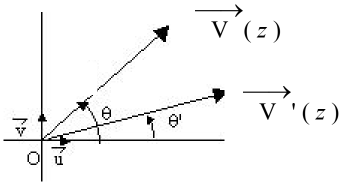
APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES EN GEOMETRIE

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

1) UTILISATION DE L'AFFIXE D'UN VECTEUR : DISTANCES ET ANGLES

Rappel : La notion de distance correspond au module, la notion d'angle à l'argument.



Propriétés

Soit $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z'.
Si z et z' ont pour formes trigonométriques $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors :

$(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$ $\qquad (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$

Preuve :

Si $\overrightarrow{V}$ a pour affixe z, on sait que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM}$ avec M le point d'affixe z.

D'autre part on a par définition $\arg z = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$

Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$

Et $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = (\overrightarrow{V}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{V'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{V'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$

Propriétés

Soit A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que A ≠ B et C ≠ D.

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$
- $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$

Preuve :

- On a vu précédemment que $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \arg z \quad [2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$.

On en déduit donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \ [2\pi]$

- $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$

- On a vu précédemment que $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{V'}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$.

Propriétés

Soit A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que A ≠ B et C ≠ D.

Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$
- $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur

Preuve :

- L'équivalence des quatre premières propriétés est immédiate.
- Les nombres complexes imaginaires purs (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$ (modulo 2π),

  c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$ (modulo π)

Propriétés

Soit A, B et C des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, et z_C.

Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

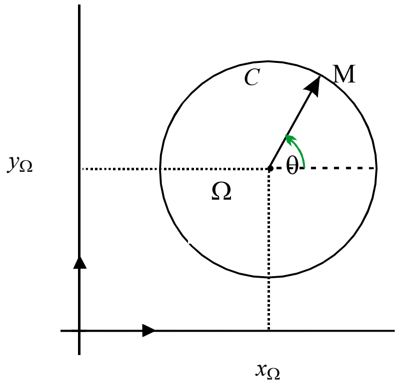
- A, B et C sont alignés
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
- $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$

Preuve :

- L'équivalence des trois premières propriétés est immédiate.
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ayant pour affixe $z_C - z_A$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour affixe $z_B - z_A$, on obtient :

  $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $z_C - z_A = k\,(z_B - z_A)$, $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- Les nombres réels (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument 0 ou π (modulo 2π), c'est-à-dire 0 (modulo π).

2) CARACTERISATION D'ENSEMBLES DE POINTS



Propriété

Soit C le cercle de rayon r et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = x_\Omega + i\,y_\Omega$ où x_Ω et y_Ω sont des réels . Soit M un point d'affixe $z = x + i\,y$ où x et y sont des réels.

$$\begin{aligned} M \in C \quad &\Leftrightarrow \quad |z - z_\Omega| = r \\ &\Leftrightarrow \quad z = z_\Omega + r\,e^{i\theta} \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_\Omega + r\cos\theta \\ y = y_\Omega + r\sin\theta \end{cases} \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Preuve :

Par définition $M \in C \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = r$

On sait qu'un nombre complexe de module r ($r \neq 0$) s'écrit sous la forme exponentielle $r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
On peut donc écrire :

$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow z - z_\Omega = r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z = z_\Omega + r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$M \in C \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow z = z_\Omega + r\,e^{i\theta} \ (\text{où } \theta \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_\Omega + r\cos\theta \\ y = y_\Omega + r\sin\theta \end{cases} (\text{où } \theta \in \mathbb{R})$$

Propriété

Soit A et B les points d'affixes z_A et z_B .
L'ensemble Δ des points M d'affixes z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment [AB].

Preuve :

$|z - z_A| = MA$ et $|z - z_B| = MB$ ...

3) ECRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION

Propriétés

- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ où b est un nombre complexe fixé, est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe b.
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = k\,(z - \omega)$ où k est un nombre réel non nul fixé et ω un nombre complexe fixé, est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k.
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = e^{i\alpha}\,(z - \omega)$ où α est un nombre réel fixé et ω un nombre complexe fixé, est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α.

Preuve :

- Si le point M' a pour affixe $z' = z + b$, alors $z' - z = b$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$
- Si le point M' a pour affixe z' avec $z' - \omega = k\,(z - \omega)$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$
- Soit M' le point d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}\,(z - \omega)$

  - si $z \neq \omega$, on a bien sûr $z' \neq \omega$. On a alors $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$.

  D'où $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \ [2\pi]$

  On en déduit que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \ [2\pi]$, c'est-à-dire $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \ [2\pi]$.

  - si $z = \omega$, alors $z' = \omega$. Ω est donc invariant par cette application.
  L'application est donc la rotation de centre Ω et d'angle α.

Remarque :

- L'expression de z' en fonction de z est appelée écriture complexe de l'application.