Conditionnement : maîtriser le cours

Ex 1 :

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .
Quelles sont les différentes manières de calculer $P(A\cap B)$?

Ex 2 : ***Vrai ou faux***

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .

1)	$P(A)+P(\overline{A})=1$	
2)	$P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(B)$	
3)	$P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$	
4)	Si $A\cup B=\Omega$ alors $P(A)=1-P(B)$	
5)	Si $A\cap B=\emptyset$ alors $P(A)=1-P(B)$	
6)	$P_B(A)=P(A)P(\overline{A}\cap B)$	
7)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_B(\overline{A})$	
8)	$P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_B(A)$	
9)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$	
10)	$P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$	
11)	$P(A)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$	
12)	$P(A)=P_A(B)+P_A(\overline{B})$	
13)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,6$, alors $B=\overline{A}$	
14)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,5$, alors $P(A\cap B)=0,2$	
15)	Si $P(A)=0,2$, $P_A(B)=0,3$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,8$, alors $P(B)=0,7$	

Ex 3 : ***Tableau à double entrée***

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B		0,14	0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

En déduire $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$

Ex 4 : ***Utiliser la définition***

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

1) On a $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A\cup B)$

2) On a maintenant $P(A)=\frac{1}{4}$, $P_A(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$

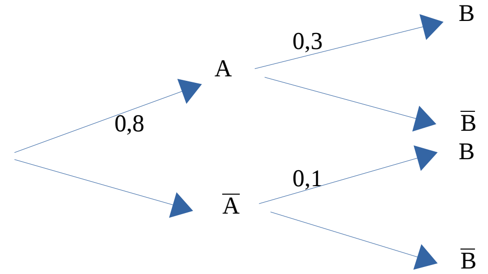
Calculer $P(A\cap B)$, $P(B)$ et $P_B(A)$.

En déduire $P(\overline{A}\cap B)$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P(A\cap \overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$

Arbre, indépendance : maîtriser le cours

Ex 5 : ***Arbre***

À partir de l'arbre (en haut à droite), déterminer $P(A)$, $P_A(B)$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$ et $P_A(\overline{B})$



Ex 6 : ***Vrai ou faux***

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . (de probabilités non nulles pour les questions 4 à 7) et **indépendants** pour les questions 8 à 11.

1)	Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	
2)	Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles.	
3)	Si $P(A)=0$, alors A et B sont indépendants.	
4)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	
5)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$	
6)	Si $P(A\cap B)=P_B(A)\times P_A(B)$, alors A et B sont indépendants	
7)	Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.	
8)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cap B)=0,24$	
9)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cup B)=0,72$	
10)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,4$, alors $P(\overline{A}\cap B)=0,28$	
11)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,8$, alors $P(\overline{A}\cup B)=0,78$	

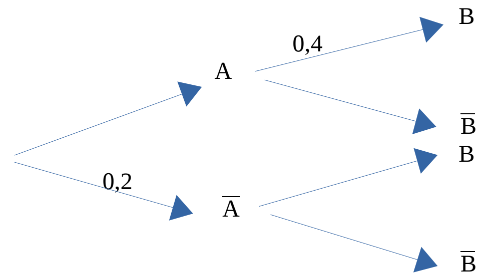
Ex 7 : ***Tableau à double entrée***

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω . Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B			0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

Ex 8 : ***Arbre***

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω . Compléter l'arbre ci-dessous :



Utiliser un arbre

Ex 9 :

Dans une réunion, on compte 18 femmes et 24 hommes. 12 personnes portent des lunettes dont le quart sont des femmes.
On choisit une personne au hasard de la réunion.
On note A : « la personne choisie est un homme » et B : « la personne choisie porte des lunettes ».

1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

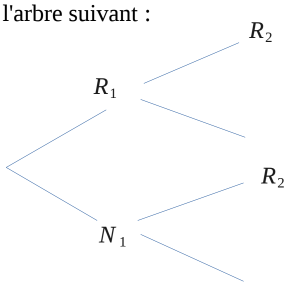
3) Les hypothèses connues permettent-elles de déterminer $P(A\cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Ex 10 :

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.
La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce truquée est de $\frac{3}{4}$. La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est de $\frac{1}{2}$.
On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance .
On note T : « la pièce est truquée » et F : « on obtient FACE »
1) Calculer la probabilité d'avoir pris une pièce truquée.
2) Faire un arbre illustrant la situation.
3) a) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce truquée et de tomber sur FACE.
b) Calculer la probabilité de tomber sur FACE.
4) La pièce est tombée sur FACE . Quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?

Ex 11 :

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires.
1) On tire au hasard une boule de l'urne . Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2) On tire au hasard une deuxième boule de l'urne sans avoir remis la première.
a) Si la première boule tirée est rouge, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?
b) Si la première boule tirée est noire, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?
c) Compléter l'arbre suivant :



d) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ? Deux boules rouges ? Deux boules de la même couleur ?
e) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage ?
f) La deuxième boule est noire . Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule rouge au premier tirage ?

Utiliser une partition de l'univers

Ex 12 :

Dans un petit lycée, 50 % des élèves en âge de voter en 2016 sont en TES, 30 % en TL et les autres en TS.
Lors du vote, le taux d'abstention a été de 10 % chez les élèves de TES, 30 % chez ceux de TL et 15 % chez ceux de TS.
On choisit au hasard un élève en âge de voter.
1) Quelle est la probabilité qu'il soit en S et qu'il ait voté ?
2) Quelle est la probabilité qu'il ait voté ?

Généralisation de la formule des probabilités composées

Ex 13 :

Soit A_1 , A_2 et A_3 , trois événements de probabilités non nulles, ainsi que leurs intersections deux à deux.
Montrer que $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)$

Utiliser la notion d'indépendance

Ex 14 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements A: « la carte tirée est un Roi » et
B : « la carte tirée est un Pique »
Les événement A et B sont-ils indépendants ?

Ex 15 :

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{3}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{4}$.
Les événements G_1 : « gagner à la première loterie » et G_2 : « gagner à le deuxième loterie » sont indépendants.
Quelle est la probabilité que Pierre :
1) gagne aux deux loteries ?
2) gagne seulement à la première loterie ?
3) ne gagne à aucune des loteries ?

Ex 16 :

On dispose de deux urnes U1 et U2.
L'urne U1 contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules vertes.
L'urne U2 contient 4 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes.
L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et de noter leur couleur . Les tirages sont indépendants.
On appelle R_i, V_i et N_i les événements : on tire une boule respectivement Rouge, Verte, Noire de l'urne U_i, pour $i=1$ ou $i=2$.
1) Construire un arbre.
2) Déterminer la probabilité que les deux boules soient de la même couleur.

Ex 17 : ***Épreuves répétées indépendantes***

On dispose d'une pièce parfaitement équilibrée et on la jette successivement trois fois.
On appelle A l'événement « obtenir pile au premier jet » , B l'événement « obtenir face au deuxième jet » et C l'événement « obtenir face au troisième jet ».
1) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2) Trouver la probabilité de l'événement $A\cap B\cap C$

Ex 18 :

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article .
Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.
Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.
Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Calculer la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux.

Avec des variables aléatoires

Ex 19 :

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher, une noire et neuf blanches . On tire successivement et sans remise deux boules de ce sac, puis on lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner . Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On note N : « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G : « Le joueur gagne ».
1) Construire un arbre.
2) a) Déterminer les probabilités des événements N et G.
b) Le joueur ne gagne pas . Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?
3) Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où $m\in\mathbb{R}_+^*$.

Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros . S'il ne gagne pas mais s'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise. S'il ne gagne pas et s'il n'a pas tiré la boule noire, le jouer perd sa mise.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m .
c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Avec des suites

Ex 20 :

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce.
Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
A l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :
- si à l'instant n la puce est en A, à l'instant $n+1$ elle est : soit en B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ soit en C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, à l'instant $n+1$ elle est : soit en C ,soit en A de manière équiprobable.
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n : « à l'instant n , la puce est en A » et $a_n=P(A_n)$.
On choisit les mêmes notations pour B et C .
1) Donner les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 .
2) Construire un arbre pondéré.
3) Calculer a_k , b_k et c_k pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$.
4) Montrer que pour tout entier naturel n ,

a) $a_n+b_n+c_n=1$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \end{cases}$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $a_{n+2}=\frac{1}{6}a_n$

c) En déduire que pour tout entier naturel p , $a_{2p}=\left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1}=0$.

Déterminer de même b_n .
5) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$. Monter de même que $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$
6) Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter cette limite.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 21 : *Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016 - ex 3*

Probabilités conditionnelles - application des formules et des propriétés

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
   a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
   b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
   c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Ex 22 : *Baccalauréat S Liban 27 mai 2015 – ex 4*

Probabilités conditionnelles - application des formules et des propriétés

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

Ex 23 : *Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 19 nov 2015 – ex 1*

Probabilités conditionnelles - application des formules et des propriétés

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :
A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A\cap S$.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

Ex 24 : *Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - ex 3*

Probabilités conditionnelles - une probabilité en fonction d'une variable - étude de fonctions

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

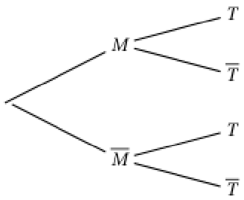
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P\left(\overline{M} \cap T\right)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.

En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Ex 25 : *Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013 - ex 4*

Probabilités conditionnelles - suites géométriques - algorithme - loi binomiale

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

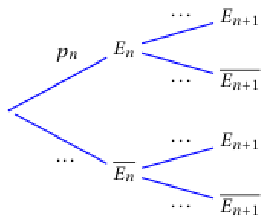
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur $0,2 \times$ P $+ 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b . Déterminer la probabilité qu'une semaine donnée :
- exactement 5 salariés soient malades
- au plus 4 salariés soient malades
- au moins 5 salariés soient malades