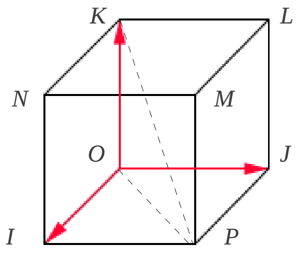
PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

1) REPÈRES ORTHONORMÉS DE L'ESPACE

Définition :

Un repère (O, I, J, K), noté aussi $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de l'espace est dit orthonormé lorsque les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires **et** que $OI = OJ = OK = 1$.

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fournit un modèle de repère orthonormé de l'espace.



Remarque :
Lorsque le repère $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point O et contenu dans le plan défini par les deux autres axes.

Par exemple, la droite (OK) est perpendiculaire à toute droite du plan (OIJ) passant par O.

Propriétés :

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$,

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :

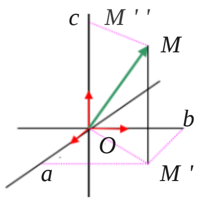
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

C'est une extension des propriétés vues dans le plan

Preuve :

- On note M le point tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

Les coordonnées de $\vec{OM}$ sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\|\vec{u}\|^2 = OM^2$



Puisque le repère est orthonormal, le triangle $OM'M$ est rectangle en M'.
Donc $OM'^2 = a^2 + b^2$ et $M'M^2 = OM''^2 = c^2$
On en déduit, d'après le théorème de Pythagore que :

$$\|\vec{u}\|^2 = OM^2 = OM'^2 + OM''^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

- $AB = \|\vec{AB}\|$ ...

Exemple :

Dans le cube ci-dessus , on a $P(1 ; 1 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 1)$.
On en déduit que $PK = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$

2) PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

A) DÉFINITION

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.
Les démonstrations dans le plan et dans l'espace étant souvent très similaires et la plupart des résultats ayant été vus en classe de Première, ils sont rappelés et étendus à l'espace sans démonstration.

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . **Le produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarque :
Pour tout vecteur de l'espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :

$$\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$$

B) EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque . On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Preuve :
Immédiat en utilisant la définition

C) AUTRES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

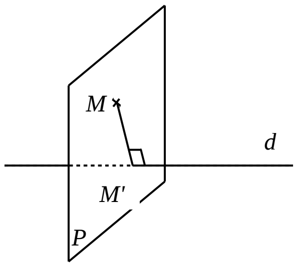
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires, c'est à dire qu'il existe A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan P contenant A, B et C . La définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan P. On en déduit que les expressions du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace.

Propriété : *PRODUIT SCALAIRE ET COSINUS*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

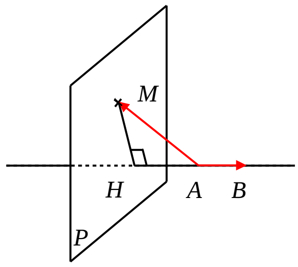
Remarques :
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$



Définition :

Soit d une droite de l'espace . **La projection orthogonale sur la droite *d*** est l'application qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M.
M' est appelé projeté orthogonal de M sur d.

Remarques :
- Si M appartient à la droite d , M est invariant par la projection orthogonale sur d.
- Si M n'appartient pas à la droite d , la droite d est orthogonale à la droite (MM') qui est incluse dans le plan P.
- MM' est **la distance** de M à la droite d.



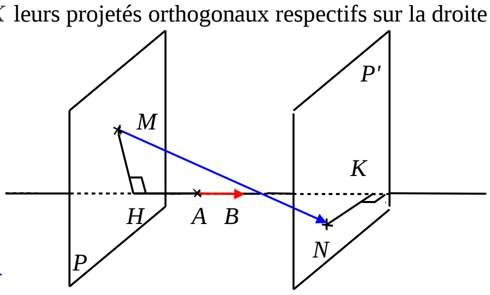
Propriété : *PRODUIT SCALAIRE ET PROJECTION*

Soit A, B et M trois points de l'espace tels que A et B sont distincts.
Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), alors on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

Remarques :
- Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\overrightarrow{AM}$ par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB).
- Si M et N sont des points de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB) , alors on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$$



D) RÈGLES DE CALCUL

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, on a :
- **Symétrie:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Linéarité:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
  $(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ***et*** $\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v}) = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Preuve :
Immédiat en munissant l'espace d'un repère orthonormé.

Remarque :
Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers …)

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3) ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A) DROITES ORTHOGONALES – VECTEURS ORTHOGONAUX

Définition :

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note : $d \perp d'$
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits orthogonaux. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Remarques :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de d et d', alors : $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- L'adjectif "perpendiculaire" ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires) .
  Dans la suite du chapitre, on parlera, pour simplifier, de droites orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . On a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Conséquences de la définition :

Propriétés :

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

ATTENTION :

Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace.
Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

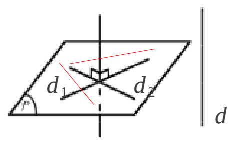
B) DROITE ORTHOGONALE À UN PLAN – VECTEUR NORMAL À UN PLAN

Définition et propriété :

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

On note : $d \perp P$

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



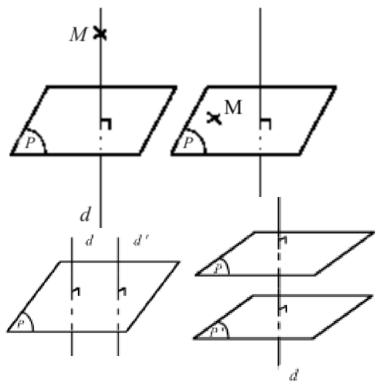
Preuve : *exigible « Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. »*

Soit une droite d orthogonale à un plan P ; elle est donc orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.
Soit $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{u}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1, d_2 et d.
On a $d_1 \perp d \Rightarrow \vec{v_1} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{u} = 0$
Et $d_2 \perp d \Rightarrow \vec{v_2} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v_2} \cdot \vec{u} = 0$
Soit Δ une droite du plan P dirigée par un vecteur directeur $\vec{w}$.
d_1 et d_2 étant sécantes, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont deux vecteurs directeurs de P.
Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2}$.
On a alors $\vec{w} \cdot \vec{u} = a\,\vec{v_1} \cdot \vec{u} + b\,\vec{v_2} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui prouve que $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et donc que d et Δ sont orthogonaux.

Quelques propriétés :

- Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.



Remarques :

- En fait, il faut retenir que la relation d'orthogonalité ne lie pas seulement une droite et un plan, mais une famille de plans tous parallèles entre eux à une famille de droites toutes parallèles entre elles.
- Pour monter qu'une droite d est orthogonale à un plan P, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de d est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de P.
- Un plan P est perpendiculaire à un plan Q (Q $\perp$ P), s'il existe une droite de P orthogonale à Q.

Définition :

Un vecteur normal à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale au plan P.

Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan P, alors ils sont colinéaires.

Remarque : Deux plans de vecteurs normaux orthogonaux sont perpendiculaires.

4) ÉQUATIONS DE PLANS

Propriété :

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Propriété :

Dans un repère orthonormal :

- Tout plan admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à P.
- **Réciproquement :**

Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.

L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Si a, b et c sont nuls simultanément, deux cas se présentent :

- $d = 0$, et alors la relation $ax + by + cz + d = 0$ est toujours vérifiée

- $d \neq 0$, et alors la relation $ax + by + cz + d = 0$ n'est jamais vérifiée

Preuve : *exigible*

- Soit P un plan, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de P.

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de l'espace.

On a $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, on obtient :

$$M \in P \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

- **Réciproquement :**

Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.

On considère l'ensemble E des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ et on note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On considère, par exemple, que $a \neq 0$. Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\,;\,0\,;\,0\right)$ est un point de E.

Pour tout point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace, on a $\overrightarrow{AM}\left(x + \dfrac{d}{a}\,;\,y\,;\,z\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + cz + d$

L'ensemble E est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est à dire la plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan, alors $k(ax + by + cz + d) = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, est aussi une équation de ce plan.

Les équations $x - y + z - 4 = 0$ et $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} - 1 = 0$ sont deux équations du même plan.

- Si $d \neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère.

On peut alors toujours choisir une équation de la forme $a'x + b'y + c'z + 1 = 0$

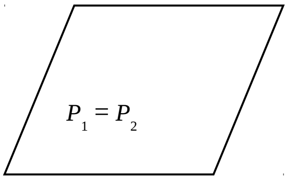
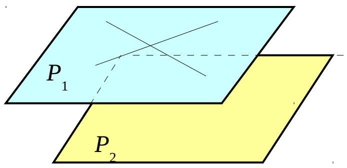
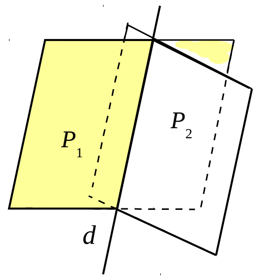
- Lorsque P est un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées, il admet comme vecteur normal l'un des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, et on a alors :
  - tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation du type $z = k$
  - tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation du type $x = k$
  - tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation du type $y = k$

5) POSITIONS RELATIVES, ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

A) POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

Soit P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0$ et $a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
On peut savoir à priori si les deux plans sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non.
En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations.
Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite d, intersection de P_1 et P_2.

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système $(S):\begin{cases}a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0\\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0\end{cases}$

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus 	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires Les suites $(a_1\,,b_1\,,c_1)$ et $(a_2\,,b_2\,,c_2)$ sont proportionnelles		$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires Les suites $(a_1\,,b_1\,,c_1)$ et $(a_2\,,b_2\,,c_2)$ ne sont pas proportionnelles
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ solution de l'une des deux équations	(S) n'admet aucune solution	(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ coordonnées des points de d

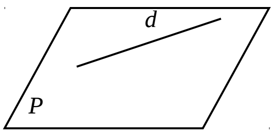
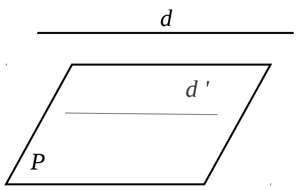
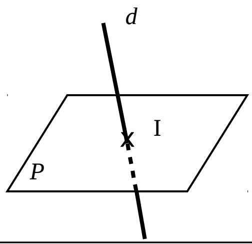
Remarques :
- On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de la droite d.
- La démarche géométrique permet de prévoir à priori le nombre de solutions.

B) POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$.
On peut savoir à priori si d est sécante ou parallèle à P suivant que $\vec{n}$ est orthogonal ou non à $\vec{u}$.

En particulier, si d coupe P, leur point d'intersection I a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ solution du système $(S):\begin{cases}x=x_A+t\,\lambda\\ y=y_A+t\,\beta\\ z=z_A+t\,\gamma\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de d et P et indique l'ensemble des solutions du système (S) .

d et P sont parallèles		d et P sont sécants
 d est contenue dans P	 d est strictement parallèle à P	
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux		$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ coordonnées des points de d	(S) n'admet aucune solution	(S) a une unique solution : $(x_I\,;\,y_I\,;\,z_I)$ coordonnées de I

Remarque :
Si d est définie comme l'intersection de deux plans P_1 et P_2, la recherche de l'intersection de d et P peut se ramener à celle des trois plans P_1 , P_2 et P