LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

1) LOI UNIFORME DISCRÈTE

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

On dit que X suit **la loi uniforme** sur $\{1;2;3;\ldots;n\}$ si pour tout $k\in\{1;2;3;\ldots;n\}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{1}{n}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

L'espérance mathématique de X vaut $\mathrm{E}(X)=\frac{n+1}{2}$

Preuve :

On a : $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+3\times\frac{1}{n}+\ldots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$

Or on sait que : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

On en déduit que :

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}$$

2) LOI BINOMIALE

A) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n\in\mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Remarque : Lors de tirages successifs avec remise, les expériences sont indépendantes.

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

B) SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition :

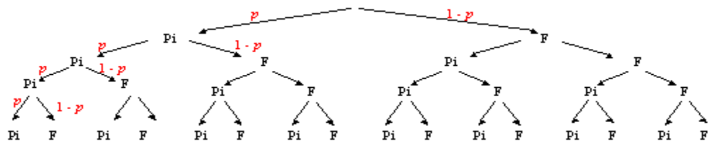
On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve ayant deux éventualités :

l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.

L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

- L'espérance vaut p
- La variance vaut $p(1-p)$
- L'écart type vaut $\sqrt{p(1-p)}$

Exemple :



On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".

Notons $P(Pi)=p$ et $P(F)=1-p$
(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi)=\frac{1}{2}$ et $P(F)=\frac{1}{2}$).

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)$ est $p\times p\times(1-p)\times p=p^3(1-p)$

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

$\{(Pi\,;Pi\,;Pi\,;F)\,;(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)\,;(Pi\,;F\,;Pi\,;Pi)\,;(F\,;Pi\,;Pi\,;Pi)\}$

Elle est égale à $4\times p^3(1-p)$

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et on a justifié que $P(X=3)=4\times p^3(1-p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$p^0(1-p)^4$	$4\ p^1(1-p)^3$	$6\ p^2(1-p)^2$	$4\times p^3(1-p)$	$p^4(1-p)^0$

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque :
On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succés)

C) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant k ($k\in\mathbb{N}$ et $k\leqslant 4$) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

Définition :

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k\in\mathbb{N}$ et $k\leqslant n$) pour n répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$.
On l'appelle **coefficient binomial** . $\binom{n}{k}$ Se lit " k parmi n ".

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n, et pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- De plus, si $n\geqslant 1$ et $1\leqslant k\leqslant n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

D) TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal** .

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	**1**						
1	**1**	**1**					
2	**1**	**2**	**1**				
3	**1**	**3 +**	**3 =**	**1**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**		
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leqslant n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n}=1$
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0}=1$
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

« Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

E) LOI BINOMIALE

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

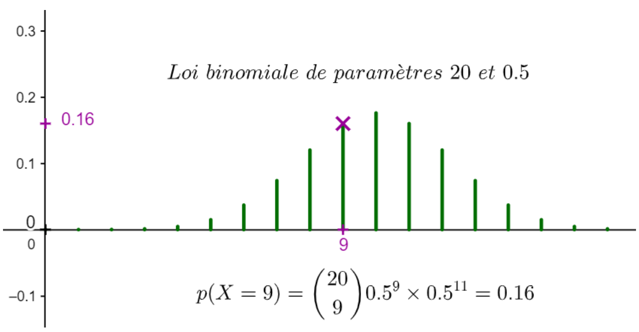
Définition :

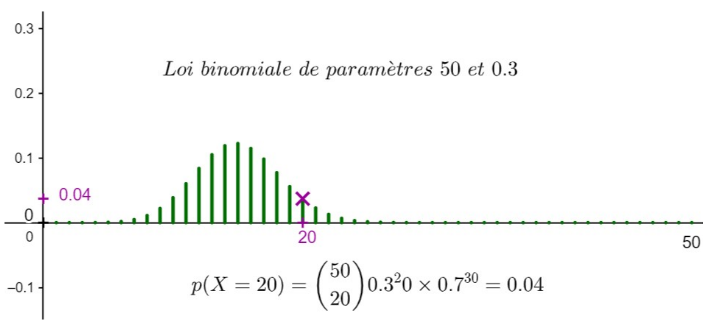
On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Cette loi est parfois notée $B(n ; p)$

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probas_discretes/Loi_binomiale.html





Propriété :

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X)=np$ et pour variance $V(X)=np(1-p)$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

3) LOI GÉOMÉTRIQUE

Définition et propriété :

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$.

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès.
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

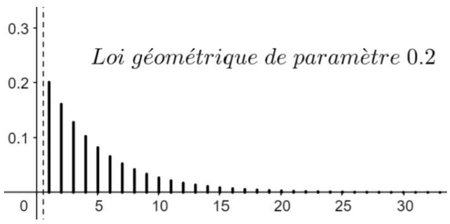
Cette loi est parfois notée $G(p)$

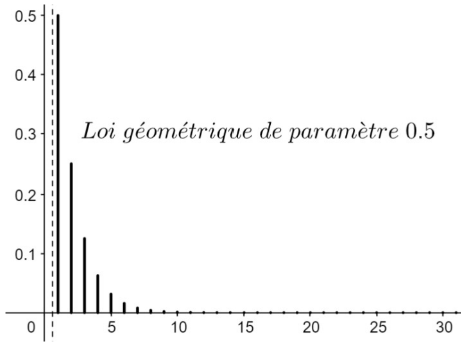
Pour tout entier $k\neq 0$, $P(X=k)=p\times(1-p)^{k-1}$

Preuve :

On répète l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir le premier succès.
Avant le premier succès, il y a bien sûr $k-1$ échecs .
Comme les répétitions sont indépendantes, on effectue le produit des probabilités des $k-1$ échecs et du succès.

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probas_discretes/loi_geometrique.html





Propriété : Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

Pour tous entiers naturels k et m non nuls, on a :

$$P_{X>k}(X>k+m)=P(X>m)$$

Remarque :

On dit que X est sans mémoire, ce qui signifie que la probabilité que X prenne des valeurs supérieures à $k+m$ sachant que X est supérieure à k ne dépend pas de k , mais seulement de m .

Propriété :

La loi géométrique de paramètre p a pour espérance mathématique $E(X)=\frac{1}{p}$ et pour variance $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{1-p}}{p}$