DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

1) CARACTERISATION BARYCENTRIQUE

A) Droites et segments

Propriété

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

- Un point M de l'espace appartient à la droite (AB) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $a + b \neq 0$ et tels que M est le barycentre de (A , a) , (B , b).
- Un point M de l'espace appartient au segment [AB] si, et seulement si, il existe deux réels positifs ou nuls a et b tels que $a + b \neq 0$ et tels que M est le barycentre de (A , a) , (B , b).

Preuve :

- Si M est un point de (AB) , alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$. On a :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow (1 - k)\,\overrightarrow{AM} + k\,\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

Or $(1 - k) + k \neq 0$,donc M est le barycentre de (A ,$1 - k$) et (B , k).

Réciproquement : Si M est le barycentre de (A , a) ; (B , b) , alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$. Donc M $\in$ (AB).

- Si M est un point du segment [AB] , alors il existe $k \in [\,0 \,;\, 1\,]$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.

On en déduit alors $(1 - k)\,\overrightarrow{AM} + k\,\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ et comme $k \in [\,0 \,;\, 1\,]$, $1 - k$ et k sont positifs.
Ainsi, M est le barycentre de (A ,$1 - k$) , (B , k) avec $1 - k$ et k positifs.

Réciproquement : Si M est le barycentre de (A , a) , (B , b) avec a et b positifs, alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$

Or $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $0 \leq b \leq a + b$ avec $a + b \neq 0$,ce qui donne $0 \leq \dfrac{b}{a+b} \leq 1$, et ainsi M appartient au segment [AB].

Remarques :

- La droite (AB) est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A , $1 - k$) , (B , k) où $k \in \mathbb{R}$
- Le segment [AB] est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A , $1 - k$) , (B , k) où $k \in [\,0 \,;\, 1\,]$

B) Plans

Propriété

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Un point M de l'espace appartient au plan (ABC) si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c tels que $a + b + c \neq 0$ et tels que M est le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c).

Preuve :

Soit trois réels a, b et c tels que $a + b + c \neq 0$ et M le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c).

- **premier cas :** $b + c \neq 0$

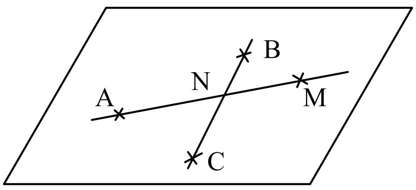
Soit N le barycentre de (B , b) , (C , c). N est alors un point de la droite (BC) , donc (AN) est une droite du plan (ABC).
D'après la règle du barycentre partiel (associativité) , M est le barycentre de (A , a) , (N , $b + c$)
M est alors un point de la droite (AN) et donc du plan (ABC).

- **deuxième cas :** $b + c = 0$

On sait que $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
Or $b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = (b + c)\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{BC} = c\,\overrightarrow{BC}$
On en déduit que $a\,\overrightarrow{MA} + c\,\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
M est alors sur la droite passant par A et parallèle à (BC) et donc M $\in$ (ABC).

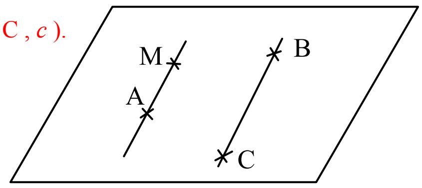
Réciproquement : Soit M un point du plan (ABC).
Si M =A , alors M est le barycentre de (A , 1) , (B , 0) , (C , 0)

Si M $\neq$ A ,alors :



- **premier cas :** Les droites (AM) et (BC) sont sécantes en un point N.
  - Comme M $\in$ (AN) et M $\neq$A, il existe des réels a et λ ($\lambda \neq 0$, $a + \lambda \neq 0$) tels que M soit barycentre de (A , a) , (N , λ)
  - Comme N $\in$ (BC), il existe des réels b et c avec $b + c = \lambda$ tels que N soit barycentre de (B , b) , (C , c)

D'après la règle du barycentre partiel, on en déduit que M est le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c).



- **deuxième cas :** Les droites (AM) et (BC) sont parallèles.
Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{BC}$ et on montre facilement que M est barycentre de (A , 1) , (B , $-k$) , (C , k).

C) Triangles

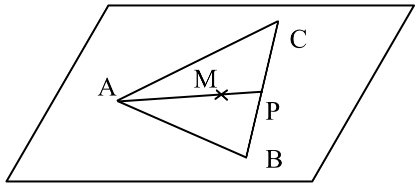
Propriété

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Un point M de l'espace appartient au triangle ABC si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c positifs ou nuls tels que $a + b + c \neq 0$ et tels que M est le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c).

Preuve :
Soit M un point du triangle ABC .

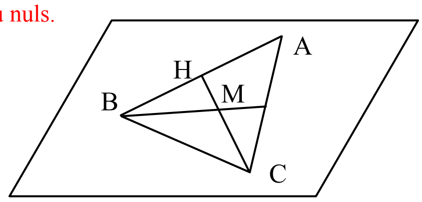
- **premier cas :** M est un point d'un des côtés du triangle (par exemple [AB]) .
  On a vu qu'il existe deux réels a et b positifs ou nuls tels que M est barycentre de (A , a) , (B , b)
  M est alors barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , 0).
  De même pour les côtés [AC] et [BC].

- **deuxième cas :** M est un point du triangle ABC , n'appartenant pas aux côtés de ce triangle. On note P le point d'intersection de (AM) et de (BC)
  - Comme M $\in$ [AP] (M $\neq$ A et M $\neq$ P) , il existe deux réels a et λ strictement positifs tels que M soit le barycentre de (A , a) , (P , λ)
  - Comme P $\in$ [BC] (P $\neq$ B et P $\neq$ C) , il existe deux réels b' et c' strictement positifs tels que
  P soit le barycentre de (B , b') , (C , c'). P est aussi le barycentre de (B , $\lambda \dfrac{b'}{b'+c'}$) , (C , $\lambda \dfrac{c'}{b'+c'}$).



On a $a > 0$, $b = \lambda \dfrac{b'}{b'+c'} > 0$ et $c = \lambda \dfrac{c'}{b'+c'} > 0$
D'après la règle du barycentre partiel, on en déduit que M est le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c).

Réciproquement : Soit M le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) avec a , b et c trois réels positifs ou nuls.
Alors l'une des trois sommes $a + b$, $b + c$ ou $a + c$ est non nulle (sinon la somme $a + b + c$ serait nulle).
On suppose $a + b \neq 0$ et soit H le barycentre de (A , a) , (B , b) .
D'après la règle du barycentre partiel, on déduit que M est le barycentre (H , a + b) , (C , c)
avec $a + b$ et c positifs ou nuls et $a + b + c \neq 0$.
Donc M est un point du segment [HC] et M est bien un point du triangle ABC .



2) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Dans la suite du cours, l'espace est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Propriété

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées (x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (λ ; β ; γ).
Un point M de coordonnées (x ; y ; z) appartient à d si, et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + k\lambda \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$$

Preuve :
M (x ; y ; z) appartient à d si ,et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$
En traduisant cette dernière égalité à l'aide des coordonnées, on obtient le résultat cherché.

Remarque :
A chaque réel k correspond un unique point M de la droite.
Réciproquement, à chaque point M de la droite correspond un unique réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$.

Définition

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées (x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (λ ; β ; γ).

$$\begin{cases} x = x_A + k\lambda \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$ est **une représentation paramétrique** de la droite d .

Le paramètre k peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y et z . On utilise souvent la lettre t.

Remarques :

- Si λ , β et γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases} x = a + k\lambda \\ y = b + k\beta \\ z = c + k\gamma \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par le point de coordonnées (a ; b ; c) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (λ ; β ; γ).

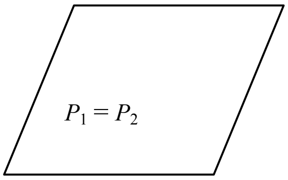
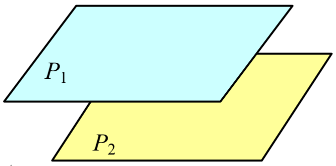
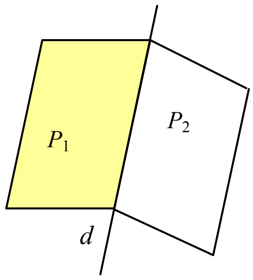
- Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

- Représentations paramétriques d'un segment et d'une demi-droite :
  Soit A et B deux points distincts de l'espace.
  L'appartenance d'un point M au segment [AB] ou bien à la demi-droite [AB) s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :
  - pour le segment, il suffit de remplacer dans le système : « $k \in \mathbb{R}$ » par « $k \in [0 ; 1]$ ».
  - pour la demi-droite [AB) , il suffit de remplacer dans le système : « $k \in \mathbb{R}$ » par « $k \in [0 ; +\infty [$ ».

3) POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

Dans la suite du cours, le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est orthonormal.
Soit P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ et $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$
On peut savoir à priori si les deux plans sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non.
En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations . Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite d, intersection de P_1 et P_2.

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système (S) : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

P_1 et P_2 confondus	P_1 et P_2 strictement parallèles	P_1 et P_2 sécants
 P_1 et P_2 sont parallèles		
$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires Les suites (a_1 , b_1 , c_1) et (a_2 , b_2 , c_2) sont proportionnelles		$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires Les suites (a_1 , b_1 , c_1) et (a_2 , b_2 , c_2) ne sont pas proportionnelles
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets (x ; y ; z) solution de l'une des deux équations	(S) n'admet aucune solution	(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets (x ; y ; z) coordonnées des points de d

Remarques :

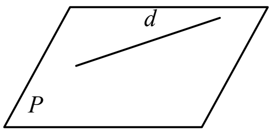
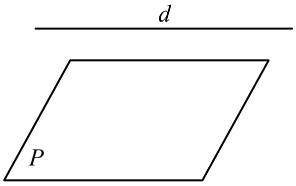
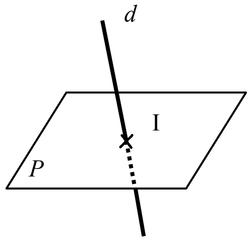
- On dit que $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite d .
- La démarche géométrique permet de prévoir à priori le nombre de solutions.

4) POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit P le plan d'équation $a x + b y + c z + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ et d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (λ ; β ; γ) et passant par le point A de coordonnées (x_A ; y_A ; z_A).
On peut savoir à priori si d et sécante ou parallèle à P suivant que $\vec{u}$ est orthogonal ou non à $\vec{n}$.

En particulier, si d coupe P, leur point d'intersection I a pour coordonnées (x ; y ; z) solution du système (S) : $\begin{cases} x = x_A + t\lambda \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \\ a x + b y + c z + d = 0 \end{cases}$

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de d et P et indique l'ensemble des solutions du système (S) .

d est contenue dans P	d est strictement parallèle à P	d et P sont sécants
 d et P sont parallèles		
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux		$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets (x ; y ; z) coordonnées des points de d	(S) n'admet aucune solution	(S) a une unique solution : (x_I ; y_I ; z_I) coordonnées de I

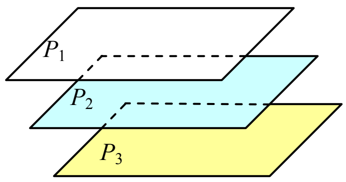
Remarque :
Si d est définie comme l'intersection de deux plans P_1 et P_2 , la recherche de l'intersection de d et P peut se ramener à celle des trois plans P_1 , P_2 et P

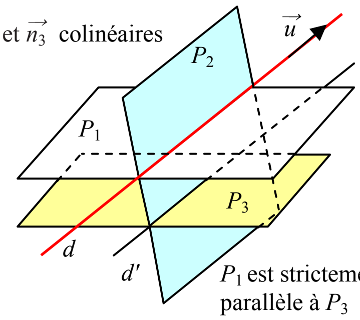
5) POSITION RELATIVE DE TROIS PLANS

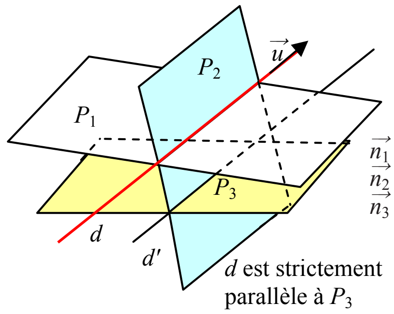
Soit P_1 , P_2 et P_3 trois plans d'équations respectives $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ et $a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$.
Si deux plans sont confondus, l'étude de l'intersection des trois plans se ramène à celle de deux plans faite précédemment.
Nous supposerons, donc que les plans sont distincts deux à deux.

L'étude de l'intersection des trois plans revient à résoudre le système linéaire de trois équations à trois inconnues (S) : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$

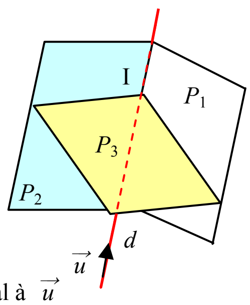
Pour faciliter l'étude, on détermine d'abord l'intersection des plans P_1 et P_2 .

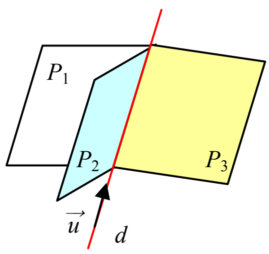
<table>
<tr><td colspan="3">Les trois plans n'ont aucun point en commun</td></tr>
<tr>
<td>

P_1 , P_2 et P_3 sont strictement parallèles
$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ colinéaires</td>
<td>$\vec{n_1}$ et $\vec{n_3}$ colinéaires


P_1 est strictement parallèle à P_3</td>
<td>

$\vec{n_1} \perp \vec{u}$
$\vec{n_2} \perp \vec{u}$
$\vec{n_3} \perp \vec{u}$
d est strictement parallèle à P_3</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ coplanaires</td></tr>
<tr><td colspan="3">(S) n'admet aucune solution</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Les trois plans ont un seul point commun</td><td>L'intersection des trois plans est une droite</td></tr>
<tr>
<td>

$\vec{n_1} \perp \vec{u}$
$\vec{n_2} \perp \vec{u}$
$\vec{n_3}$ n'est pas orthogonal à $\vec{u}$</td>
<td>$\vec{n_1} \perp \vec{u}$
$\vec{n_2} \perp \vec{u}$
$\vec{n_3} \perp \vec{u}$

</td>
</tr>
<tr><td>$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ non coplanaires</td><td>$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ coplanaires</td></tr>
<tr><td>(S) a une unique solution : (x_1 ; y_1 ; z_1) coordonnées de I</td><td>(S) admet une infinité de solutions :
tous les triplets (x ; y ; z) coordonnées des points de d
La droite d est définie par deux des trois équations.</td></tr>
</table>

Remarque : Cas où les trois plans sont confondus

(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets (x ; y ; z) solution de l'une des trois équations.