

LES NOMBRES COMPLEXES

1) DÉFINITION - REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note \mathbb{C} un ensemble contenant \mathbb{R} tel que :

- Il existe dans \mathbb{C} un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de \mathbb{R} , et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z .

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. (\mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C})
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- \mathbb{R} correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite. On peut donc toujours comparer deux nombres réels : si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- \mathbb{C} , ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan. Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a; b)$. On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} . On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \frac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.

Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.

On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition :

Soit un nombre complexe z .

L'écriture $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

a est appelé **partie réelle** de z , et b **partie imaginaire** de z .

On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a = \operatorname{Re}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$, $b = \operatorname{Im}(z)$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$

Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.

Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement :

Si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$

et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

Exemple : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$$z + z' = -3 + 4i$$

$$z - z' = 7 + 2i$$

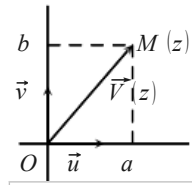
$$2z - 3z' = 19 + 3i$$

$$z \cdot z' = -13 - 13i$$

$$z^2 = -5 + 12i$$

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 Au point M de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
 On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que $M(a; b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.
 Au vecteur \vec{V} de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
 On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de \vec{V} ou que $\vec{V}(a; b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

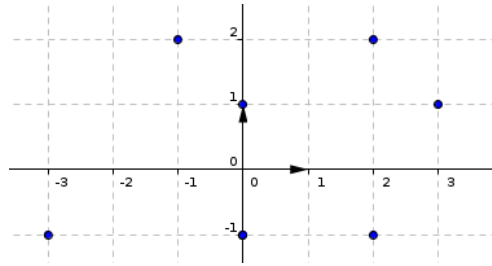


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$; $z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$



Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$ • $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ • le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

Preuve :

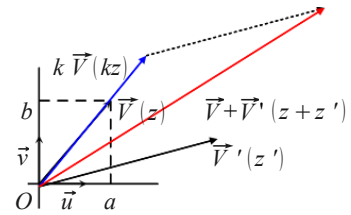
M a pour coordonnées $(a; b)$ et M' a pour coordonnées $(a'; b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a' - a) + (b' - b)i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$
- le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{a + a'}{2}; \frac{b + b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

$$z_I = \frac{a + a'}{2} + \frac{i(b + b')}{2} = \frac{a + a' + bi + b'i}{2} = \frac{a + bi + a' + b'i}{2} = \frac{z + z'}{2}$$

Propriétés :

- Si \vec{V} a pour affixe z et \vec{V}' pour affixe z' , alors $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz .

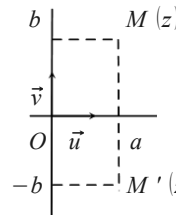


Preuve :

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de z et z' .
 Le vecteur \vec{V} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur \vec{V}' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.
 On sait alors que le vecteur $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$.
 Il a donc pour affixe :
 $a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'$.
- Si k est un réel, alors on sait que $k\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$, donc $k\vec{V}$ a pour affixe :
 $ka + kbi = k(a + bi) = kz$.

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
 On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté \bar{z} tel que $\bar{z} = a - bi$.



Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe \bar{z} est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$\bar{z} = 3 - 5i$ $\bar{z}' = -2 - 3i$ $\bar{z} + \bar{z}' = 1 - 8i$ $z + z' = 1 + 8i$
 $\overline{z + z'} = 1 - 8i$ $\bar{z} \cdot \bar{z}' = -21 + i$ $zz' = -21 - i$ $\overline{zz'} = -21 + i$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- Si $z' \neq 0$ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{\bar{z}'}$; $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}'}$
- $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

• $\bar{z} = a - bi$ donc $\overline{\bar{z}} = a + bi = z$

• $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$ donc $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif

• $z + z' = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i$.
Comme $(a + a')$ et $(b + b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z + z'} = (a + a') - (b + b')i = a - bi + a' - b'i = \bar{z} + \bar{z}'$

• $z - z' = a + bi - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$.
Comme $(a - a')$ et $(b - b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z - z'} = (a - a') + (b - b')i = a - bi - a' + b'i = \bar{z} - \bar{z}'$

• $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$
D'autre part $\bar{z} \cdot \bar{z}' = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - ab'i - a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \overline{zz'}$

• Si $z' \neq 0$, $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + b'i} = \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{-b'}{a'^2 + b'^2}i$
Comme $\frac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\frac{1}{z'} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{b'}{a'^2 + b'^2}$

D'autre part $\bar{z}' = a' - b'i$, donc $\frac{1}{\bar{z}'} = \frac{1}{a' - b'i} = \frac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \frac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i = \overline{\frac{1}{z'}}$

• Si $z' \neq 0$, $\frac{\bar{z}}{z'} = \overline{z} \times \frac{1}{z'} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'}$

• $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{Re}(z)$; $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \text{Im}(z)$

• $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

• $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + bi = -a + bi \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Remarque : La propriété $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemple : $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4-i^2} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

2) FORME TRIGONOMÉTRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

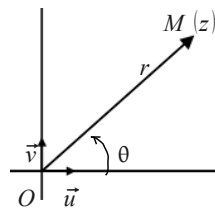
Coordonnées polaires :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $M(a; b)$ un point du plan (distinct de O) .

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r, θ) tel que :

$r = OM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$

$z = a + ib$
 $= r \cos \theta + ir \sin \theta$
 $= r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Remarque :

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z .

Propriété :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2\pi k \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On peut écrire :

$$z = z' \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2\pi k \end{cases}$$

B) MODULE

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$. Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".

Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$:

$$|z_1| = 5$$

- $z_2 = \sqrt{3} + i$:

$$|z_2| = 2$$

Propriétés :

- Soit \vec{v} un vecteur d'affixe z , on a $|\vec{v}| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$

Preuve :

Si \vec{v} est un vecteur d'affixe z , on a $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $|\vec{v}| = |\overrightarrow{OM}| = OM = |z|$.

Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A = \dots$

Propriétés :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- si $z \neq 0$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- si $z' \neq 0$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $z \bar{z} = |z|^2$ (on retrouve $z \bar{z} \in \mathbb{R}^+$)
- si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve :

• Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On peut écrire : $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$

• Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O .

La symétrie conservant les distances on a : $OM' = OM$ donc $|-z| = |z|$

• Le point M'' d'affixe \bar{z} est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|\bar{z}| = |z|$

• Soit \vec{v} le vecteur d'affixe z et \vec{v}' le vecteur d'affixe z' .

On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $|\vec{v} + \vec{v}'| \leq |\vec{v}| + |\vec{v}'|$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

• Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors :

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{aa'^2 + bb'^2 + ab'^2 + a'b^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \cdot |z'|$$

• si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$\left| z \times \frac{1}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |1| = 1, \text{ donc } \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \cdot \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

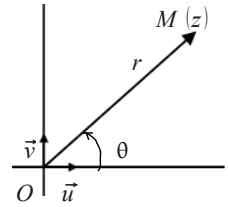
• $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z \in \mathbb{R}^+$)

• si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

C.) ARGUMENT

Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .
On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \vec{OM}) [2\pi]$. On note $\theta = \arg(z)$



Remarque : θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

- | | |
|---|---|
| $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$ | $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$ |
| $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ | $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$ |
| $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$ | $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$ |
| $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$ | $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$ |
| $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ | $\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$ |
| $-(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$ | $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$ |

Preuve :

- On a : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}^+$.
On montre facilement que : $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$.
On peut en déduire : $zz' = rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$.
Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$

- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

On peut en déduire que : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{r} \times (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

Comme $\frac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg z \quad [2\pi]$.

- On a : $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos(-\theta') + i \sin(-\theta')) = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$

Alors $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \frac{r}{r'} \times (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$

Comme $\frac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$

- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Pour $n=0$, on a :

$(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos(0 \times \theta) + i \sin(0 \times \theta) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0i = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n , c'est-à-dire $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Alors en multipliant les deux membres par $\cos \theta + i \sin \theta$, on obtient :

$(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)](\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)$

$P(n+1)$ est alors justifiée.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :

$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$

La proposition est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

On peut écrire $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, on peut écrire : $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

Alors $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z \quad [2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, on peut écrire : $-(\cos \theta + i \sin \theta) = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$
Alors $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Propriétés :

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. \bar{z} et $-z$ ont pour formes trigonométriques :
 $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ et $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$

D) NOTATION EXPONENTIELLE

Remarque :

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres. C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ est telle que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+$, on a $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$
$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{n i \theta}, n \in \mathbb{Z}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

- On peut vérifier que : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les **formules d'EULER**

- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{n i \theta}, n \in \mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

3) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS REELS

Propriété :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans \mathbb{C} deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)

On peut écrire $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2 \sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$
on obtient alors :

$$a z^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2} \right) = a \left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.