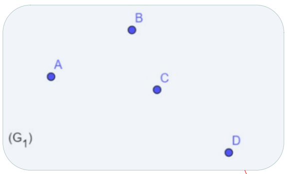
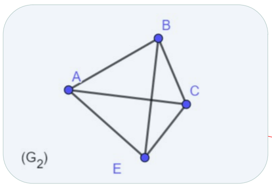
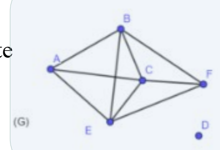
Graphes non-orientés :

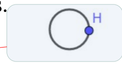






- L'ordre du graphe est 6
- Le sommet D est isolé.
- Le degré du sommet A est 3
- Le graphe est simple.

- Un **graphe non-orienté** G est un ensemble de sommets reliés par des arrêtes.
- Les points A ; B ; C ; D ; E et F sont **les sommets** du graphe.
- **L'ordre** d'un graphe est le nombre total de sommets.
- Les segments reliant deux sommets sont **des arêtes**.
- Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
- Une arête reliant deux sommets est dite **incidente** à ces deux sommets.



- Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui-même.
- **Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. (Une boucle compte double)
- Un sommet est **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet.
- Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- **Un sous graphe** (G') de (G) est un graphe composé de certains sommets et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_1) de (G) est **stable** lorsqu'il ne contient aucune arête.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_2) de (G) est **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents.

Propriété :

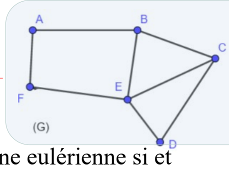
- <u>**La somme S des degrés**</u> des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes a du graphe
- Dans un graphe simple non-orienté l<u>**e nombre de sommets de degré impair**</u> est pair.

Parcourir un graphe non-orienté :

- **Une chaîne** d'un graphe est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.
- **La longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- **Une chaîne est fermée** lorsque son origine et son extrémité sont confondues.
- **Un cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
- Un graphe est **connexe** si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.
- **La distance** entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes qui les relient.
- **Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance entre deux sommets.

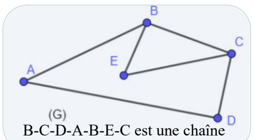
Chaîne eulérienne :

- Une chaîne est **eulérienne** lorsqu'elle contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- **Un cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.



- La chaîne B-A-F-E-B-C-E-D-C est une chaîne eulérienne.
- Ce graphe ne contient pas de cycle eulérien.

Théorème d'Euler :



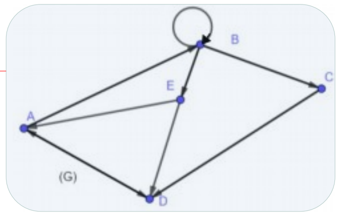
B-C-D-A-B-E-C est une chaîne eulérienne.

Dans la cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si<u>**le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2**</u>.

- Pour qu'un graphe connexe (G) admette <u>**un cycle eulérien**</u>, il faut et il suffit que tous les sommets de (G) soient de <u>**degré pair**</u>.
- Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, alors ce sont <u>**les extrémités de la chaîne eulérienne**</u>.
- Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Graphes orientés :

- **Un graphe orienté** est un graphe dont les arêtes (ou **arcs**) sont orientées.
- Le sommet A et le sommet B d'une arête orientée reliant A à B s'appellent respectivement **l'origine** et **l'extrémité** de l'arête orientée A – B.
- On parle de **degré entrant** pour indiquer le nombre d'arcs se dirigeant vers le sommet et de **degré sortant** pour indiquer le nombre d'arcs partant du somme
- **Une chaîne orientée** d'un graphe orienté est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit relié au suivant par l'arête orientée dont il est l'origine.

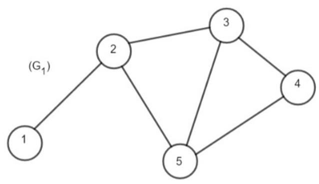


Matrice d'adjacence :

On numérote les sommets d'un graphe orienté (G) d'ordre n .
La matrice carrée associée au graphe (G) (orienté ou non) est la matrice à n lignes et à n colonnes où le terme a_{ij} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i à j .
Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe.

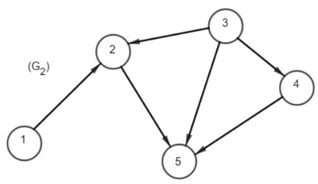
Exemple :

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est symétrique



La matrice d'adjacence de (G_1) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

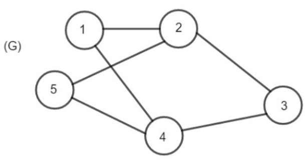
La matrice d'adjacence de (G_2) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Nombre de chaînes de longueur k :

Soit M la matrice d'ordre n associée à un graphe (G) et un entier naturel non nul k .
Le terme de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j .

Exemple :



$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe 6 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 3.