# COMBINAISONS, BINOME DE NEWTON

## 1 ) P–LISTES ET ARRANGEMENTS

Soit E un ensemble fini ayant $n$ éléments et $p$ un entier supérieur ou égal à 1 .

**Définition et propriété**

| |
|---|
| On appelle ***p*-liste** d'éléments de E, toute suite finie ( $x_1$ , $x_2$ , … , $x_p$ ) de $p$ éléments pris dans E . <br><br> Le nombre de $p$-listes d'un ensemble E ayant $n$ éléments est $n^p$ . |

- *Une p-liste est toujours ordonnée.*
- *Les éléments $x_1$ , $x_2$ , … , $x_p$ ne sont pas nécessairement distincts les uns des autres.*
- *On parle de suites … on utilise donc des parenthèses*

**Exemple :** On lance un dé à 6 faces trois fois de suite .
Le résultat de l'épreuve est une 3 – liste d'éléments de l'ensemble E défini par E = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

Par exemple la liste ( 1 ; 5 ; 4 ) indique que le premier lancé a donné 1 , le deuxième lancé a donné 5 …
Les listes ( 1 ; 5 ; 4 ) et ( 1 ; 4 ; 5 ) sont différentes.
Le nombre de 3 – listes est $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$
Ainsi le nombre de résultats possibles est 216 . ( on peut faire un arbre … )

**Remarques :**
- Une liste à deux éléments de E s'appelle un couple d'éléments de E .
- Une liste à trois ( quatre, cinq … ) éléments s'appelle un triplet ( quadruplet, quintuplet … )
- Plus généralement, une $p$-liste est aussi appelé un $p$-uplet.

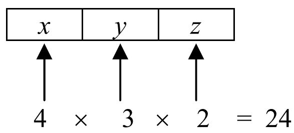
**Définition**

| |
|---|
| Un **arrangement** de $p$ ( avec $p \le n$ ) éléments de E est une $p$ – liste d'éléments de E deux à deux distincts . |

**Remarques :**
- Il n'est pas possible de prendre plus de $n$ éléments distincts dans un ensemble à $n$ éléments … donc $p \le n$ .
- Un arrangement est toujours ordonné, sans répétition possible.

**Exemple :**
On dispose de quatre cartons . Sur chacun d'eux, on écrit une lettre différente du mot « MATH » et on place les cartons dans une urne.
On tire **successivement et sans remise** trois cartons dans l'urne.
Le résultat de l'épreuve est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble $\Omega$ , défini par $\Omega$ = { M , A , T , H }
Par exemple l'arrangement ( T , A , M ) indique que la première lettre tirée est T, la deuxième A et la troisième M .

Pour former un arrangement à 3 éléments de l'ensemble $\Omega$ , on a :
- 4 choix, pour le premier élément
- 3 choix, pour le deuxième élément ( on retire le premier carton )
- 2 choix, pour le troisième élément ( on retire les deux premiers cartons )




On obtient donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ arrangements possibles . Ce nombre est noté $A_4^3$

**Propriété**

| | |
|---|---|
| **Le nombre d'arrangements** de $p$ éléments ( $1 \le p \le n$ ) d'un ensemble à $n$ éléments se note $\mathbf{A_n^p}$ . | |
| Si $p = 1$ , alors $A_n^1 = n$ | Si $1 < p \le n$ , alors $A_n^p = n\,\underbrace{(n-1)\ldots(n-p+1)}_{(p \text{ facteurs})}$ |

## 2 ) PERMUTATIONS ET NOTATION FACTORIELLE

**Définition et propriété**

- Une **permutation** d'un ensemble E ayant $n$ éléments est un arrangement des $n$ éléments de E .
- Pour $n \ge 2$ , on appelle « **factorielle $n$** » et on note $\mathbf{n\,!}$ , le produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à $n$ :
  $$\mathbf{n\,! = n\,(n-1)\,(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$
  Par convention, on pose : $\mathbf{0\,! = 1}$ et $\mathbf{1\,! = 1}$
- Le nombre de permutations d'un ensemble E à $n$ éléments est le nombre d'arrangements des $n$ éléments de E, c'est à dire $A_n^n$ ou encore $n$ !

**Exemple :**
- ( M , T , H , A ) et ( T , M , A , H ) sont des permutations de $\Omega$.
- ( M , A , T ) et ( M , A , H , T , A ) ne sont pas des permutations de $\Omega$ .
- Le nombre d'anagrammes du mot MATH est le nombre de permutation de l'ensemble $\Omega$, c'est à dire $4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

**Remarque :**
Ecrire une permutation de E revient à écrire dans un certain ordre tous les éléments de E . Le nombre de permutations de E est donc égal au nombre de classements possibles des éléments de E .

**Propriété**

| |
|---|
| Pour tout entier naturel $n$ non nul, et pour tout entier $p$ tel que $1 \leq p \leq n$ , on a : $\mathbf{A}_n^p = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$ |

**Preuve :**
Pour $n$ et $p$ vérifiant $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

## 3 ) COMBINAISONS

Soit E un ensemble fini ayant $n$ éléments et $p$ un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$ .

**Définition**

| |
|---|
| Une **combinaison** de $p$ éléments de E est une partie (ou un sous-ensemble ) $\{ a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_p \}$ constituée de $p$ éléments pris parmi les $n$ éléments de E . |

*On parle de sous-ensembles … on utilise donc des accolades .*

**Remarques :**
- Une combinaison étant une partie de E, tous ses éléments sont distincts et un élément de E intervient au plus une fois.
- Une combinaison est donc une partie **non ordonnée et sans répétition** de $p$ éléments de E.

**Exemple :**
- { M ; T ; A } et { M ; T ; H } sont deux combinaisons de 3 éléments de Ω.
- { A }est une combinaison d'un élément de Ω .
- { M ; T ; A } et { M ; A ; T }sont deux écritures de la même combinaison.

**Propriété**

| |
|---|
| **Le nombre de combinaisons** de $p$ éléments, noté $\binom{n}{p}$ ( ou $C_n^p$ ) , d'un ensemble à $n$ éléments est : $$\binom{n}{p} = \frac{\mathbf{A}_n^p}{p!} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$$ |

**Preuve :**
- Si $p = 0$ , on a $\binom{n}{0} = 1$ , et $p\,! = 0\,! = 1$ et $\dfrac{n\,!}{0\,!\,(n-0)\,!} = 1$
- Si $p \neq 0$ , à tout arrangement de $p$ éléments de E correspond une seule combinaison.

Pour toute combinaison de $p$ éléments de E, par permutation de ces $p$ éléments, on peut former $p$ ! arrangements de $p$ éléments de E.
En procédant comme précédemment, deux combinaisons distinctes donnent deux ensembles disjoints de $p$ ! arrangements.
Ainsi, le nombre d'arrangements de $p$ éléments est $p$ ! fois le nombre de combinaisons de $p$ éléments.

Donc , $A_n^p = p\,!\binom{n}{p}$

**Remarque :**
- L'ensemble E possède deux sous-ensembles particuliers : ∅ et lui-même . E possède donc une combinaison à 0 élément et une combinaison à $n$ éléments . Ainsi $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$
- Dans l'ensemble E à $n$ éléments, il y a $n$ parties à un seul élément . Ainsi $\binom{n}{1} = n$
- Pour $p \geq 2$ , on a : $\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$

  C'est à dire $\binom{n}{p}$ est égal au produit des $p$ entiers consécutifs décroissants à partir de $n$, divisé par $p$ ! .

**Exemple :**

On prend **simultanément** 6 cartes d'un jeu de 32 cartes . On obtient une main de 6 cartes, sans répétition ni ordre . Il s'agit donc d'une combinaison de 6 éléments pris parmi 32 éléments.

Le nombre de mains possibles est : $\binom{32}{6} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 906192$

## 4 ) PROPRIETES DES $\binom{n}{p}$ ET TRIANGLE DE PASCAL

**Propriétés**

- Pour tout entier naturel $n$, et pour tout entier $p$ tel que $0 \leq p \leq n$ , on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- De plus, si $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n - 1$ , alors : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

**Preuve :**

- $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!\,(n-(n-p))\,!} = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!\,p\,!} = \binom{n}{p}$

- Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments et $a$ un élément de E.
  Dénombrons les parties de E à $p + 1$ éléments $\binom{n+1}{p+1}$ en considérant les parties qui contiennent $a$ et celles qui ne contiennent pas $a$.
  Une partie de E à $p + 1$ éléments de E contenant $a$ contient $p$ éléments choisis parmi les $n$ éléments de E autres que $a$.

  Le nombre de ces parties est donc $\binom{n}{p}$.
  Une partie de E à $p + 1$ éléments de E ne contenant pas $a$ contient $p + 1$ éléments choisis parmi les $n$ éléments de E autres que $a$.
  Le nombre de ces parties est donc $\binom{n}{p+1}$.
  On en déduit que : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

## LE TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal** .

| **n** \ **p** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | | | | | | |
| **1** | **1** | **1** | | | | | |
| **2** | **1** | **2** | **1** | | | | |
| **3** | **1** | **3 +** | **3 =** | **1** | | | |
| **4** | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** | | |
| **5** | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** | |
| **6** | **1** | **6** | **15** | **20** | **15** | **6** | **1** |

- $\binom{n}{p}$ n'est défini que pour $p \leq n$ ; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$ .
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$ .
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :
  $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$
  *« tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »*

## 5 ) BINOME DE NEWTON

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels ( ou complexes ) .
On a $( a + b )^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et $( a + b )^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Les coefficients des termes des membres de droite sont respectivement ( 1 ; 2 ; 1 ) et ( 1 ; 3 ; 3 ; 1 ) .
On retrouve la deuxième ligne et la troisième ligne du triangle de Pascal. Ce résultat est général et se traduit par le théorème suivant.

**Propriété**

Soit $a$ et $b$ deux réels ( ou complexes ) et $n$ un entier naturel non nul . On a :

$$( a + b )^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

**Preuve :**

On considère la proposition P($n$) : $( a + b )^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Pour $n = 1$ , on a :

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{1}{1} = 1 \ , \quad \text{donc} \quad \sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^{1-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a + b)^1$$

La proposition P(1) est donc vérifiée.

Supposons que P($n$) est vraie pour un entier $n$ fixé, $n \geq 1$. On a alors $( a + b )^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
(a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\
&= (a + b)\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) \\
&= a\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) + b\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) \\
&= \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1}$$

( en remplaçant $p$ par $i$ - 1 )

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

( en remplaçant $i$ par $p$ )

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right] a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

On obtient alors $(a + b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$ c'est-à-dire que P($n$+1) est vraie.

On a donc démontré que la proposition P($n$) est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

**Exemples :**

- Calcul de $( a + b )^6$
  En lisant les valeurs des coefficients dans la ligne numéro 6 du triangle de Pascal, on obtient :
  $( a + b )^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
  La somme des exposants de $a$ et $b$ dans chaque terme est toujours égale à 6 .

- Lorsque $a = b = 1$ , on a pour tout entier $n$ non nul : $2^n = ( 1 + 1 )^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

  C'est le nombre de parties d'un ensemble E à $n$ éléments.

  En effet, pour $p$ variant de 0 à $n$, il y a $\binom{n}{p}$ parties de $p$ éléments ; d'où la somme des $\binom{n}{p}$.

  On retrouve un résultat vu en première …