Limites de fonctions

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x)>10^9$

b) Pour tout réel m , il existe un réel A , tel que si $x>m$, alors $f(x)>A$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x>m$, alors $f(x)>A$

d) $\exists m\in\mathbb{R}$, tel que $x>m \Rightarrow f(x)>10^4$

2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-0{,}001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Ex 2 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … contient $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Ex 3 : ***Conjecturer une limite – piéger la calculatrice***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f:x\longmapsto 10^{-3}x^2-10^2x \quad , \quad g:x\longmapsto \frac{3x^2-2}{10^3x-4} \quad \text{et} \quad h:x\longmapsto 10x^3-0{,}01x^4$$

Ex 4 : ***Limite et position relative par rapport à une droite***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y=1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Limite en *a* (avec *a* réel)

Ex 5 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … contient $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+4$

c) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$

Ex 6 : ***Vrai ou faux***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

1) Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors $d:y=-1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors $d:y=-1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors $d:x=-1$ est asymptote verticale à C.

Ex 7 : ***Conjecturer une limite***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f:x\longmapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f:x\longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ex 8 : ***Asymptotes***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C .

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ c) $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=-\infty$ e) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$

Opérations sur les limites

Ex 9 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

2) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=+\infty$

3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

Ex 10 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+x+\dfrac{1}{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to0+}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+3x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+3x\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim\limits_{x\to9-}\dfrac{4x}{9-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to4+}\left(3x-1+\dfrac{1}{x-4}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to2+}\left(4-x^2+\dfrac{4}{4-x^2}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{1-2x}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to8-}\dfrac{1}{x(x-8)}$

Ex 11 : ***Formes indéterminées***

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)g(x))=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)g(x))=3$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)g(x))=-\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$ telles que :

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$ c) $\dfrac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 12 : ***Logique***

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=0$, il faut que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2) Pour que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=0$, il suffit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Ex 13 : ***Fonctions polynômes***

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme $\mathrm{P}(x)=-8x^3+14x^2+8x+4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

$\mathrm{Q}(x)=\dfrac{x^5}{4}-\dfrac{x^3}{2}$ et $\mathrm{R}(x)=1-4x+5x^2$

Ex 14 : ***Fonctions rationnelles***

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle $f(x)=\dfrac{3x+2}{4x^2-5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

$g(x)=\dfrac{x^3-4x^2-5}{2x^3-5}$ et $h(x)=\dfrac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 15 : ***Changement de forme - Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{4} par $f(x)=\dfrac{6x-25}{2x-8}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\neq 4$, $f(x)=a+\dfrac{b}{2x-8}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Ex 16 : ***Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{-2;2} par $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Ex 17 : ***Déterminer a, b et c ...***

Soit $f:x\longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a, b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2		$+\infty$
f	-1	-4	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a, b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .

2) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f.

Ex 18 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x+2}$

Limite d'une fonction composée

Ex 19 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim\limits_{x\to 3+}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 5+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x^3+2x^2-7}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{3x^2}{x^2-2}}\right)^5$

Ex 20 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x^2+3})$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-\sqrt{x^2+3})$ (factoriser par x)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ (penser à $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$)

Théorèmes de comparaison

Ex 21 : ***Vrai ou faux***

1) Si pour tout réel $x\leqslant 0$, $f(x)\geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) Si pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) Si pour tout réel $x\geqslant 0$, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Ex 22 : ***Limite par encadrement***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x\neq 0$, $3-\dfrac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 3+\dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 23 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2}\geqslant\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{g(x)}{x}\geqslant\dfrac{1}{5}$.

Quelle(s) limite(s) peut-on déduire pour les fonctions f et g ?

Ex 24 : ***Deux méthodes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

1) Déterminer une fonction g telle que pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Retrouver cette limite en utilisant la limite d'une fonction composée.

Ex 25 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

1) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Peut-on grâce aux hypothèses dire si f admet une limite en 0 et si oui laquelle ?

2) Déterminer la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 26 :

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geqslant 5$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leqslant x-5 \leqslant x$)

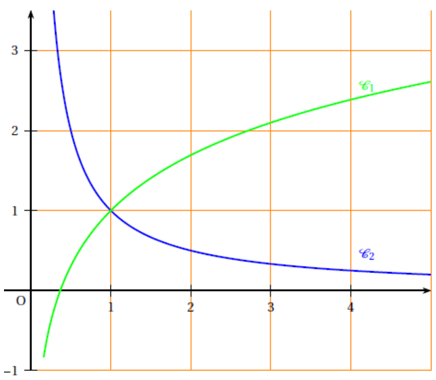
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 27 : *Baccalauréat S Pondichéry 13 avril 2011 – ex 1*

QCM – Asymptote oblique – Interprétation graphique – tableau de signe

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On sait que :

— l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$

— la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

— la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

— la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

   • 0 • $+\infty$ • On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

   • 0 • 0,2 • On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote oblique :

   • Oui • Non • On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x)-f_1(x)$ est :

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	+

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	−

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	+0 −

Ex 28 : *Baccalauréat S Amérique du Sud 13 novembre 2012 – ex 1*

ROC – introduction fonction exp – théorème de comparaisons

1. Restitution organisée de connaissance

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée
- $e^0 = 1$
- Pour tout réel x, on a $e^x > x$
- Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$, où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A\,;+\infty[$, $v(x) \leqslant w(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Ex 29 : *Baccalauréat S Amérique du Sud\ 24 novembre 2015 - ex 1*

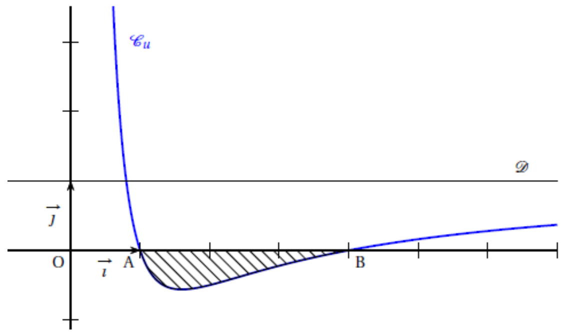
Déterminer une fonction

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$.