si $z'\neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\,\bar{z}=|z|^2$ ( on retrouve $z\,\bar{z}\in\mathbb{R}^+$ )
- si $z\neq 0$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

**Preuve :**

- Soit $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ . On peut écrire : $|z|=0 \Leftrightarrow OM=0 \Leftrightarrow M=O \Leftrightarrow z=0$

- Le point $M'$ d'affixe $-z$ est symétrique du point $M$ par rapport à l'origine $O$.

  La symétrie conservant les distances on a : $OM'=OM$ donc $|-z|=|z|$

- Le point $M''$ d'affixe est symétrique du point $M$ par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ .
  La symétrie conservant les distances on a : $OM''=OM$ donc $|\bar{z}|=|z|$

- Soit $\vec{v}$ le vecteur d'affixe $z$ et $\vec{v'}$ le vecteur d'affixe $z'$.
  On sait que le vecteur $\vec{v}+\vec{v'}$ a pour affixe $z+z'$.
  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v}+\vec{v'}\|\leqslant\|\vec{v}\|+\|\vec{v'}\|$ donc $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

- Si $z$ a pour forme algébrique $z=a+bi$ et si $z'$ a pour forme algébrique $z'=a'+b'i$, alors :
  $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|zz'|=\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{(aa'^2+bb'^2+ab'^2+a'b^2)}=\sqrt{a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{a'^2+b'^2}=|z|\cdot|z'|$$

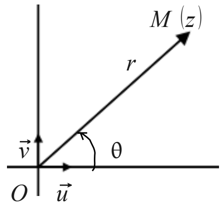
- si $z'\neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z'|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=\left|z'\times\frac{1}{z'}\right|=|1|=1 \text{ , donc } \left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z}{z'}\right|=\left|z\times\frac{1}{z'}\right|=|z|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=|z|\frac{1}{|z'|}=\frac{|z|}{|z'|}$$

- $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$ (donc $z\in\mathbb{R}^+$ )

- si $z\neq 0$ , $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\,\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

## C ) ARGUMENT




**Définition :**

Soit le nombre complexe non nul $z$ de forme algébrique $a+bi$ et soit $M$ le point d'affixe $z$.
On appelle **argument** de $z$ tout nombre réel $\theta$ tel que $\theta=(\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. On note $\theta=\arg(z)$

**Remarque :** $\theta$ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près $(k\in\mathbb{Z})$ c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

**Propriétés :**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\theta$ et $\theta'$. On a :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$ — $\arg(zz')=\arg z+\arg z'\ [2\pi]$
- $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg z\ [2\pi]$
- $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$ — $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'\ [2\pi]$
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ — $\arg(z^n)=n\arg z\ [2\pi]$
- $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg(\bar{z})=-\arg z\ [2\pi]$
- $-(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$ — $\arg(-z)=\arg z+\pi\ [2\pi]$

**Preuve :**

- On a : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\in\mathbb{R}^+$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ avec $r'\in\mathbb{R}^+$.
  On montre facilement que : $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.
  On peut en déduire : $zz'=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$.
  Comme $rr'$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz')=\arg z+\arg z'\ [2\pi]$

- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  On peut en déduire que : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{1}{r}\times(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
  Comme $\dfrac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$.

- On a :
  $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\dfrac{1}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta'))=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$
  Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\times\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\dfrac{r}{r'}\times(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
  Comme $\dfrac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\theta-\theta'=\arg z-\arg z'$

- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
  Pour $n=0$, on a :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ et $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta)=\cos(0)+i\sin(0)=1+0i=1$, donc $P(0)$ est vraie.

  Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel $n$, c'est-à-dire $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

  Alors en multipliant les deux membres par $\cos\theta+i\sin\theta$, on obtient :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)](\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$
  $P(n+1)$ est alors justifiée.
  On a donc démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

  Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\dfrac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$
  La proposition est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{Z}$. $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$

  On peut écrire $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$
  Comme $r^n$ est un réel positif, on a donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$ : $\arg(z^n)=n\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, on peut écrire : $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  Alors $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$.
  Comme $r$ est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z})=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$, on peut écrire : $-(\cos\theta+i\sin\theta)=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$
Alors $-z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)]$.
Comme $r$ est un réel positif, on en déduit $\arg(-z)=\theta+\pi=\arg z+\pi\quad[2\pi]$

**Propriétés :**

Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\bar{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :
$\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ et $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$

## D ) NOTATION EXPONENTIELLE

**Remarque :**
D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres . C'est-à-dire que la fonction $f:\theta\longmapsto\cos\theta+i\sin\theta$ est telle que $f(\theta+\theta')=f(\theta)\times f(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

**Notation :**
Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r\in\mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

**Propriétés :**

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{i(-\theta)}=e^{-i\theta}$ $\qquad\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=e^{ni\theta}\quad,\ n\in\mathbb{Z}$ $\qquad\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ $\qquad-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$

**Remarques :**

- La propriété $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$

- La propriété $(e^{i\theta})^2=e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

- On peut vérifier que : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ . Ce sont les **formules d'EULER**

- La relation $(e^{i\theta})^n=e^{ni\theta}$ , $n\in\mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

# 3 ) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS REELS

**Propriété :**

L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels (avec $a\neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation. $\Delta$ est un nombre réel.

- si $\Delta\geqslant 0$ , les deux solutions sont réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$ , les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Le trinôme $az^2+bz+c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ .

**Preuve :**
On considère l'équation $az^2+bz+c=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels (avec $a\neq 0$)
On peut écrire $az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement .
Comme $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ , l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta=0$, l'équation a une solution réelle $z=-\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta<0$ , $-\Delta>0$ et on peut écrire : $-\Delta=\sqrt{-\Delta}^2$ , donc $\Delta=-\sqrt{-\Delta}^2=i^2\sqrt{-\Delta}^2=(i\sqrt{-\Delta})^2$
on obtient alors :
$a^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right)=a\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$
On en déduit que l'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2+bz+c$ sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.