TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES
CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES - L'ESSENTIEL DU COURS

Transformation affine de variables aléatoires :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.
On note x_1, x_2, …, x_n les valeurs prises par X. La variable aléatoire $Y=aX+b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels ax_1+b, ax_2+b, …, ax_n+b

Espérance et variance :

On a : $E(aX+b)=aE(X)+b$ $V(aX+b)=a^2V(X)$

Somme de deux variables aléatoires :

Soit X et Y deux variables aléatoires.
X+Y est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y.

Espérance :

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Cette propriété et E(aX)=aE(X) caractérise la linéarité de l'espérance.

Variance :

Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes**. On a :

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychef :

Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif. On a :

Delta minuscule

$$P(|X-E(X)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{\delta^2}$$

$[E(X)-\delta;E(X)+\delta]$ est **un intervalle de fluctuation.**

En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|X-E(X)|<\delta)\geqslant 1-\frac{V(X)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(E(X)-\delta<X<E(X)+\delta)\geqslant 1-\frac{V(X)}{\delta^2}$$

Loi des grands nombres et loi Binomiale :

On considère **un schéma de Bernoulli** constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p.

Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, associée à la i-ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire.
On a donc $P(X_i=1)=p$

- La variable aléatoire $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i=X_1+X_2+\dots+X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.
- S_n suit **la loi binomiale** de paramètres n et p.

Moyenne empirique :

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, la variable aléatoire $M_n=\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}=\frac{S_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n, on obtient :

$$P(|S_n-np|\geqslant\delta)\leqslant\frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad\text{et}\quad P(|M_n-p|\geqslant\delta)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Loi des grands nombres :

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.
On répète n fois cette expérience **de manière indépendante**.
On obtient alors **un échantillon** de taille n composé de n variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, suivant toute la même loi et donc d'espérance E(X) et de variance V(X).

Inégalité de concentration :

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n-E(X)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{n\delta^2}$$

On dit que M_n converge en probabilité vers E(X) quand n tend vers $+\infty$.

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand le taille de l'échantillon tend vers l'infini
Ce qui s'écrit de manière mathématiques $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|M_n-E(X)|\geqslant\delta)=0$