

# FONCTION EXPONENTIELLE

## 1) DÉFINITION

### Propriété et définition :

Il existe une unique fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que :  
 $f' = f$  et  $f(0) = 1$

Cette fonction, notée  $\exp$ , est appelée **fonction exponentielle**.

### Preuve : l'existence est admise – l'unicité est exigible

L'existence d'une fonction  $f$  vérifiant les conditions  $f' = f$  et  $f(0) = 1$  est admise. On la note  $\exp$ .  
Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel  $x$ , on a  $\exp(x) \neq 0$  et  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

### Montrons que $g(x) = 1$ :

$x \mapsto \exp(-x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :  $[\exp(-x)]' = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$

$g$  est le produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$g'(x) = [\exp(x)]' \times \exp(-x) + \exp(x) \times [\exp(-x)]' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times [-\exp(-x)] = 0$$

On en déduit que la fonction  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $g(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$ .

Puisque  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $g(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c'est-à-dire que  $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi  $\exp(x) \neq 0$  et  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Considérons une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$

$\exp(x)$  étant différent de 0 pour tout réel  $x$ , on peut considérer la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

### Montrons que $h(x) = 1$ :

$h$  est le quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times (\exp(x))'}{(\exp(x))^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

$h$  est donc une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ .

D'autre part, on a  $h(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$

Donc pour tout réel  $x$  on a :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \exp(x)$$

On en déduit alors l'unicité de la fonction  $\exp$ .

## 2) PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES – NOTATION $e^x$

### Propriété :

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :  
 $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

### Preuve :

Soit  $y$  un nombre réel fixé, on a vu que  $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$ , définie par  $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \exp(x+y)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ , on a :  $[\exp(x+y)]' = (x+y)' \times \exp'(x+y) = 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$

D'autre part  $y$  étant considérée comme une constante,  $\exp(y)$  est aussi une constante donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ , on a :

$$g'(x) = \frac{(\exp(x+y))'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a  $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$

$g$  est donc une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $g' = g$  et  $g(0) = 1$

$g$  est donc la fonction exponentielle (puisque on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = \exp(x)$  c'est-à-dire  $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel  $y$ , on a justifié que :

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a  $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

### Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$
- $f'(0) = f'(0) = 1$
- pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

*Se démontre en étudiant  $g(x) = f(x+a)$ .  
On montre que  $g'(x) = f'(x) f'(a)$ , puis  $g'(a) = f'(0) f'(a) = f'(a)$*

### Remarque :

En appliquant la relation précédente avec  $y = x$ , on obtient :  $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$

En appliquant de nouveau la relation avec  $y = 2x$ , on obtient :  $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$

On peut alors démontrer (par récurrence) que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

Si on note  $e$  le nombre  $\exp(1)$ , alors pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\exp(n) = e^n$  (relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif)

### Notation :

On conviendra de noter pour tout réel  $x$  :  $\exp(x) = e^x$  où  $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

### Remarque :

Le nombre  $e = \exp(1)$  a pour valeur approchée 2,718.

La notation  $e^2$  a donc une double signification : soit le nombre  $e$  élevé au carré, soit le nombre  $\exp(2)$ . (Ces deux nombres étant égaux)

Par contre la notation  $e^\pi$  ne peut désigner que le nombre  $\exp(\pi)$ .

### Propriétés

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
  - $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
  - $e^b \neq 0$  et  $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
  - Si  $n$  est un entier relatif :  $e^{na} = (e^a)^n$
- On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.*

### Preuve :

• Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on peut écrire :  $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$

• Si  $n$  est un entier naturel, soit  $P(n)$  la proposition  $e^{na} = (e^a)^n$

- Pour  $n=0$ , on a  $e^{n0} = e^0 = 1$  et  $(e^a)^0 = 1$  donc  $P(0)$  est vraie

- Supposons que  $P(n)$  est vraie pour un entier naturel fixé  $n$ . On a alors :

$$e^{na} = (e^a)^n \Leftrightarrow e^{na} e^a = (e^a)^n e^a \Leftrightarrow e^{na+a} = (e^a)^{n+1} \Leftrightarrow e^{(n+1)a} = (e^a)^{n+1}$$

On en déduit que  $P(n+1)$  est vraie.

- On a donc démontré par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $e^{na} = (e^a)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- D'autre part  $e^{-na} = \frac{1}{e^{na}} = \frac{1}{(e^a)^n} = (e^a)^{-n}$

La propriété est donc vraie aussi pour les entiers négatifs.

- On en déduit que  $e^{na} = (e^a)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

### Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(e^x)' = e^x$

On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Propriétés :

- $e^0 = 1$  ;  $e^1 = e$
- Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$

### Preuve :

On sait que  $e^0 = 1$  donc  $e^0 > 0$ .

Raisonnons par l'absurde :

S'il existait un réel  $x$  tel que  $e^x < 0$ , alors le théorème des valeurs intermédiaires (puisque la fonction exponentielle est continue) justifierait l'existence d'un réel  $b$  tel que  $e^b = 0$ .

Or on a vu que pour tout réel  $b$ ,  $e^b \neq 0$ .

Ainsi il n'existe aucun réel  $x$  tel que  $e^x < 0$ . On en déduit que pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .

**Propriété :**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple :  $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$ )

**Preuve :**

On sait que  $(e^x)' = e^x$  et on a vu que  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

*Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.*

**Conséquences :**

Pour tous réels $a$ et $b$	• $a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$
• $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$	• $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
• $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$	• $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

**Propriétés :**

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
--	--

**Preuve : exigible**

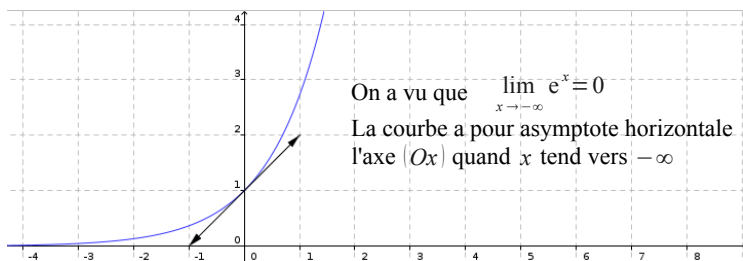
- La fonction exponentielle est strictement croissante, on a donc  $e^1 > e^0$  donc  $e > 1$ .  
On en déduit que la suite  $(e^n)$  est une suite géométrique de raison  $e$  avec  $e > 1$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$   
Soit  $M > 0$ .  
On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ , il existe donc  $n_0$  tel que si  $n > n_0$ ,  $e^n \in ]M; +\infty[$   
Or la fonction exponentielle est croissante. Ainsi, si  $x > n > n_0$  on a  $e^x > e^n > M$  et  $e^x \in ]M; +\infty[$   
Ce résultat est vrai pour tout  $M > 0$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

**Tableau de variations :**

$x$	$-\infty$	$+\infty$
exp	0	$+\infty$

**Représentation graphique :**



**Propriété :**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**Preuve : exigible**

Par définition du nombre dérivé en 0, on peut écrire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$ .

**Propriétés :**

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
--	--

*Au voisinage de l'infini, l'exponentielle de  $x$  l'emporte sur  $x$ .*

**Preuve :**

- En étudiant la fonction  $h : x \mapsto e^x - 1 - x$ , on montre que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq 1 + x$ . On a donc en particulier  $e^x \geq x$ .  
En appliquant cette relation à  $\frac{x}{2}$ , on obtient  $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$   
Puis en élevant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient :  $(e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4}$

Ainsi pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  (d'après les théorèmes de comparaison en l'infini)

- Sachant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , on peut en déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x e^x} = +\infty$   
donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0^+$  et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

#### Propriété :

La fonction exponentielle est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; +\infty[$ .  
C'est-à-dire que pour tout  $k \in ]0; +\infty[$ , l'équation  $e^x = k$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$ . Cette solution est notée  $\ln k$ .

#### Preuve :

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Ainsi, pour tout  $k \in ]0; +\infty[$ , l'équation  $e^x = k$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$ .

$e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que si  $k \leq 0$ , l'équation  $e^x = k$  n'a pas de solution.

### 4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto e^{u(x)}$

#### Propriété :

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .  
La fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ , on a :

$$(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

Immédiat en utilisant, la  
dérivée de  $x \mapsto f(u(x))$

#### Remarque :

En exercices, on étudiera plus particulièrement les fonctions du type  $x \mapsto \exp(-kx)$  et  $x \mapsto \exp(-kx^2)$ .  
Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux domaines.