

Intégrale d'une fonction continue et positive
Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 1 : Vrai ou faux

- 1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.
- 2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.
- 3) Le résultat de $\int_a^b f(x)dx$ dépend de x .
- 4) Si f est une fonction positive et si $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ peut être strictement négative.

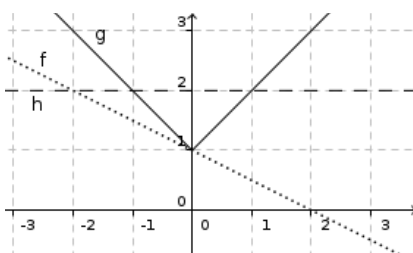
Ex 2 :

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a; b]$, puis calculer son intégrale sur $[a; b]$.

- 1) $f(x) = 3x - 1$ sur $[2; 5]$
- 2) $f(x) = |x - 3|$ sur $[1; 4]$

Ex 3 : À partir d'une représentation graphique

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1; 1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



Ex 4 : Avec une fonction affine par morceaux

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2; 4]$.
- 2) Déterminer $\int_{-2}^4 f(x)dx$

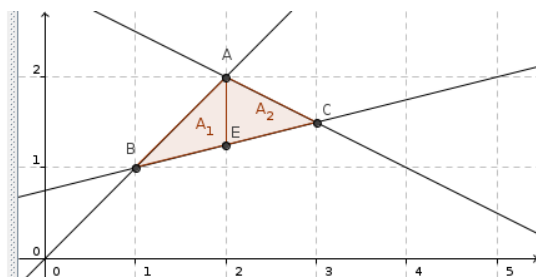
Ex 5 : Avec un demi-cercle

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

- 1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.
- 2) Montrer que C_f est un demi-cercle.
- 3) Déterminer $\int_{-1}^1 f(x)dx$

Ex 6 :

- Objets libres
- $D = (2, 0)$
- $f(x) = x$
- $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x$
- $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
- Objets dépendants



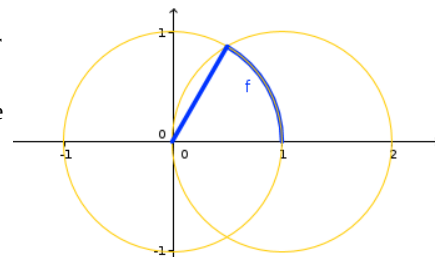
- 1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

- 2) En calculant $\int_1^2 f(x)dx$ et $\int_1^2 h(x)dx$ déterminer l'aire A_1 .

- 3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

Ex 7 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)



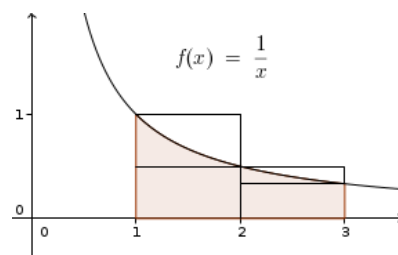
Déterminer $\int_0^1 f(x)dx$

Ex 8 : Algorithme : sommes de Rieman

On considère l'algorithme ci-dessous :

	Traduction en Python
lire a,b,p	a=float(input("a=")) faire tourner le programme
s1 ← 1	b=float(input("b="))
s2 ← 0	p=float(input("p="))
n ← 0	s1=1
tant que (s1-s2)>p faire	s2=0
n ← n+1	n=1
s1 ← 0	while (s1-s2>p):
s2 ← 0	n=n+1
Pour i allant de 0 à n-1	s1=0
s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*b-a)/n	s2=0
s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*b-a)/n	while (s1-s2>p):
Fin pour	n=n+1
Fin tant que	s1=0
Afficher s1,s2	s2=0
	for i in range(0,n):
	s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
	s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
	print(s1)
	print(s2)

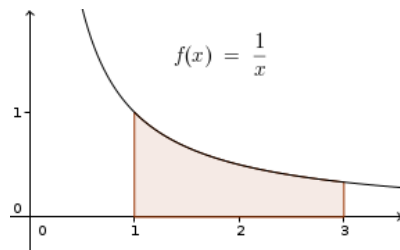
- 1) On choisit $p=0,1$. Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?



À quoi correspond cette aire ?

La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme. Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s_1 et s_2 .

- 2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



- 3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s_1 et s_2 au début de l'algorithme

- 4) Programmer l'algorithme et déterminer ce qu'il renvoie pour $p = 0,001$

Propriétés de l'intégrale

Ex 9 : Encadrer une intégrale

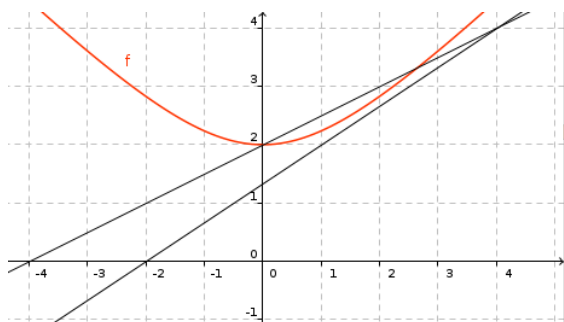
1) Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $1 \leq e^{x^2} \leq e$, puis en déduire un encadrement de $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$

2) Démontrer que pour tout $x \in [0;8]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 3$, puis en déduire un encadrement de $J = \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$.

En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de

$$\int_0^2 f(x) dx$$



Ex 10 : Encadrer une intégrale - Relation de Chasles

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = e^{x^3}$.

On pose $I = \int_{-1}^1 e^{x^3} dx$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$.

En déduire un encadrement de I .

3) Démontrer que :

- $\forall x \in [-1;0]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$
- $\forall x \in [0;1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I .

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 ... et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I ... l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'ex 8 !

Ex 11 : Valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = e^{-x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n; n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n; n+1], e^{-(n+1)} \leq e^{-x} \leq e^{-n}$$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Primitives

Ex 12 : Déterminer les primitives

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + 1$ sur $I =]0; 3[$

2) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

3) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}e^x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 13 : Déterminer une primitive vérifiant une condition

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x) = 3e^x + x^2 + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 0$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 4$

Ex 14 : Primitives de la fonction racine carrée

Démontrer que la fonction F définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* .

Ex 15 : Primitives de fonctions composées

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = x^3(x^4+1)^8$ sur $I = \mathbb{R}$ 5) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $I = \mathbb{R}^+$ 6) $f(x) = \left(x^5 - \frac{1}{6}\right)(x^6 - x)^4$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 5e^{2x-3}$ sur $I = \mathbb{R}$ 7) $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^6}$ sur $I =]\sqrt{2}; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I = \mathbb{R}^+$ 8) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 16 : Un cas compliqué

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

2) En déduire les primitives de f sur \mathbb{R} .

Ex 17 : Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$
- 2) $\int_{-1}^1 x^4(x^5-1)^2 dx$
- 3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}} du$
- 4) $\int_0^1 e^x(e^x+9)^3 dx$

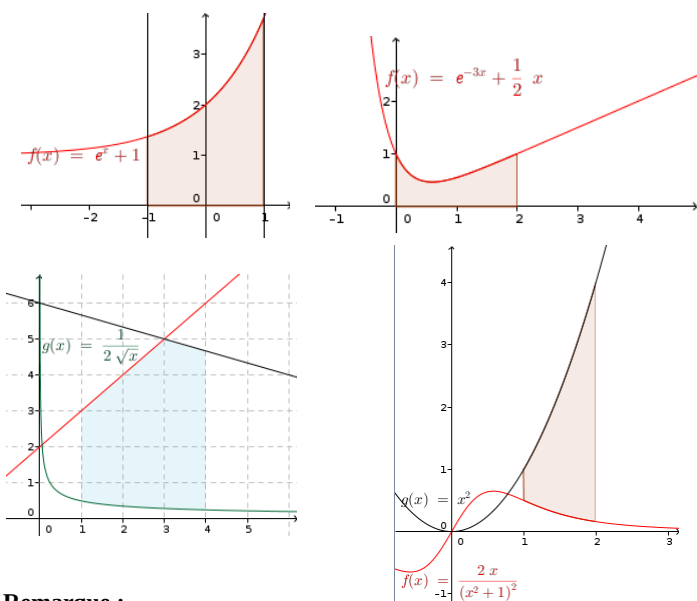
Ex 18 : Décomposition en éléments simples

Soit f la fonction définie sur $I=[0;5]$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$

- 1) Démontrer que f est continue et positive sur $I=[0;5]$.
 - 2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$.
- En déduire $\int_0^5 f(x)dx$

Ex 19 : Calculs d'aires

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :



Remarque :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)-g(x)dx$$

Ex 20 : Interprétation de Xcas

```
1) g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)

( t -> 3 * exp((-3) * t), x -> \int_0^x g(t) dt, -exp(-3 * x) + 1, 1 )
```

Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

- 2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Ex 21 : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(t)=e^{-t^2}$.

Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

- 1) La fonction F est-elle dérivable sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$. (On fera apparaître un taux d'accroissement)

Ex 22 : Une primitive de la fonction ln

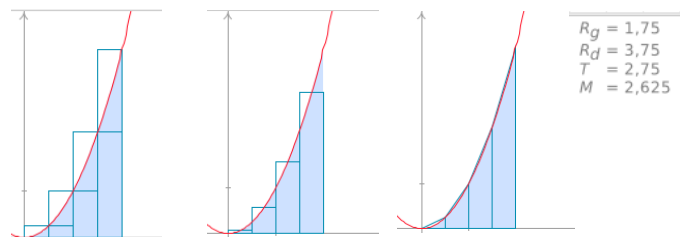
Soit F et G deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par $F(x)=\int_1^x \ln(t)dt$ et $G(x)=x \ln(x)-x$.

- 1) Démontrer que F et G sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* et calculer leur dérivée.
- 2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x > 0$, $F(x)=G(x)+k$.
- 3) Calculer k .
- 4) Calculer $\int_1^e \ln(t)dt$

Ex 23 : Différentes méthodes d'approximation

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2 dx$.

- 1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente et expliquer chacune de ces méthodes.

- 2) Calculer $\int_1^2 x^2 dx$ et comparer avec les approximations obtenues.

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 24 : Vrai ou faux

- 1) Si f est une fonction négative et si $a < b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.
- 2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.
- 3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.
- 4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ est fautive.

En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

3) Établir, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right)$$

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

Sa limite que l'on ne cherchera pas à déterminer, est appelée la constante d'Euler.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 32 : Baccaauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - ex 1

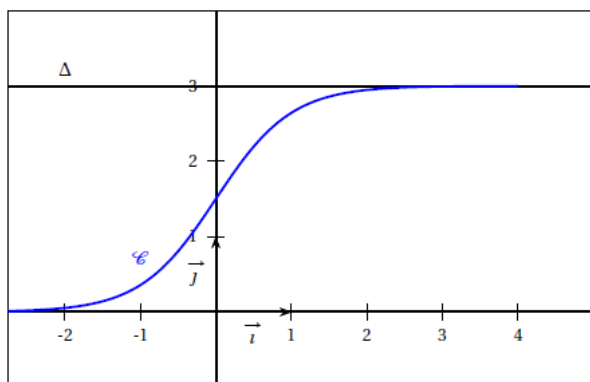
Avec la fonction exp – théorème des bijections – intégrales – domaines – aires

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} . Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

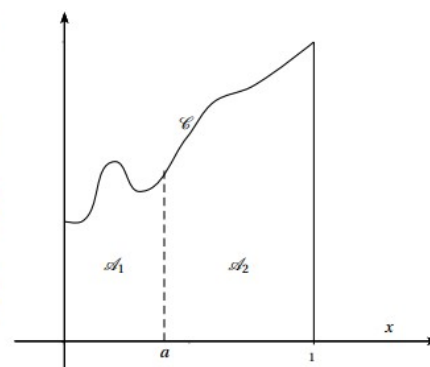
1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbb{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$. Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.
 - b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.
 - c. On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$. Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .

Ex 33 : Baccaauréat S Centre étrangers 10 juin 2016 - ex 2

Intégrales – primitives – suites

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a un réel tel que $0 < a < 1$. On note :

- \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- \mathcal{A}_1 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- \mathcal{A}_2 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f , une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
 - a. f est une fonction constante strictement positive.
 - b. f est définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x$.
2.
 - a. À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 .
 - b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$. La réciproque est-elle vraie?
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
 - a. La fonction f est définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = e^x$. Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
 - b. La fonction f définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Vérifier que la valeur $a = \frac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$.
- Calculer u_1 .
 - Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
 - Prouver que la suite (u_n) est convergente. À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a .
 - On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

Ex 34 : *Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre mai 2015 - ex 1*

Avec la fonction exp – suites d'intégrales – domaines – aires – propriétés de l'intégration

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

- La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et on note f_1' sa dérivée.
 - Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
 - Étudier les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
 - Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
 - Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
- En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$.
En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B : Étude de la suite (I_n)

- Soit n un entier naturel non nul.
 - Interpréter graphiquement la quantité I_n .
 - Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) . Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

- En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

- Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .
- Soit n un entier naturel non nul.
 - Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

- En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.

Ex 35 : *Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - ex 1*

Avec la fonction ln – domaines – aires – théorème des bijections

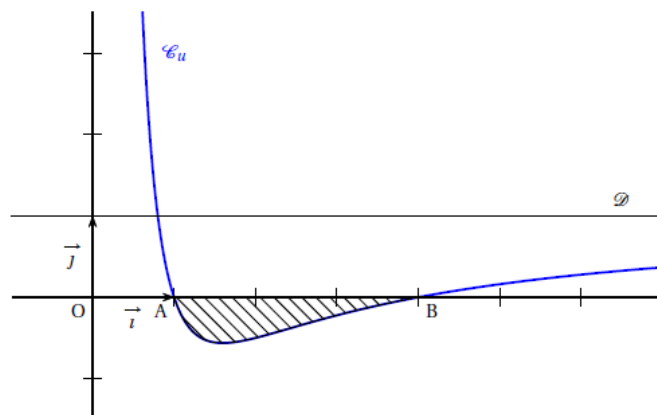
Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par \mathcal{C}_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe \mathcal{C}_u et la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe \mathcal{C}_u passe par les points $A(1; 0)$ et $B(4; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite \mathcal{D} sont asymptotes à la courbe \mathcal{C}_u .

- Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
- Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a .
- En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}.$$

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

- Déterminer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A.
- Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note \mathcal{A}_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.