Calculatrice :
Générer les termes d'une suite +
Déterminer un seuil

Prépa bac : suites (généralités)

Pondichéry avril 2017 ex 4

Tableur, calculatrice, seuil, récurrence, gendarmes

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Amérique nord juin 2017 ex 3

Algo, comparaison en l'infini

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur …
	s prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$. **b.** En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Antille-Guyanne juin 2017 ex 4

Termes de suites solutions d'équations

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; \mathrm{e}]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).
   a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
   b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
   Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
   c. En déduire que la suite (α_n) converge.
   Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

   a. On admet que la suite (β_n) est croissante.
   Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

   b. En déduire la limite de la suite (β_n).

Amérique du sud nov 2017 ex 5
Avec des %, algo, seuil, récurrence, g(L)=L

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1\,u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   a. Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

   e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher ....

   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Nlle Calédonie nov 2017 ex 5

un+2=f(un+1,un), suites annexes , tableurs, récurrence, suites géométriques

Exercice 5 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite constante.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
2. **a.** En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Nlle Calédonie fév 2018 ex 3
Vrai/faux, suite géométrique, somme termes consécutifs suites arithmétique, convergence

Exercice 3 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{cases}$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.

Affirmation B : Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

2. Soit une suite (v_n).

Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

alors la suite (v_n) converge.

3. **Affirmation D :** Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

4. Soit (w_n) une suite convergente.

Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.