ETUDE DE LA FONCTION TANGENTE

Définition

La fonction tangente, notée tan, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par la suite, on note D l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Périodicité

La fonction tan est périodique de période π . Pour tout x de D :

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

Preuve :

Pour tout $x \in D$, $x + \pi \in D$ et :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan x$$

Parité

La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative admet donc l'origine pour centre de symétrie.

Preuve :

Pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x .$$

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}[$

Dérivabilité

La fonction tangente est dérivable sur D et pour tout réel x de D on a :

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Preuve :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D , donc la fonction tangente est dérivable sur D et pour tout réel x de D on a :

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tableau de variations :

Pour tout $x \in [\,0\,;\frac{\pi}{2}[$, $\tan' x > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}[$.

On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	1	$+$	‖
tan	0	↗	$+\infty$ ‖

Représentation graphique :

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$:

- On trace la courbe C qui représente la fonction tangente sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}[$,
- puis par symétrie par rapport à O ,on obtient la courbe C sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$,
- et enfin on applique à C les translations de vecteurs $k\,\pi\,\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.