

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

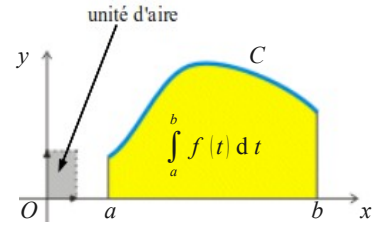
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t) dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)dt$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".

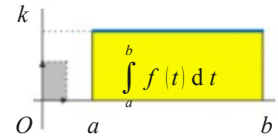
On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .
Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2 .

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a; b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t) dt = 0$.
- Pour $k > 0$, $\int_a^b k dt = k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

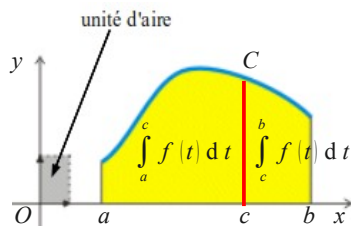


B) RELATION DE CHASLES

Propriété : admise

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés : admise

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

D.) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$:

- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \leq b$ on peut intégrer l'inégalité $f \leq g$ sur $[a; b]$.

Preuve : preuve de la deuxième propriété.

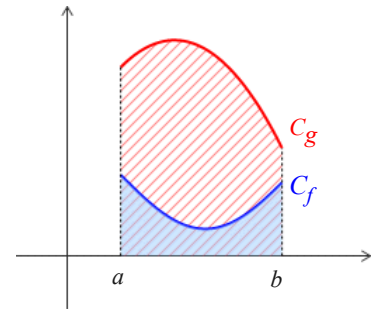
Pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$

$a \leq b$, la propriété précédente permet donc d'affirmer que $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$

Ainsi $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :



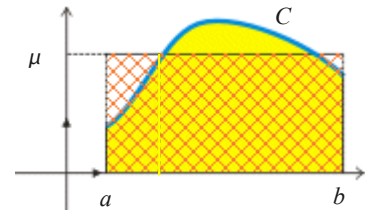
E.) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b .

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t) dt$.



2.) PRIMITIVES

A.) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

B.) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.

Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
Donc G est une primitive de f sur I .

- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.

La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

Soit f une fonction admettant des primitives sur I .

Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

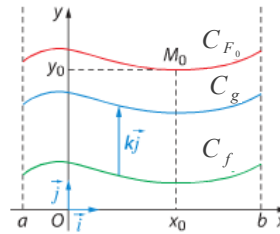
Preuve :

$$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$$

Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k \vec{j}$ ($k \in \mathbb{R}$).
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

On retiendra le tableau suivant :

Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I , on a :

Une fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	$e^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où $k \in \mathbb{R}$

D) ÉTUDE DE $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .
Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Preuve : *idée de preuve (Cas où f est croissante) exigible*

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans $[a; b]$ par $T(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$

Si $h > 0$, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 et $x_0 + h$.

(Si $h < 0$, on raisonne de même avec $F(x_0) - F(x_0 + h)$)

Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$

On a alors :

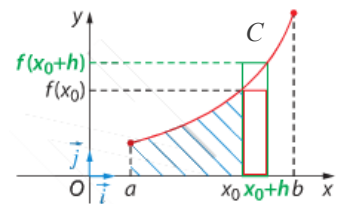
$$h f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h f(x_0 + h) \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0 , on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f(x_0)$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.



Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I .

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve :

On a vu que $x \mapsto H(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Soit F une primitive de f sur I , on a donc : $F(x) = H(x) + k = \int_a^x f(t) dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donc $F(a) = \int_a^a f(t) dt + k = 0 + k = k$ et $F(b) = \int_a^b f(t) dt + k$

Ainsi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + k - k = \int_a^b f(t) dt$

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

E.) THÉORÈME FONDAMENTAL

Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve : *idée de preuve (Cas d'un intervalle fermé en admettant que f a un minimum) exigible*

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ et que f admet un minimum m sur $[a; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a; b]$.

On définit alors la fonction F sur $[a; b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$

F est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout $x \in [a; b]$: $F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a; b]$.

3.) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t) dt$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$