LES NOMBRES COMPLEXES

1) DÉFINITION - REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a\ ;\ b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \dfrac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.

Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.

On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition :

Soit un nombre complexe z.
L'écriture $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z.
On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.
On a alors $a = \mathrm{Re}(z)$, $a' = \mathrm{Re}(z')$, $b = \mathrm{Im}(z)$ et $b' = \mathrm{Im}(z')$
Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.
Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement :

Si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$
et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

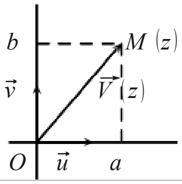
Exemple : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$z + z' = -3 + 4i$ $\qquad$ $z - z' = 7 + 2i$

$2z - 3z' = 19 + 3i$ $\qquad$ $z \cdot z' = -13 - 13i$ $\qquad$ $z^2 = -5 + 12i$

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Au point M de coordonnées $(a\,;b)$, on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de M ou que $M\,(a\,;b)$ est **l'image ponctuelle** de $z=a+bi$.
Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\,;b)$, on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}\,(a\,;b)$ est **l'image vectorielle** de $z=a+bi$.

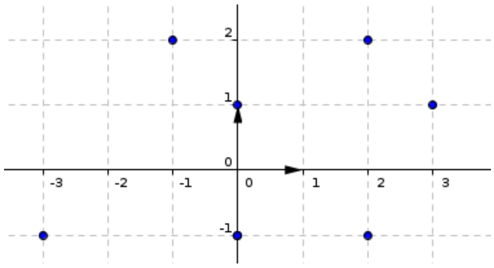


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1=2+2i$; $z_2=3+i$; $z_3=-1+2i$; $z_4=2-i$

$z_5=i$; $z_6=-i$; $z_7=1$; $z_8=-i-3$



Propriétés :

Si M a pour affixe $z=a+b\,i$ et si M' a pour affixe $z'=a'+b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z=(a'-a)+(b'-b)\,i$
- $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{a^2+b^2}$
- $MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$
- le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$

Preuve :

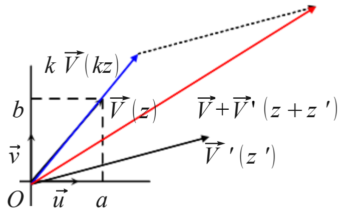
M a pour coordonnées $(a\,;b)$ et M' a pour coordonnées $(a'\,;b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'-a\\b'-b\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a'-a)+(b'-b)i=a'-a+b'i-bi=a'+b'i-(a+bi)=z'-z$
- le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+a'}{2}\,;\dfrac{b+b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

$$z_I=\frac{a+a'}{2}+\frac{i\,(b+b')}{2}=\frac{a+a'+bi+b'i}{2}=\frac{a+bi+a'+b'i}{2}=\frac{z+z'}{2}$$

Propriétés :

- Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\vec{V'}$ pour affixe z', alors $\vec{V}+\vec{V'}$ a pour affixe $z+z'$.
- Si k est un réel, alors $k\,\vec{V}$ a pour affixe kz.



Preuve :

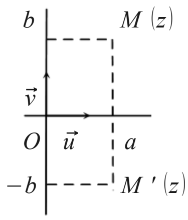
- Soit $a+bi$ et $a'+b'i$ les formes algébriques de z et z'.
  Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

  On sait alors que le vecteur $\vec{V}+\vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$.

  Il a donc pour affixe :
  $a+a'+(b+b')i=a+a'+bi+b'i=a+bi+a'+b'i=z+z'$.

- Si k est un réel, alors on sait que $k\,\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$, donc $k\,\vec{V}$ a pour affixe :

  $ka+kbi=k\,(a+bi)=kz$.



Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a+bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}=a-bi$.

Exemple : Soit $z=3+5i$ et $z'=-2+3i$. Calculer :

$\bar{z}=3-5i$ $\qquad$ $\bar{z}'=-2-3i$ $\qquad$ $\bar{z}+\bar{z}'=1-8i$ $\qquad$ $z+z'=1+8i$

$\overline{z+z'}=1-8i$ $\qquad$ $\bar{z}\cdot\bar{z}'=-21+i$ $\qquad$ $zz'=-21-i$ $\qquad$ $\overline{zz'}=-21+i$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\bar{\bar{z}}=z$
- $z\cdot\bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{z-z'}=\bar{z}-\bar{z}'$; $\overline{zz'}=\bar{z}.\bar{z}'$
- Si $z'\neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\mathrm{Re}\,(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}\,(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$; $z\in i\,\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$.

- $\overline{z}=a-bi$ donc $\overline{\overline{z}}=a+bi=z$
- $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$ donc $z\cdot\overline{z}$ est un réel positif
- $z+z'=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i$.
  Comme $(a+a')$ et $(b+b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z+z'}=(a+a')-(b+b')i=a-bi+a'-b'i=\overline{z}+\overline{z}'$
- $z-z'=a+bi-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$.
  Comme $(a-a')$ et $(b-b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z-z'}=(a-a')+(b-b')i=a-bi-a'+b'i=\overline{z}-\overline{z}'$
- $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'}=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i$
  D'autre part $\overline{z}\cdot\overline{z}'=(a-bi)(a'-b'i)=aa'-ab'i-a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i=\overline{zz'}$
- Si $z'\neq 0$, $\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{a'+b'i}=\dfrac{a'-b'i}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\dfrac{a'-b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{-b'}{(a'^2+b'^2)}i$
  Comme $\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}$ et $\dfrac{-b'}{a'^2+b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\dfrac{1}{z'}}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+i\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}$
  D'autre part $\overline{z}'=a'-b'i$, donc $\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{1}{a'-b'i}=\dfrac{a'+b'i}{(a'-b'i)(a'+b'i)}=\dfrac{a'+b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}i=\overline{\dfrac{1}{z'}}$
- Si $z'\neq 0$, $\overline{\dfrac{z}{z'}}=\overline{z\times\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$
- $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=\mathrm{Re}(z)$; $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=\mathrm{Im}(z)$
- $z=\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi \Leftrightarrow a+bi-a+bi=0 \Leftrightarrow 2bi=0 \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
- $z=-\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=-a+bi \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

Remarque : La propriété $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemple : $\dfrac{1+i}{2-i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4-i^2}=\dfrac{1+3i}{4+1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

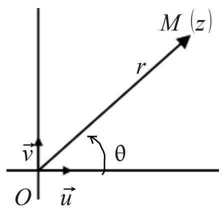
2) FORME TRIGONOMÉTRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Coordonnées polaires :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit $M(a;b)$ un point du plan (distinct de O) .
On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r,θ) tel que :

$r=OM$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$



On a alors $r=\sqrt{a^2+b^2}$
$a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$

$z=a+ib$
$=r\cos\theta+ir\sin\theta$
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

Remarque :

Soit M le point d'affixe x avec $x\in\mathbb{R}$, on a $r=OM=|x|$

Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.
On dit que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, on a :

$$z=z' \Leftrightarrow r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'[2\pi] \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On peut écrire :

$$z=z' \Leftrightarrow M=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ (\vec{u};\overrightarrow{OM})=(\vec{u};\overrightarrow{OM'})[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'[2\pi] \end{cases}$$

B) MODULE

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a+bi$ et soit M le point d'affixe z.
On appelle **module** de z le nombre réel positif $r=OM=\sqrt{a^2+b^2}$. On note $r=|z|$.

Remarque :
La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r=OM=|x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exemple : - Calculer le module de $z_1=3+4i$:

$|z_1|=5$

- $z_2=\sqrt{3}+i$:

$|z_2|=2$

Propriétés :

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\vec{V}\|=|z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB=|z_B-z_A|$

Preuve :
Si $\vec{V}$ est un vecteur d'affixe z, on a $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $\|\vec{V}\|=\|\overrightarrow{OM}\|=OM=|z|$.
Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B-z_A=$ ...

Propriétés :

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|z|=|z|$
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$
- si $z'\neq0$ $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$
- si $z'\neq0$ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$
- $z\bar{z}=|z|^2$ (on retrouve $z\bar{z}\in\mathbb{R}^+$)
- si $z\neq0$ $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve :

- Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. On peut écrire : $|z|=0 \Leftrightarrow OM=0 \Leftrightarrow M=O \Leftrightarrow z=0$

- Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O.

  La symétrie conservant les distances on a : $OM'=OM$ donc $|-z|=|z|$

- Le point M'' d'affixe est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$.
  La symétrie conservant les distances on a : $OM''=OM$ donc $|z|=|z|$

- Soit $\vec{v}$ le vecteur d'affixe z et $\vec{v'}$ le vecteur d'affixe z'.
  On sait que le vecteur $\vec{v}+\vec{v'}$ a pour affixe $z+z'$.
  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v}+\vec{v'}\|\leqslant\|\vec{v}\|+\|\vec{v'}\|$ donc $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

- Si z a pour forme algébrique $z=a+bi$ et si z' a pour forme algébrique $z'=a'+b'i$, alors :
  $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on en déduit que :
  $|zz'|=\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{aa'^2+bb'^2+ab'^2+a'b^2}=\sqrt{a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}=|z|\cdot|z'|$

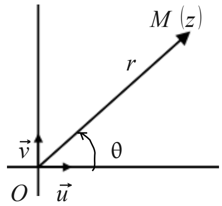
- si $z'\neq0$ on a, d'après la propriété précédente :

  $|z'|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=\left|z'\times\frac{1}{z'}\right|=|1|=1$, donc $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right|=\left|z\times\frac{1}{z'}\right|=|z|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=|z|\frac{1}{|z'|}=\frac{|z|}{|z'|}$

- $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$ (donc $z\in\mathbb{R}^+$)

- si $z\neq0$, $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

C) ARGUMENT



Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a+bi$ et soit M le point d'affixe z.
On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta=(\vec{u},\overrightarrow{OM})\,[2\pi]$. On note $\theta=\arg(z)$

Remarque : θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près $(k\in\mathbb{Z})$ c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'. On a :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$ $\qquad\arg(zz')=\arg z+\arg z'\quad[2\pi]$
- $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta)+i\sin(-\theta)$ $\qquad\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg z\quad[2\pi]$
- $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$ $\qquad\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'\quad[2\pi]$
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ $\qquad\arg(z^n)=n\arg z\quad[2\pi]$
- $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ $\qquad\arg(\bar{z})=-\arg z\quad[2\pi]$
- $-(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$ $\qquad\arg(-z)=\arg z+\pi\quad[2\pi]$

Preuve :

- On a : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\in\mathbb{R}^+$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ avec $r'\in\mathbb{R}^+$.
  On montre facilement que : $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.
  On peut en déduire : $zz'=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$.
  Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz')=\arg z+\arg z'\quad[2\pi]$

- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  On peut en déduire que : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{1}{r}\times(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
  Comme $\dfrac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\theta=-\arg z\quad[2\pi]$.

- On a :
  $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\dfrac{1}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta'))=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$
  Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\times\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\dfrac{r}{r'}\times(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
  Comme $\dfrac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\theta-\theta'=\arg z-\arg z'$

- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
  Pour $n=0$, on a :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ et $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta)=\cos(0)+i\sin(0)=1+0i=1$, donc $P(0)$ est vraie.

  Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n, c'est-à-dire $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

  Alors en multipliant les deux membres par $\cos\theta+i\sin\theta$, on obtient :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)](\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$
  $P(n+1)$ est alors justifiée.
  On a donc démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

  Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\dfrac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$
  La proposition est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{Z}$. $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$

  On peut écrire $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$
  Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\arg(z^n)=n\arg z\quad[2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, on peut écrire : $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  Alors $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$.
  Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z})=-\theta=-\arg z\quad[2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$, on peut écrire : $-(\cos\theta + i\sin\theta) = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$
  Alors $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)]$.
  Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Propriétés :

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\bar{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :
$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ et $-z = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$

D) NOTATION EXPONENTIELLE

Remarque :
D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres . C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$ est telle que $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation :
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{i n\theta} = e^{n i\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

  $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :

  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

- On peut vérifier que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les **formules d'EULER**

- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{n i\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

3) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS REELS

Propriété :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
  $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)
On peut écrire $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement .
  Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2\sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$
  on obtient alors :
  $a^2 + bz + c = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right) = a\left(z - \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$
  On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
  Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.