

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère la proposition $P(n)$ dépendant d'un entier n : « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 »
(On rappelle qu'un nombre est multiple de 11 lorsqu'il s'écrit sous la forme $11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$)
Vérifions que cette proposition est vraie pour les entiers $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\text{Pour } n = 0 : \quad 10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \times 0$$

$$\text{Pour } n = 1 : \quad 10^1 - (-1)^1 = 10 - (-1) = 10 + 1 = 11 = 11 \times 1$$

$$\text{Pour } n = 2 : \quad 10^2 - (-1)^2 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9$$

$$\text{Pour } n = 3 : \quad 10^3 - (-1)^3 = 1\,000 - (-1) = 1\,000 + 1 = 1\,001 = 11 \times 91$$

$$\text{Pour } n = 4 : \quad 10^4 - (-1)^4 = 10\,000 - 1 = 9999 = 11 \times 909$$

On pourrait continuer ainsi les vérifications, mais quel que soit le nombre de vérifications effectuées, on ne peut pas affirmer que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n .

Pour justifier que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n , démontrons le résultat suivant :
Si la proposition est vraie pour le rang n , alors elle est vraie pour le rang suivant $n + 1$.

Pour cela, supposons que la proposition est vraie pour un rang n (n étant un entier naturel fixé).
Alors pour cet entier naturel n , on a :

$$10^n - (-1)^n \text{ est un multiple de } 11 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 10^n - (-1)^n = 11 \times k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

On veut alors démontrer que la proposition est vraie pour $n + 1$ c'est-à-dire que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$, $k' \in \mathbb{Z}$

Puisque $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire :

$$10^n = 11 \times k + (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 10^n = 10 [11 \times k + (-1)^n]$$

$$\Leftrightarrow 10^{n+1} = 110 \times k + 10 \times (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + 10 \times (-1)^n - (-1)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + (-1)^n [10 - (-1)^1]$$

$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + (-1)^n [10 + 1]$$

$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 [10k + (-1)^n]$$

k étant un entier, le nombre $k' = 10k + (-1)^n$ est aussi un entier.

On a donc démontré que : $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$, $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc démontré le caractère **héréditaire** de la proposition :

Si la proposition est vraie pour un entier n , alors elle est vraie pour l'entier suivant $n + 1$.

On peut alors observer que : puisqu'elle est vraie pour 0, elle est vraie pour 1, puisqu'elle est vraie pour 1, elle est vraie pour 2
Il apparaît alors "clairement" que la proposition est vraie pour tous les entiers n de \mathbb{N} .

En assimilant l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels à une échelle sur laquelle on voudrait monter, le principe du raisonnement qui vient d'être fait est le suivant :

- si on sait monter sur le premier barreau de l'échelle
- et si l'on sait passer d'un barreau au barreau suivant,
- alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle.

Le type de raisonnement ainsi effectué est appelé **raisonnement par récurrence**. Il est basé sur la propriété suivante :

2) PROPRIÉTÉ

Propriété :

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**)

et si pour tout entier $n \geq n_0$: $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ (**hérédité**)

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Remarque :

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait **un axiome** des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.

En géométrie un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : "Par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée".

3) DANS LA PRATIQUE

Démontrons par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , on a $2^n \geq n + 1$

Soit $P(n)$ la proposition : « 2^n est supérieur ou égal à $n + 1$ »

Initialisation :

pour $n = 0$, on a :

$2^n = 2^0 = 1$ et $n + 1 = 0 + 1 = 1$, donc la proposition $P(0)$ est vraie.

On pourrait vérifier sans difficulté la proposition $P(n)$ pour $n = 1, 2, 3...$ cela peut être utile pour la compréhension, mais c'est sans utilité pour le raisonnement.

Hérédité :

Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n .

On a donc : $2^n \geq n + 1$

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$

On a :

$$2^n \geq n + 1 \Leftrightarrow 2 \times 2^n \geq 2 \times (n + 1) \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2 \Leftrightarrow 2^{n+1} - (n + 2) \geq 2n + 2 - (n + 2) \Leftrightarrow 2^{n+1} - (n + 2) \geq n$$

Or n est un entier naturel donc positif ou nul, on a donc :

$$2^{n+1} - (n + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$$

La proposition $P(n + 1)$ est alors vérifiée.

Conclusion :

On a donc démontré par récurrence que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

c'est-à-dire que : $2^n \geq n + 1$ pour tout n de \mathbb{N}

L'hypothèse " $P(n)$ est vraie" s'appelle
l'hypothèse de récurrence.