

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de \mathbb{R} . (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible.....

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I ".

1) GÉNÉRALITÉS

Exemple d'introduction :

Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30.

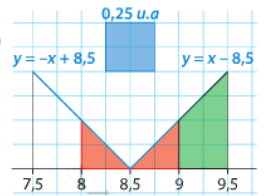
On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.

On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1; t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x = t_1$, et $x = t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.

Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X \in [8; 9]) = 0,25$,

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X \in [9; 9,5]) = \int_9^{9,5} (x - 8,5) dx = 0,375$

Enfin, on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X \in [7,5; 9,5]) = \int_{7,5}^{9,5} |x - 8,5| dx = 1$



Rappel :

$$|x - 8,5| = \begin{cases} x - 8,5 & \text{si } x \geq 8,5 \\ -x + 8,5 & \text{si } x \leq 8,5 \end{cases}$$

On dit que la fonction $x \mapsto |x - 8,5|$ est la **densité** de la variable aléatoire X .

Remarque :

Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle. Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

Définition :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I , s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques points) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t) dt = 1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X \in J) = \int_J f(t) dt$

f est appelée **densité** de X .

- Si $I = [a; b]$:
 $\int_I f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$
- Si $I = [a; +\infty[$:
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe, on a :
 $\int_I f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$

Remarques :

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)
Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \emptyset$ alors $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$
- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :
$$P(X = a) = P(X \in [a; a]) = \int_a^a f(t) dt = 0$$
- On en déduit que pour tous réels a et b de I , avec $a < b$:
 $P(X \in [a; b]) = P(X \in]a; b]) = P(X \in]a; b[) = P(X \in [a; b[)$ et $P(X > a) = P(X \geq a)$, etc ...

2) LOI UNIFORME

Définition :

La loi uniforme sur $[a; b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a; b]$ par la fonction constante :

$$f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a; b]$.
Pour tout intervalle $[c; d]$, tel que $a \leq c \leq d \leq b$, on a :

$$P(X \in [c; d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule :
$$\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

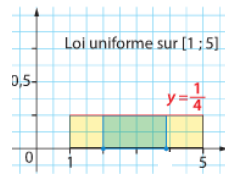
Remarque :

La probabilité $P(X \in [c; d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c; d]$.

Exemple :

$$P(X \in [1; 2]) = P(X \in [4; 5]) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Si } c \in [2; 5], P(X \in [2; c]) = \frac{c-2}{4}$$



Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi uniforme** sur $[a; b]$.

On définit l'espérance de X par $E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{(b-a)} dt$

$$\text{On a } E(X) = \frac{a+b}{2}$$

De manière plus générale, l'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a; b]$ est définie par $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$

Cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

3) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

- Pour tout intervalle $[c; d]$, tel que $0 \leq c \leq d$, on a :

$$P(X \in [c; d]) = P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

- Pour tout réel $a \geq 0$, $P(X \leq a) = P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a \geq 0$, $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = e^{-\lambda a}$

Exemples : Les démonstrations des propriétés ci-dessus sont identiques.

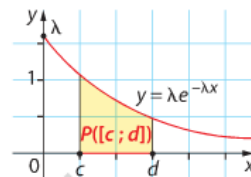
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 2 e^{-2t} dt = [-e^{-2t}]_1^2 = -e^{-4} + e^{-2} = \frac{e^2 - 1}{e^4} \approx 0,117$$

$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 2 e^{-2t} dt = 1 - (-e^{-2} + 1) = e^{-2} \approx 0,135$$

Remarques :

- On a $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$ (en effet $\lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda a}) = 1$)
- La probabilité de l'intervalle $[c; d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe représentant la densité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

Pour tous réels positifs s et t , on a :

$$P_{X > s}(X > s+t) = P(X > t)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

Preuve : exigible

$$P_{X > s}(X > s+t) = \frac{P((X > s+t) \cap (X > s))}{P(X > s)}$$

Or, $(X > s+t) = (X \in]s+t; +\infty[)$, $(X > s) = (X \in]s; +\infty[)$ et $(X \in]s+t; +\infty[) \subset (X \in]s; +\infty[)$

Donc, $(X \in]s; +\infty[) \cap (X \in]s+t; +\infty[) = (X > s+t)$

D'autre part, $P(X > s+t) = e^{-\lambda(s+t)}$ et $P(X > s) = e^{-\lambda s}$

$$\text{Ainsi, } P_{X > s}(X > s+t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

On définit l'espérance de X par $E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a t \times \lambda e^{-\lambda t} dt$

On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Preuve : exigible

On cherche une primitive de $f_\lambda : t \mapsto t \times \lambda e^{-\lambda t}$ sur \mathbb{R}^+ sous la forme d'une fonction $F_\lambda : t \mapsto (mt + n) e^{-\lambda t}$ ($m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$)
 F_λ est dérivable sur \mathbb{R}^+ par produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ .
 $\forall t \in \mathbb{R}^+, F'_\lambda(t) = m e^{-\lambda t} - \lambda (mt + n) e^{-\lambda t} = (-\lambda mt + (m - \lambda n)) e^{-\lambda t}$
 En identifiant F'_λ à f_λ , on obtient :

$$\begin{cases} -\lambda m = \lambda \\ m - \lambda n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

On en déduit que $F_\lambda : t \mapsto \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$

Ainsi, pour tout $a \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^a t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = F_\lambda(a) - F_\lambda(0) = \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} = -\frac{a}{e^{\lambda a}} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda a}} + \frac{1}{\lambda}$$

Grâce aux résultats de croissances comparées, on conclut que

$$E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Remarque : L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X .

4) LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

A) THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

La loi binomiale est très utilisée en modélisation, mais certaines probabilités sont impossibles à calculer pour la loi binomiale. Grâce au théorème suivant, le calcul de ces probabilités est rendu possible à l'aide de la loi normale. C'est historiquement la première motivation de l'utilisation de la loi normale en pratique.

Théorème de Moivre-Laplace : admis

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n; p)$.

On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous réels a et b , avec $a < b$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \in [a; b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

On considère que la limite est pratiquement atteinte lorsqu'on a simultanément :

$$\begin{aligned} n &\geq 30 \\ np &\geq 5 \\ n(1-p) &\geq 5 \end{aligned}$$

B) LOI N(0;1)

Propriété : admise

Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = \frac{1}{2}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(t) dt = \frac{1}{2}$

La fonction f permet de définir une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

Définition :

La loi normale centrée réduite $N(0; 1)$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

On définit l'espérance de X par $E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t f(t) dt$

On a $E(X) = 0$.

Preuve : exigible (on peut établir que ...)

$$\int_x^0 t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-1 + e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

De la même façon, on montre que : $\int_0^y t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{y^2}{2}} + 1 \right)$

On a alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

On en déduit que $E(X) = 0$.

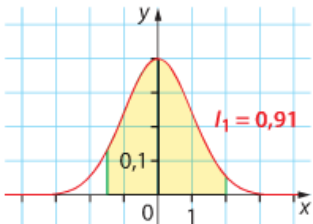
Propriété : admise

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.
La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2) = 1$

La moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Remarque :

La fonction f est paire et sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
De plus, on ne connaît pas de primitive explicite de la fonction f .
La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.
Par exemple, $P(-1,5 \leq X \leq 2) \approx 0,91$



Théorème :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve : exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = P(-t \leq X \leq t) = \int_{-t}^t f(x) dx$ où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme f est paire, on a pour tout réel t positif : $g(t) = 2 \int_0^t f(x) dx$

Comme f est continue et positive, on en déduit que g est dérivable, et que sa dérivée $2f$ est strictement positive.
 g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus $g(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \int_0^t f(x) dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

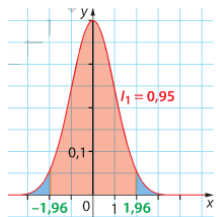
Soit $\alpha \in]0; 1[$, on a alors $0 < 1 - \alpha < 1$

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe au moins un réel $u_\alpha \in [0; +\infty[$, tel que $g(u_\alpha) = 1 - \alpha$.
Comme, de plus g est strictement croissante, on en déduit que u_α est unique.

Valeurs à connaître :

- $u_{0,05} \approx 1,96$
- $u_{0,01} \approx 2,58$

Sur le graphique ci-contre représentant la courbe en cloche associée à la loi normale centrée réduite, l'aire de la surface en rouge est environ égale à 0,95.



5) LOI NORMALE $N(\mu \cdot \sigma^2)$

Définition :

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$, si la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0 ; 1)$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$.

- L'espérance de X est $E(X) = \mu$ et la variance de X est $V(X) = \sigma^2$
- $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]) \approx 0,997$

Remarques :

- μ est la moyenne et σ l'écart type de X ; μ est un paramètre de position de X , et σ un paramètre de dispersion.
- La densité de la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie vertical a pour équation $x = \mu$. La valeur de σ est reliée à l'étalement de la courbe : plus σ est petit, plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie, et moins la dispersion est grande.

Représentation graphique : $N(\mu \cdot \sigma^2)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma = 2$

La courbe ci-contre représente la loi normale $N(1 ; 4)$. Elle admet la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie. D'après la propriété ci-dessus, $P(X \in [-1 ; 3]) \approx 0,683$

