DERIVATION, PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1) DERIVEES SUCCESSIVES

Définition :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sa fonction dérivée f' s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f.
Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f''. f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$,on définie **la fonction dérivée n-ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre n -1 .
Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemple :
$f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur ℝ et on a $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ et ainsi de suite...

2) DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

A) CAS GENERAL

Propriété :

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x) = (g \circ u)(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I,

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Cette propriété reste vraie lorsque I et J sont des réunions d'intervalles.

Preuve :

Soit $a \in$ I . Pour tout réel h non nul tel que $a + h \in$ I , on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{h} = \frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{u(a+h)-u(a)} \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or u est dérivable en a . On a donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$

D'autre part u est dérivable en a , u est donc continue en a, ce qui donne : $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$

On a également $u(a) \in$ J et g est dérivable sur J, d'où : $\lim\limits_{X \to u(a)} \frac{g(X)-g(u(a))}{X-u(a)} = g'(u(a))$

On obtient alors $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{u(a+h)-u(a)} = g'(u(a))$

Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a) \times g'(u(a))$

On en déduit que $g \circ u$ est dérivable en a et que $(g \circ u)'(a) = u'(a) \times g'(u(a))$

Remarque :
On retrouve ainsi une propriété vue en première : si $g(x) = f(ax+b)$, alors $g'(x) = a f'(ax+b)$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = (g \circ u)(x)$ où $g : x \longmapsto \sin x$ et $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$

La fonction g est dérivable sur ℝ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = \cos x$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$

(Pour tout $x \neq 0$, on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$ ... Dans la pratique, quand la fonction g est dérivable sur ℝ , cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

B) DERIVEE DE $\sqrt{u}$

Propriété :

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Cette propriété reste vraie lorsque I est une réunion d'intervalles.

Preuve :

On a $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour tout x de I , $u(x) > 0$, donc la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I , et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

C) DERIVEE DE u^n (où n est un entier relatif non nul)

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I , et pour tout x de I , on a :

$$f'(x) = n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$$

Preuve :

On a $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto x^n$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = n\,x^{n-1}$

Ainsi pour tout x de I la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$$

Remarque : Cas où $n < 0$ et u ne s'annule en aucun point de I :

On a $f(x) = [u(x)]^n = \dfrac{1}{[u(x)]^{-n}}$

Puisque $-n > 0$,on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction et on obtient : $f'(x) = -\dfrac{([u(x)]^{-n})'}{([u(x)]^{-n})^2}$

Or $([u(x)]^{-n})' = -n\,u'(x)\,[u(x)]^{-n-1}$ donc $f'(x) = -\dfrac{-n\,u'(x)\,[u(x)]^{-n-1}}{([u(x)]^{-n})^2} = n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$

On obtient également $f'(x) = n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$

3) PRIMITIVES

A) Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

B) Lien entre deux primitives

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.

Donc G est une primitive de f sur I .

- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.

La dérivée de G - F est nulle sur l'intervalle I donc G - F est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$

Preuve :

En effet, si F est une primitive de f sur I , toute autre primitive G est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
La condition initiale nous permet alors d'obtenir une unique valeur de k .

C) Primitives d'une fonction continue (admis)

Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

4) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :
– si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
– si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λ F est une primitive de λf sur I.
De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » le tableau des primitives suivant :

fonction f	primitive F	sur
a	$a\,x$	$\mathbb{R}$
x^n (*où* $n \in \mathbb{Z}$ - {-1})	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,[$ (*où* $k \in \mathbb{Z}$)

Le tableau suivant résume divers cas d'exploitation de la dérivée d'une fonction composée pour l'expression d'une primitive.
Dans chaque cas, u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

fonction f	primitive F	remarques
$u'\,u^n$ (*où* $n \in \mathbb{Z}$- {-1})	$\dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}$	Si $n < -1$, une primitive de $u'\,u^n$ n'est définie que sur un intervalle I sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$x \longmapsto u\,(\,a\,x + b\,)$ ($a \neq 0$)	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}\,\mathrm{U}\,(\,a\,x + b\,)$	U primitive de u sur I
$u' \times (\,v' \circ u\,)$	$v \circ u$	$v \circ u$ est dérivable sur I v dérivable sur u (I)