LIMITES DE FONCTIONS

Ce cours est un complément des propriétés vues en 1èreS qu'il est préférable d'avoir relues !

1) THEOREMES DE COMPARAISON

A) THEOREME DES GENDARMES

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]\, b\,;+\infty\,[$ et $L \in \mathbb{R}$.

Si pour tout $x \in\,]\, b\,;+\infty\,[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$ et en un réel a. Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe un réel M_1, tel que, si $x \geq M_1$, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$
De même, il existe un réel M_2, tel que, si $x \geq M_2$, $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$
Soit M le plus grand des réels M_1 et M_2.
Ainsi pour tout $x \geq M$, on a $L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$ et donc $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$
Ce résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Pour toux $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]\, b\,;+\infty\,[$ et $L \in \mathbb{R}$.

Si pour tout $x \in\,]\, b\,;+\infty\,[$, $|f(x) - L| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$ et en un réel a. Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

Preuve :

Pour tout $x \in\,]\, b\,;+\infty\,[$, $|f(x) - L| \leq g(x) \iff L - g(x) \leq f(x) \leq L + g(x)$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (L - g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (L + g(x)) = L$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

B) COMPARAISON A L'INFINI

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]\, b\,;+\infty\,[$.

- Si pour tout $x \in\,]\, b\,;+\infty\,[$ $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in\,]\, b\,;+\infty\,[$ $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$.

Preuve :

Soit $M > 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, Il existe donc un réel m tel que, si $x > m$, alors $g(x) > M$.
Or $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que, si $x > m$, alors $f(x) > M$.
Ce résultat est vrai pour tout M. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple : Soit $f(x) = x - \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Pour toux $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq -\sin x$, donc $x - 1 \leq x - \sin x$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 1) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE (admis)

Propriété

Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.
Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

Dans la pratique, on cherche d'abord la limite b de h en a, puis la limite de g en b.

Preuve intuitive : cas où a, b et c sont des réels.

On a $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. Ainsi, lorsque x tend vers a, les nombres $h(x)$ se rapprochent de b.
Posons $h(x) = X$. On a alors $f(x) = g(X)$.
Lorsque les nombres X tendent vers b, alors les nombres $g(X)$ se rapprochent de c, puisque $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to a} g(h(x)) = c$

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Posons $X = 2x^2 - 3x + 5$. On a alors $f(x) = \sqrt{X}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$