

CALCULS DE DÉRIVÉES : COMPLÉMENTS

1) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Sa fonction dérivée f' s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f .

Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f'' . f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f .

Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit **la fonction dérivée n -ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemple :

$f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f'(x) = 3x^2$ puis ... $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ et $f^{(4)}(x) = 0$

2) DÉRIVÉE DE \sqrt{u}

Propriété :

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Preuve :

Soit $a \in I$. Pour tout réel h non nul tel que $a+h \in I$, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

- Étude de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$

u est dérivable en a . On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

- Étude de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{u(a+h) - u(a)}$

On pose $X = u(a+h)$

u est dérivable en a , u est donc continue en a , ce qui donne : $\lim_{h \rightarrow 0} X = \lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a)$

On a également $u(a) \in]0; +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} = \lim_{X \rightarrow u(a)} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{u(a)}}{X - u(a)} = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$$

- On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u'(a) \frac{1}{2\sqrt{u(a)}} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$

Exemple : Déterminer sur $]0; +\infty[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x^3}$

$u : x \mapsto 2x^3$ est strictement positive et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = 6x^2$

On en déduit que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$

Remarques :

- Cette propriété et les propriétés suivantes sont proposées sur des intervalles. Elles restent vraies sur des réunions d'intervalles.
- Les propriétés qui suivent (admisses) se démontrent en suivant le même modèle.

3) DÉRIVÉE DE u^n (où n est un entier relatif non nul)

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = n u'(x) [u(x)]^{n-1}$$

Remarque : Cas où $n < 0$ et u ne s'annule en aucun réel de I :

$$\text{On a } f(x) = [u(x)]^n = \frac{1}{[u(x)]^{-n}}$$

Puisque $-n > 0$, on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction et on obtient : $f'(x) = -\frac{([u(x)]^{-n})'}{([u(x)]^{-n})^2}$

$$\text{Or } ([u(x)]^{-n})' = -n u'(x) [u(x)]^{-n-1} \text{ donc } f'(x) = -\frac{-n u'(x) [u(x)]^{-n-1}}{([u(x)]^{-n})^2} = n u'(x) [u(x)]^{n-1}$$

On obtient également $f'(x) = n u'(x) [u(x)]^{n-1}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3x^2 + 1)^5$

$u : x \mapsto 3x^2 + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = 6x$

On en déduit que f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 5 u'(x) (u(x))^4 = 5 \times 6x (3x^2 + 1)^4 = 30x (3x^2 + 1)^4$

4) DÉRIVÉE DE $f : x \mapsto g(ax + b)$

Propriété :

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x) = ag'(ax + b)$$

Exemple : Déterminer sur $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2x-5}$

Pour tout $x > \frac{5}{2}$, on pose $f(x) = g(2x-5)$ où $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Pour tout $x > \frac{5}{2}$, $2x-5 > 0$. On en déduit que f est dérivable sur $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ et pour tout $x > \frac{5}{2}$, on a : $f'(x) = 2g'(2x-5) = -\frac{2}{(2x-5)^2}$

5) CAS GÉNÉRAL

Propriété :

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J .

Alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I , on a :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \mapsto \sin x$ et $u : x \mapsto \frac{1}{x}$

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = \cos x$

La fonction u est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(Pour tout $x \neq 0$, on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$... Dans la pratique, quand la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$