Terminale

Mathématiques complémentaires

Programme 2020

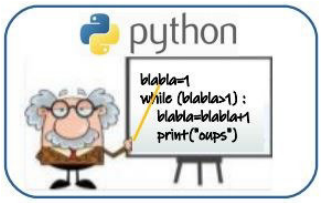
Fiches d'exercices et de cours à compléter

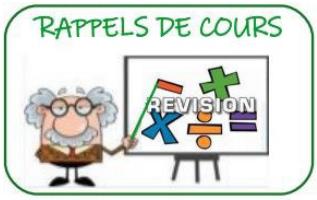
Auteur : Pierre Lux – version 2023

Toutes les corrections sont consultables en ligne

http://pierrelux.net

1 : Limites de suites pages 1 à 16
2 : Limites et continuité des fonctions pages 17 à 32
3 : Calculs de dérivées : rappels et compléments pages 33 à 47
4 : Logarithme népérien pages 48 à 64
5 : Équations différentielles – Primitives pages 65 à 74
6 : Intégrales pages 75 à 89
7 : Convexité des fonctions pages 90 à 98
8 : Lois de probabilité discrètes pages 99 à 112
9 : Lois de probabilité continues pages 113 à 126
10 : Séries statistiques à deux variables pages 127 à 137





LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si ***« u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

Remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L, signifie que lorsque n est de plus en plus grand, **« les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L »**.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L, alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.
On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où k est un réel donné)**

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 5\,n^2$

On a $w_n = 5\,u_n$ où $u_n = n^2$

- **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

- **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

- **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
		Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$						*Cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$				

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive» signifie qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n>n_0$, (v_n) garde un signe constant.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = \dfrac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

3) LIMITES ET COMPARAISON

Propriétés : Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI)

Soit deux suites (u_n) et (v_n).

- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple : Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n - (-1)^n$

Propriété : Passage à la limite

Soit deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent respectivement vers L et L'.
On suppose que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
On a alors $L \leqslant L'$.

Si une suite (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n , $u_n \leqslant k$ ($k \in \mathbb{R}$) , alors $L \leqslant k$

Remarque : Si dans la propriété précédente, on remplace $u_n \leqslant v_n$ par $u_n < v_n$, la conclusion reste $L \leqslant L'$

Exemple : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

4) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES

Propriété :

Soit q un réel .

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est

Remarque : On en déduit facilement le cas général $u_o q^n$ …

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.
On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$;

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on applique la formule suivante :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\mathbf{S = premier\ terme \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}}$$

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique définie , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 5 \times 2^n$

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $0<q<1$. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$$

Preuve :

On a $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ car $0<q<1$, donc par somme $\lim_{n \to +\infty} (1-q^{n+1}) = 1$ et par produit, puis quotient $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$

5) SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Définition :

Une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite définie, pour tout entier naturel n , par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$, où a et b sont deux réels.

Remarques :

- Si $a=0$, la suite est constante et égale à b .
- Si $a=1$, la suite est arithmétique de raison b .
- Si $a \neq 0$ et $b=0$, la suite est géométrique de raison a .

Représentation graphique :

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 10$ et $u_0 = 1$. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} x + 10$

Étape 1 : On trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2} x + 10$

Étape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$

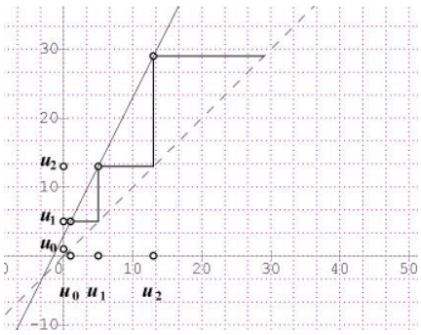
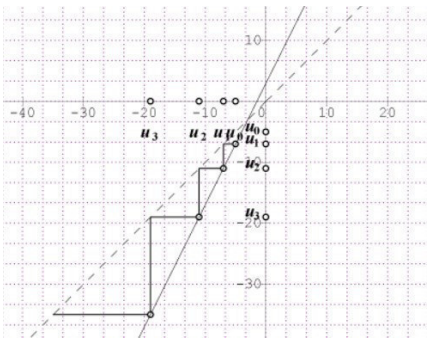
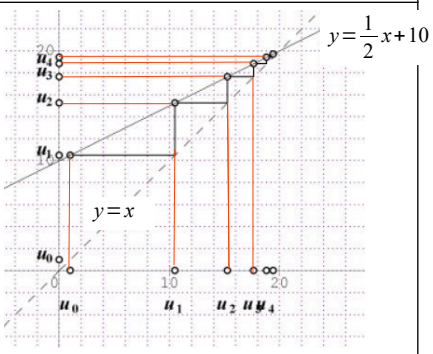
Étape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses

Étape 4 : On place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées

Étape 5 : On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$

et ainsi de suite … pour obtenir u_2 , u_3 , u_4 ….

Dans la pratique, on ne dessine pas tous les traits de construction et on se contente de mettre en évidence les variations et les limites.

$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$	$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -5$	$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 10$ et $u_0 = 1$
		

Une suite arithmético-géométrique peut converger vers un réel L ou tendre vers l'infini.

Les différents cas possibles :

Suites divergentes

Cas 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Cas 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ Tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Cas 3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Suites convergentes

Cas 4 : Aucun des trois cas ne se produit.

Opérations sur les limites :

$k\times u_n$ (où k est un réel donné)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (k\times u_n)$ (avec $k>0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (k\times u_n)$ (avec $k<0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

u_n+v_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Forme indéterminée

$u_n\times v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0^-$

$\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$	0 en restant **positive**	0 en restant **négative**	0 en restant **positive**	0 en restant **négative**	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\neq 0$ **Cas où** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0^+$

Limites et comparaison :

Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI) :

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

- Si $u_n<v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
- Si $u_n<v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Passage à la limite :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent respectivement vers L et L'.
On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$.
On a alors $L\leqslant L'$.

Si on remplace $u_n\leqslant v_n$ par $u_n<v_n$, la conclusion reste $L\leqslant L'$

Théorème des gendarmes :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n\leqslant w_n\leqslant v_n$
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=L$.

Un peu plus sur les suites géométriques :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $0<q<1$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{u_0}{1-q}$

Étape 1 : On trace la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+10$
Étape 2 : On trace la droite d'équation $y=x$
Étape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses
Étape 4 : On place $u_1=f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées
Étape 5 : On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y=x$
et ainsi de suite … pour obtenir u_2 , u_3 , u_4 ….

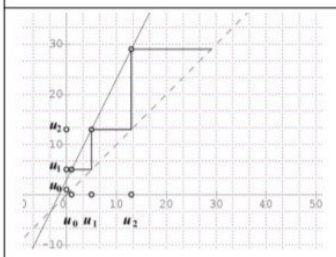
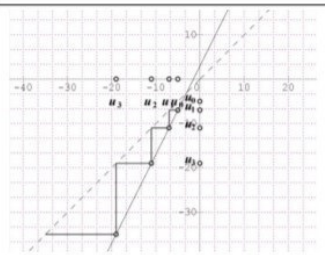
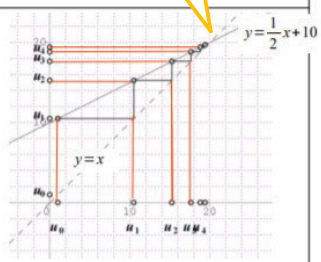
Suites arithmético-géométriques :

Si $a=0$, la suite est constante et égale à b .

Si $a=1$, la suite est arithmétique de raison b .

Si $a\neq 0$ et $b=0$, la suite est géométrique de raison a .

Une suite **arithmético-géométrique** (u_n) est une suite définie, pour tout entier naturel n , par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1}=a\,u_n+b$, où a et b sont deux réels.

$u_{n+1}=2u_n+3$ et $u_0=1$	$u_{n+1}=2u_n+3$ et $u_0=-5$	$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+10$ et $u_0=1$
		
La suite est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$	La suite est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$	La suite est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=20$ 20 est l'abscisse du point d'intersections des deux droites.

Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Modèles définis par une fonction d'une variable

Comportement global d'une suite

Ex 1-1 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.

2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$

4) Si $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.

5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

6) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.

d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

7) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

8) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

Ex 1-2 : ***Déterminer*** u_{n+1} ***en fonction de*** u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n = 7^{n-3}$

6) $u_n = 2n - 5$

7) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

8) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

9) $u_0 = 8$, $u_1 = 10$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 22$ …

10) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 21$, $u_3 = 85$ ...

Ex 1-3 : ***Étudier la monotonie***

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3n + 5$

2) $u_n = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

4) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 2n$

5) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

6) $u_n = \dfrac{n^2}{3^n}$

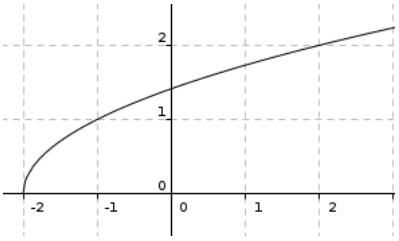
7) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n = \dfrac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$ (Aide : étudier une fonction)

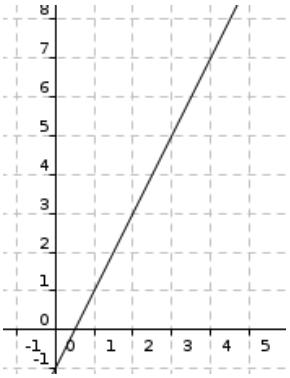
<u>Ex 1-4 :</u> Représenter graphiquement une suite définie par récurrence

Dans chaque cas, on considère la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).

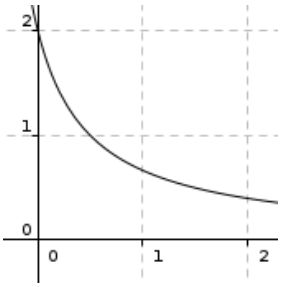
1) $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$



2) $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$



3) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 0,5}$



Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-5 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

2) S'il existe un intervalle ouvert ne contenant pas une infinité de terme de la suite (u_n), alors (u_n) ne converge pas vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

Ex 1-6 : ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Opérations sur les limites

Ex 1-7 : ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n).

1) $u_n=-2n^2+\frac{e}{n}$

2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n^3}\right)$

4) $u_n=\frac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\frac{n+2}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$

6) $u_n=\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{2}{n^2}}$

7) $u_n=\dfrac{5n^2}{10-\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(5+\dfrac{1}{n}\right)}$

<u>Ex 1-8 :</u> ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{n^5}{5}-\dfrac{n^2}{2}-\mathrm{e}$

2) $u_n=\dfrac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\dfrac{1}{4}$

3) $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+4}$

4) $u_n=\dfrac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n=\sqrt{n}-n$

6) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

7) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Ex 1-9 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite $+\infty$ telles que :

a) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=+\infty$

b) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=-\infty$

c) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=1$

d) $u-v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$, telles que :

a) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=+\infty$

b) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=0$

c) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=1$

d) uv n'a pas de limite.

Ex 1-10 : ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n+v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 1-11 : ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\frac{3\sin(n)}{n^2}$

2) $u_n=\frac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$

3) $u_n=3(-1)^n+n$

4) $u_n=\frac{2\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n=\frac{5n+(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$

6) $u_n=-3n^3+3\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Ex 1-12 : ***Passage à la limite***

On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n , $v_n\leqslant\frac{-n+1}{n+4}$

On suppose que la suite (v_n) est convergente.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leqslant-1$

Limite d'une suite géométrique

Ex 1-13 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

2) $u_n=1,00001^n$

3) $u_n=3+\left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n=\left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n=\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k$

7) $u_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n=\frac{e^n-4^n}{4^n-1}$

9) $u_n=\frac{2^{n+1}+5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-14 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3,777777\ldots$ (n chiffres 7)
$u_1=3,7$, $u_2=3,77$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

Suites arithmético-géométriques

Ex 1-15 :

On considère la suite arithmético-géometrique (u_n) définie par
$\begin{cases} u_{n+1}=0,5u_n+1,5 \\ u_0=1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement les 4 premier termes de la suite (u_n) .

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

3) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) .

```
1  def u(n):
2      u= ……
3      for i in range ( ….. , ….. ):
4          u=……..
5      return ……..
```

4) En utilisant la fonction Python ci-dessus, retrouver le résultat conjecturé à la question 2.

Suites arithmético-géométriques et problèmes

Ex 1-16 : ***Baccalauréat ES Amérique du Sud nov 2019 – Ex 1-2***

Suites arithmético-géométriques - Algorithme de seuil

Au 1er janvier 2018, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2018+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
   Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2020 ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0{,}96^n$.
3. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
   On considère l'algorithme ci-dessous

```
1  n=0
2  u=5000
3  while ( …….. ):
4      n=n+1
5      u=……..
```

   a. Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.
   b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

Ex 1-17 : ***Baccalauréat ES Antilles-Guyanne sept 2017 – Ex 1-2***

Suites arithmético-géométriques

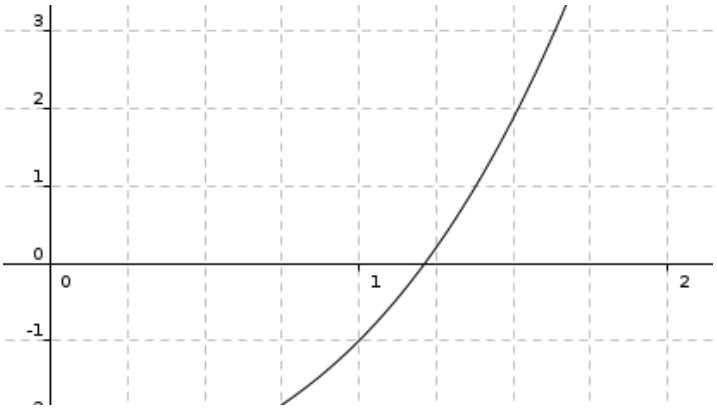
Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1er janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2017+n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1. **a.** Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2018?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
   d. La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1er janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
   a. Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
   b. Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2025.

Algorithme

Ex 1-18 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\frac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .

Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**
Revenons sur le cas général.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.
On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n = 10$.

```
1  from math import *
2
3  N=int(input("N="))
4  x_0=float(input("x_0="))
5
6  def f(x):
7      return (……..)
8
9  def f_prime(x):
10     return (……..)
11
12 def MethodeNewton(x_0, N):
13     x=……..
14     for i in range(……..):
15         x.append(……..……..……..)
16     return x
17
18 print(MethodeNewton(x_0,N))
```

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
1  from math import *
2
3  x_0=float(input("x_0="))
4  p=float(input("p="))
5
6  def f(x):
7      return (……..)
8
9  def f_prime(x):
10     return (……..)
11
12 def MethodeNewton(x_0,p):
13     x=……..
14     i=……..
15     x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
16     while (……..……..>p):
17       i=……..
18       x.append(……..……..)
19     return x
20
21 print(MethodeNewton(x_0,p))
```

3) **Application :**

Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près : (puis donner ces valeurs approchées)

- de π

- de e

- de $\sqrt{2}$

- du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2 = x + 1$)

Attention :
Dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution . Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas …

Testez le programme **MethodeNewton.py** (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Newton.

LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

1) LIMITE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

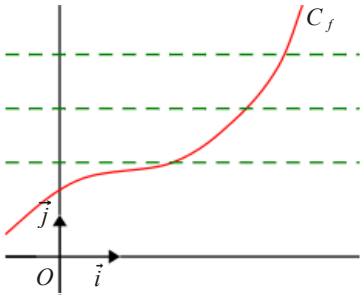
A) LIMITE INFINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel.
Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la courbe C_f finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

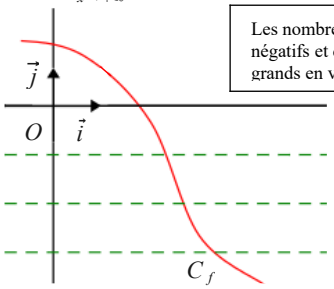
  Pour tout réel $M>0$, il existe un réel m tel que , si $x>m$, alors $f(x)\in]M\,;+\infty[$

- On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exemples à connaître :

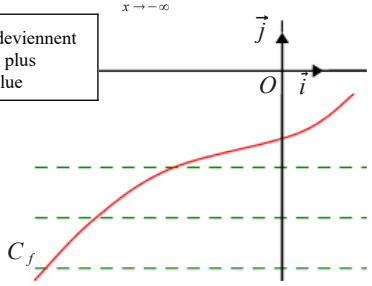
On définit de la même façon …

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

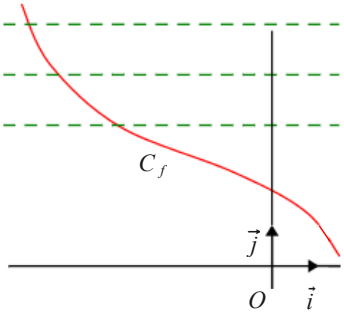


Les nombres $f(x)$ deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$

Remarque :

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :

B) LIMITE FINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel et soit L un réel donné .

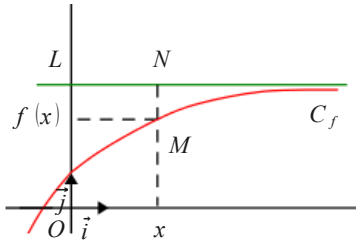
- Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L».**

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

- On dit que la droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.



Remarque :

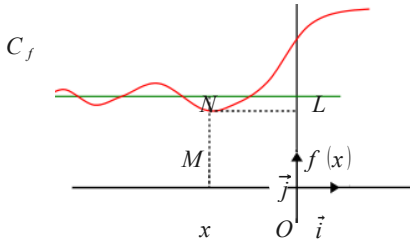
De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) il existe un réel m tel que , si $x>m$, alors $f(x)\in]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On définit de la même façon :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty ; b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $-\infty$.

Exemples à connaître :

Remarque :

Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ …)

2) LIMITE EN *a* (avec *a* réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a \in D_f$
- ou a est une borne de D_f

A) LIMITE INFINIE EN *a* ET ASYMPTOTE VERTICALE

Définition :

Soit f une fonction.

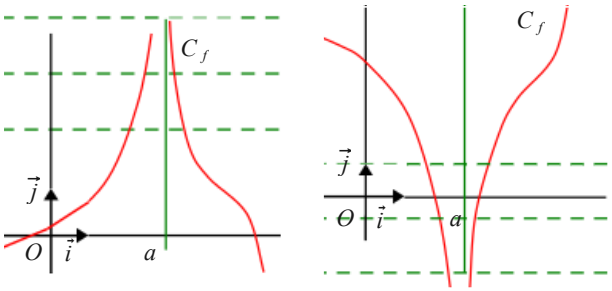
- Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, ***« les nombres*** $f(x)$ ***correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f.



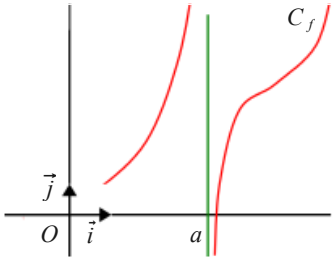
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .

Remarque :

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *«d'un seul côté de a».*

Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en *a*** et de **limite à gauche en *a*** et on note :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

Exemples :

B) LIMITE FINIE EN a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation en 1S.
La notion de limite finie en a est identique …

Définition :

Soit f une fonction telle que a soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df et soit L un réel donné.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en a, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L »**.

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

  Pour tout $(\varepsilon > 0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;\,L+\varepsilon[$.

- On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet <u>une</u> limite finie en a, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

  C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles, de la fonction racine carrée, des fonctions sinus et cosinus, des fonction logarithmes et exponentielles … et des composées de ces fonctions.

  Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

  Exemples :

Attention : Comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément <u>une</u> limite finie en tout point de leur ensemble de définition. (*la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes…*)

3) OPÉRATION SUR LES LIMITES

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.
Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux sont admis.
Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais … comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f$ et $\lim g$ les limites de f et de g, toutes les deux en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
  On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de $k\,f$ (où k est un réel donné)**

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k>0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k<0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

On a $g = -2\,f$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$

- ***Limite de $f+g$***

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

On a $h = f + g$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$

- **Limite de $f \times g$**

$\lim f$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f \times g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h : x \longmapsto (x+2)\sqrt{x}$ . . Calculer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

On a $h = f \times g$ avec $f : x \longmapsto x+2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

- **Limite de $\dfrac{f}{g}$**

$\lim f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
	Cas où la limite de g n'est pas nulle							*Cas où la limite de g est nulle*				

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \dfrac{2x-4}{\sqrt{x}}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

On a $h = \dfrac{f}{g}$ ou $f : x \longmapsto 2x-4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

4) CONTINUITÉ DES FONCTIONS

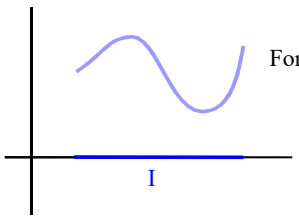
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est continue en a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout réel a de I.

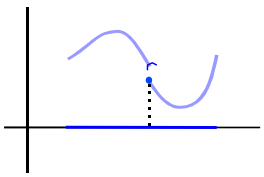
Remarque :

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle I sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.



Fonction continue

Une fonction n'est pas continue en un réel a lorsque la courbe a une discontinuité en a, elle fait un "saut".



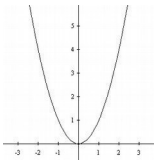
Fonction discontinue en a

Exemple 1 :

- La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction continue en tout réel a de $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

  On peut le justifier en démontrant que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a.

  La parabole représentant la fonction $x \longmapsto x^2$ peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.



Exemple 2 :

- Considérons la fonction $x \longmapsto$ E(x) appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

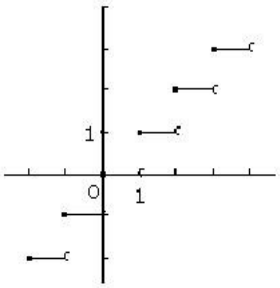
  E(2,5) = 2 E(-2,4) = -3 E(1,9999) = 1 E(2) = 2

  Si n est un nombre entier, alors E(n) = n et pour tout $x \in [n\,;n+1[$, on a E(x) = n

  Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$
  En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, E(x) n'est pas très proche de E(n).

  La fonction **"Partie entière"** est une fonction dite **"en escalier".**
  La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

  Notations courantes : - calculatrices : int(x) floor(x) partEnt(x) int x
  - tableur : ent()



5) CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques :

- Les démonstrations de ces propriétés se font en utilisant les propriétés des limites.
- La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.
- Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

6) DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention :

7) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

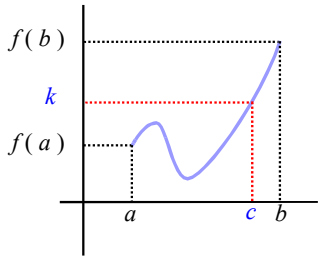
Propriété : *admise*

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I ,et a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x)=k$ a **au moins** une solution c comprise entre a et b.



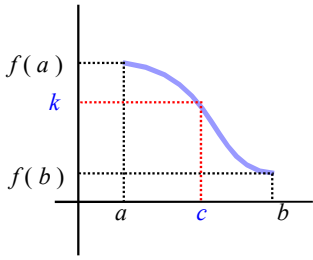
Propriété : ***Corollaire du théorème*** *des valeurs intermédiaires ou théorème des bijections*

Soit f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$) , il existe **un et un seul** réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x)=k$ a **une unique** solution c comprise entre a et b.



Remarques :

- Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle .

Par exemple :

- Si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a\,;b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]a\,;b]$.

- Si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]-\infty\,;a[$.

Attention :

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\,;b]$

- Les théorèmes précédents permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.

*On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton).*

- LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS - MATH COMP chapitre 2 : L'ESSENTIEL DU COURS

http://pierrelux.net

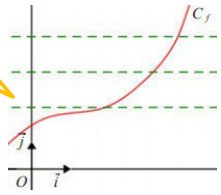
Pour tout réel $M>0$, les nombres $f(x)$ finissent par se retrouver dans l'intervalle $]M;+\infty[$

Limites infinie en l'infini :

Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la courbe finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

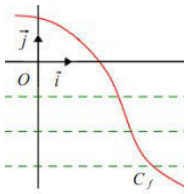
Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



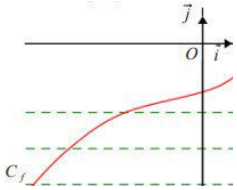
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



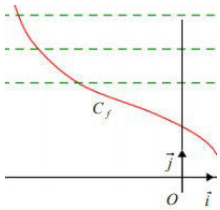
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

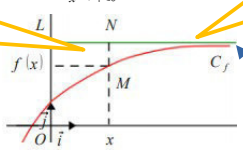
De la même façon ….

Limites finie en l'infini :

Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

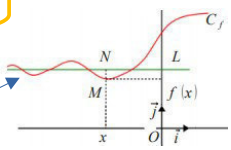
Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$



en $+\infty$

f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$



en $-\infty$

f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$

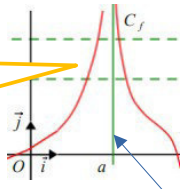
Asymptote horizontale :

La droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$. (ou en $-\infty$)

Limite infinie en un réel *a* :

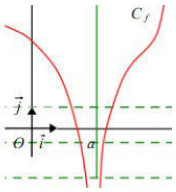
Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe C_f finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



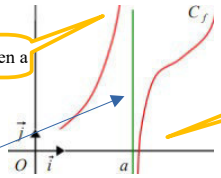
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieurs à a
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures à a

Asymptote verticale :

la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f

Limite finie en un réel *a* :

$a\in D_f$ ou est une borne de D_f

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Pour tout $(\varepsilon>0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$

Opérations sur les limites :

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Attention aux formes indéterminées : « $+\infty-\infty$ » « $0\times\infty$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ » « $\frac{0}{0}$ »

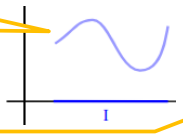
Continuité :

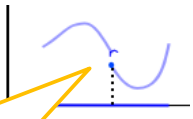
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est **continue en *a***, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est **continue** en tout réel a de I.

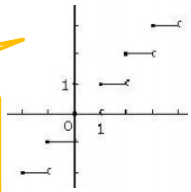
Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle I sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.





Une fonction n'est pas continue en un réel a lorsque la courbe a une discontinuitéen a, elle fait un "saut".

Un exemple fameux de fonction non continue :
La fonction "Partie entière" (qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x) est une fonction dite "en escalier". La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.



Dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Fonctions de référence :

La plupart des fonctions qui seront étudiées en terminale seront des fonctions continues.

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Dérivabilité et continuité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

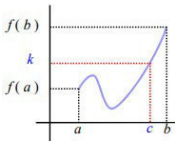
La réciproque de la propriété est fausse :
la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Ces théorèmes permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions d'une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.
On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton)

TVI :

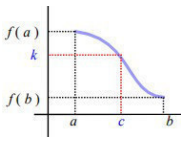
Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et a et b deux réels de I.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

Corollaire du TVI :

Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$ si f est strictement décroissante) , il existe **un unique réel** c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Limites de fonctions

Ex 2-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x) > 10^9$

b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x > m$, alors $f(x) > A$

d) $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $x > m \Rightarrow f(x) > 10^4$

2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ex 2-2 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ex 2-3 : ***Conjecturer une limite – piéger la calculatrice***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto 10^{-3} x^2 - 10^2 x$

2) $g : x \longmapsto \dfrac{3x^2 - 2}{10^3 x - 4}$

3) $h : x \longmapsto 10x^3 - 0{,}01x^4$

Ex 2-4 : ***Limite et position relative par rapport à une droite***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y = 1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Limite en *a* (avec *a* réel)

Ex 2-5 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +4$

c) $\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Ex 2-6 : ***Vrai ou faux***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d : y = -1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d : y = -1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d : x = -1$ est asymptote verticale à C.

Ex 2-7 : ***Conjecturer une limite***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f : x \longmapsto \frac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$

Ex 2-8 : ***Asymptotes***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C .

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$

Opérations sur les limites

Ex 2-9 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ex 2-10 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + x + \frac{1}{x} \right)$

2) $\lim_{x \to 0+} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

4) $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim\limits_{x \to 4+} \left(3x - 1 + \dfrac{1}{x-4}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

9) $\lim\limits_{x \to 2+} \left(4 - x^2 + \dfrac{4}{4-x^2}\right)$

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x} - \dfrac{2}{1-2x}\right)$

Ex 2-11 : ***Formes indéterminées***

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = -\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$

c) $\dfrac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 2-12 : ***Logique***

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x))=0$, il faut que $\lim_{x \to +\infty} g(x)=0$

2) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x))=0$, il suffit que $\lim_{x \to +\infty} g(x)=0$

Ex 2-13 : ***Fonctions polynômes***

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme
$P(x)=-8x^3+14x^2+8x+4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

a) $Q(x)=\frac{x^5}{4}-\frac{x^3}{2}$

b) $R(x)=1-4x+5x^2$

Ex 2-14 : ***Fonctions rationnelles***

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle
$f(x)=\frac{3x+2}{4x^2-5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

a) $g(x)=\frac{x^3-4x^2-5}{2x^3-5}$

b) $h(x)=\frac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 2-15 : ***Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{-2;2} par $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex 2-16 : ***Déterminer a, b et c ...***

Soit $f : x \longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-1	↘	-4	↘ $-\infty$ ‖	$+\infty$	↘	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .

2) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

Ex 2-17 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{x+2}$

Ex 2-18 : ***Limite d'une fonction composée***

Déterminer intuitivement, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

Ex 2-19 : ***Théorèmes de comparaison***

Les théorèmes de comparaison non détaillés en maths complémentaires sont identiques (en adaptant les limites) à ceux vus pour les suites.

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geqslant 5$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leqslant x-5 \leqslant x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Continuité : maîtriser le cours

Ex 2-20 : ***Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Si f est continue sur I , alors :

1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de $\mathcal{C}$.

2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.

3) $\mathcal{C}$ se trace sans lever le crayon.

4) L'intervalle I est fermé.

5) La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$

6) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

7) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle

Ex 2-21 :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f : x \longmapsto \sqrt{3-x}$ sur $I=]-\infty;3[$

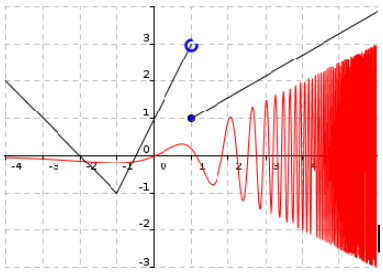
2) $f : x \longmapsto 2e^x+\dfrac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{3x^3}{1-3x}$ sur $I=\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

Continuité et représentation graphique

Ex 2-22 :

1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4;6]$.



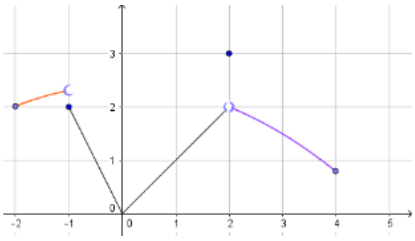
2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction

$f : x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$. f est-elle continue sur]0;1] ?

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon . Que peut-on conclure ?

Ex 2-23 :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.



1) La fonction f est-elle dérivable en -1,5 :

en 0 :

en 2 :

2) La fonction f est-elle continue sur $[-2;2]$:

sur $[-2;-1]$:

sur $[-2;-1[$:

3) Déterminer :

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$

La fonction f est-elle continue en 2 ?

Théorème des valeurs intermédiaires

Ex 2-24 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) Si f change de signe sur I, alors f s'annule sur I.

2) Si $I=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I, alors f s'annule sur I.

3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I, alors f est continue sur I.

4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I, alors f est strictement monotone sur I.

Ex 2-25 : ***Utilisation de la calculatrice***

1) Montrer que l'équation $(E): \dfrac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $[-4;-1,5]$.

2) Vérifier avec la calculatrice et essayer avec la calculatrice de donner des valeurs approchées de toutes les solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ de l'équation (E)

On peut **conjecturer graphiquement** le nombre de solutions et un encadrement de chacune d'elles . On peut utiliser **les outils graphiques** proposés par la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées ou utiliser les fonctions **nSolve() ou Solve()** .

- **Solve() :** fonction de calcul formel .
Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)

- **nSolve() :** fonction fournissant une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson.
Par nature, cette fonction ne peut retourner qu'une seule solution même s'il en existe plusieurs.
Elle peut aussi ne rien retourner du tout (plus exactement, elle retourne 'false', voire retourner un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode de Newton ne converge pas.
Suivant l'outil utilisé (Ti-Nspire …) , il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée.

Ex 2-26 : ***Signe de f(x)***

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.

- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4

- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-27 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-28 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;3[$?
A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-29 : ***f(x)=k : discussion suivant les valeurs de k***

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	1

1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Ex 2-30 : ***Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'***

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .

CALCULS DE DÉRIVÉES : RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ : RAPPELS

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition : Nombre dérivé

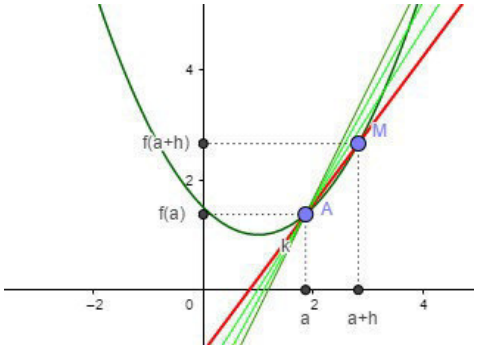
Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a:

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.
Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.



Propriété : Équation de la tangente

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est:

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation
- Si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a, mais C_f admet une tangente verticale d'équation

Définition : Fonction dérivée

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f', qui, à tout x de I, associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION : RAPPELS

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I,
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I,
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I,

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

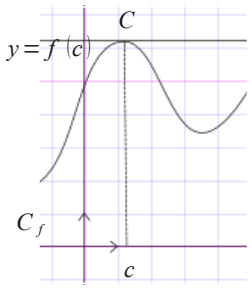
Remarques :

- Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors



Conséquences graphiques:

On a $f'(c) = 0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.

Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.

3) FORMULES DE DÉRIVÉES

DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$		
$f : x \longmapsto ax+b$		
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$		
$f : x \longmapsto x^n \quad n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}$		
$f : x \longmapsto e^x$		

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I (I représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints) et k un réel, alors :

- Les fonctions $k \cdot u$, $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur I et:

- Si pour tout réel a de I, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et:

POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

DÉRIVÉE DE $f : x \longmapsto g(ax+b)$

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout réel x, tel que $ax+b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

DÉRIVÉE DE $\sqrt{u}$

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

DÉRIVÉE DE u^2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^2$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

DÉRIVÉE DE e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

Nombre dérivé :

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a :

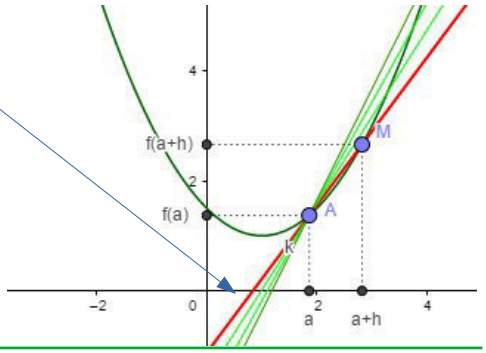
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (si la limite existe, on dit alors que f est **dérivable** en a)

Interprétation géométrique :

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe. (h tend vers 0)

Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.



Équation de la tangente :
au point $A(a;f(a))$

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ (Si f est dérivable en a)

Cas particuliers:

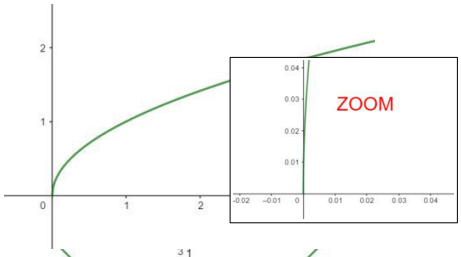
- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a **une tangente horizontale** d'équation $y=f(a)$.

Fonction non dérivable :

- Si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a

  C_f admet **une tangente verticale** d'équation $x=a$.

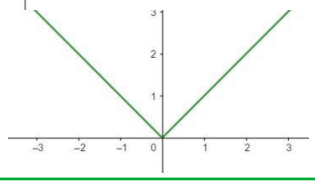
  Exemple classique de la fonction racine carrée en 0
  la droite d'équation $x=0$ est tangente verticale à la courbe à l'origine du repère.



- Si C_f admet une pointe au point d'abscisse a alors la fonction n'est pas dérivable en a .

$|x|=\begin{cases}x \text{ si } x\geqslant 0\\ -x \text{ si } x\leqslant 0\end{cases}$

Exemple classique de la fonction valeur absolue en 0



Formules :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f:x\longmapsto k\ (k\in\mathbb{R})$	$f':x\longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto x$	$f':x\longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\sqrt{x}$	$f':x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f:x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f':x\longmapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\frac{1}{x}$	$f':x\longmapsto-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f:x\longmapsto\frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f':x\longmapsto-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f:x\longmapsto e^x$	$f':x\longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I et k un réel , alors :

- Les fonctions $k\cdot u$, $u+v$ et $u\cdot v$ sont dérivables sur I et:

$$(k\cdot u)'=k\cdot u' \quad , \quad (u+v)'=u'+v' \quad \text{et} \quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

- Si pour tout réel a de I, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

Toute fonction **polynôme** est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction **rationnelle** (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Composées :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f:x\longmapsto g(ax+b)$	$f':x\longmapsto a\,g'(ax+b)$	Si g une fonction dérivable sur un intervalle I , alors pour tout réel x , tel que $ax+b\in I$, la fonction f est dérivable sur I
$f:x\longmapsto\sqrt{u(x)}$	$f':x\longmapsto\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	Si u est une fonction **strictement positive** et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I
$f:x\longmapsto(u(x))^2$	$f':x\longmapsto 2u'(x)u(x)$	Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I .
$f:x\longmapsto e^{u(x)}$	$f':x\longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I .

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Calculs d'aires

Nombre dérivé d'une fonction en « un point »

Ex 3-1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en un réel a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers a .

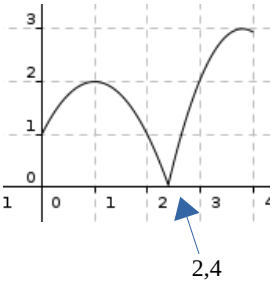
2) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

3) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

4) Si une fonction f est dérivable en a , le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est égal à la limite d'un taux de variations de f .

Ex 3-2 : ***QCM : restituer les notions du cours***

Soit f la fonction définie sur [0;4] représentée ci-dessous :



1) Au point d'abscisse 1 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(1)=0$

c) f est dérivable et $f'(1)=2$

2) Au point d'abscisse 2,4 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(2,4)=-1$

c) f est dérivable et $f'(2,4)=1$

3) Au point d'abscisse 0 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(0)\approx 2$

c) f est dérivable et $f'(0)\approx 1$

Ex 3-3 : ***Calculer le nombre dérivé***

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

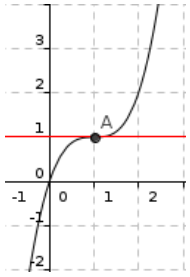
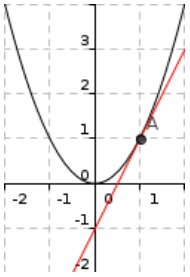
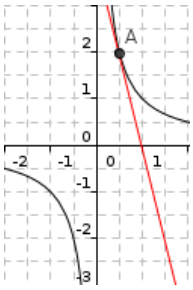
1) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f : x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f : x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

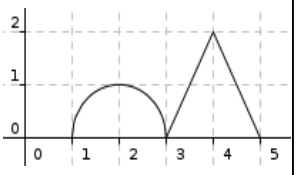
Ex 3-4 : ***Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f, et A un point de C_f d'abscisse a.
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 3-5 : ***Déterminer l'équation d'une tangente à l'aide d'un graphique***

Soit f la fonction définie sur [1;5] dont la courbe représentative est donnée ci-contre :
Déterminer si f est dérivable en a.



Si tel est le cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1) $a=1$

2) $a=2$

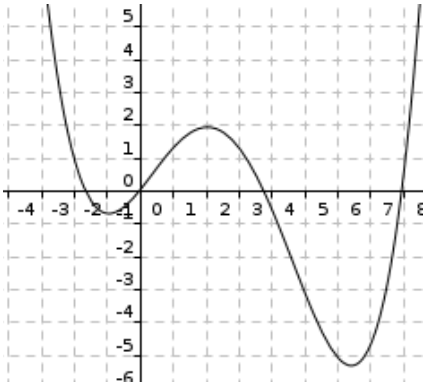
3) $a=3$

4) $a=4$

5) $a=5$

Ex 3-6 : ***Signe du nombre dérivé***

La courbe représentative d'une fonction dérivable a été tracée ci-contre.



Déterminer graphiquement le signe (ou l'éventuelle nullité) des réels suivants :

a) $f'(-3)$ b) $f'(1)$ c) $f'\left(\frac{4}{5}\right)$

d) $f'(2)$ e) $f'(5)$ f) $f'\left(\frac{50}{7}\right)$

Calculs de dérivées

Ex 3-7 :

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f : x \longmapsto (x-2)\times(x-4)$

b) $f : x \longmapsto \frac{x}{x^2-1}$

c) $f : x \longmapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

d) $f : x \longmapsto (x^2-1)\sqrt{x}$

e) $f : x \longmapsto 3x^3-2x^2+2x+5$

f) $f : x \longmapsto (3x-2)^2+e^x$

g) $f : x \longmapsto (x-3)(x^4+1)$

h) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

i) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$

j) $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+5}$

Ex 3-8 :

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f(x)=4x^3-2e^x$

b) $f(x)=-xe^x$

d) $f(x)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^x}$

e) $f(x)=3e^{x^3-1}$

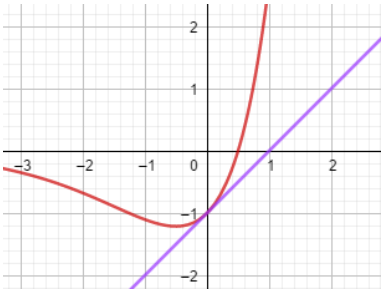
c) $f(x)=(4x-1)e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x)=\frac{2-3e^x}{1+e^x}$

Tangentes

Ex 3-9 : ***Déterminer a et b***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)e^x$ où a et b sont deux réels . On note C sa courbe représentative et T la tangente au point d'abscisse 0.



1) Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.

2) En déduire la valeur de b .

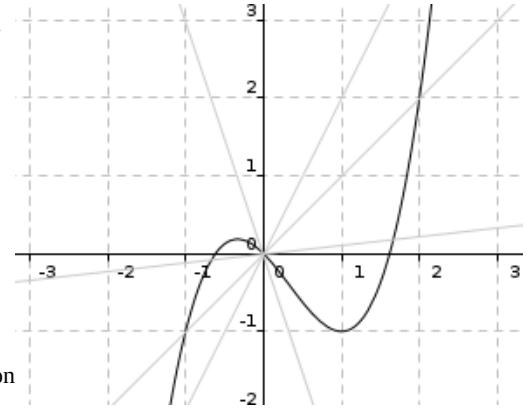
3) Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.

4) Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de a .

Ex 3-10 : ***Tangente parallèle à une droite donnée***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1) Déterminer la fonction dérivée de f .

2) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer lorsqu'elles existent, toutes les tangentes à C_f parallèles à la droite proposée .
Lorsqu'elles existent, préciser l'équation de ces tangentes, puis tracer les sur le graphique ci-dessus.

a) $d_1 : y=0$

b) $d_2 : y=x$

c) $d_3 : y=-3x$

d) $d_4 : y = \frac{1}{9}x$

Dérivées, variations et extrema

Ex 3-11 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Si une fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a .

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x) \leqslant f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a , alors f est dérivable en a .

Ex 3-12 : ***Déterminer les variations d'une fonction***

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations (sans les limites) de f sur I, puis déterminer les éventuels extrema de f .

1) $f : x \longmapsto e^{x^5}+1$, $I=\mathbb{R}$

2) $f : x \longmapsto \sqrt{4x^2-1}$, $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f : x \longmapsto x+\frac{3}{x}$, $I=[1;4]$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{2-x}$, $I = \mathbb{R} - \{2\}$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $I = [0;1]$

6) $f : x \longmapsto e^{x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4}$, $I = \mathbb{R}$

7) $f : x \longmapsto x\sqrt{x} - x$, $I = \left[\dfrac{1}{4};6\right]$

Ex 3-13 : ***Montrer des inégalités***

Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I.

1) $\frac{1}{1-x} \leqslant x-3$, $I=[2;+\infty[$

Aide : étudier la fonction $d : x \longmapsto \frac{1}{1-x}-(x-3)$

2) $x^2 \geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $I=]0;4]$

Ex 3-14 : ***Trouver une fonction vérifiant des conditions***

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction (ou d'une représentation graphique de fonction) vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est négative sur $\mathbb{R}$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Ex 3-15 : ***Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point***

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-2x$

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .

2) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point A d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x-2$.

a) Montrer que $f(x)-g(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Étudier le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Ex 3-16 : ***Position relative de deux courbes***

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $g(x)=-\frac{1}{x+2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .

1) Étudier les variations de la fonction f et dresser sont tableau de variations.

2) Étudier les variations de la fonction g et dresser sont tableau de variations.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Développer $(x+1)^2(x+3)$

b) Étudier le signe de $h(x)$.

c) Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

4) Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection . Donner une équation de cette tangente.

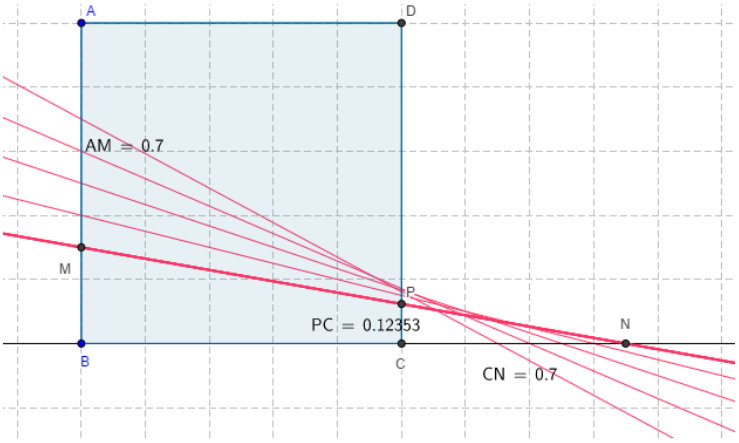
Ex 3-17 : ***Équations***

1) Justifier que l'équation $x^5-2x^3+3x-20=0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

2) Avec la calculatrice, donner un encadrement de α .

Problèmes et algorithmes

Ex 3-18 : ***Distance maximale***



ABCD est un carré de côté 1. M est sur le segment [AB].
On place le point N tel que CN=AM sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].
La droite (MN) coupe (DC) en P . On pose $AM=x$ avec $0\leqslant x\leqslant 1$.

Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

1) Démontrer que $PC=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

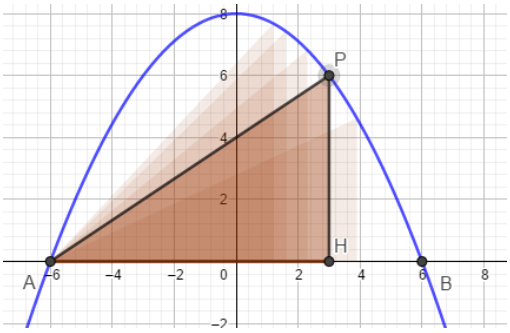
2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;1] par $f(x)=\frac{x-x^2}{1+x}$

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

<u>Ex 3-19 :</u> ***Parabole et aire maximale***

La parabole d'équation $y=-\frac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $P(x;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f(x)=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$

3) Étudier les variations de f.

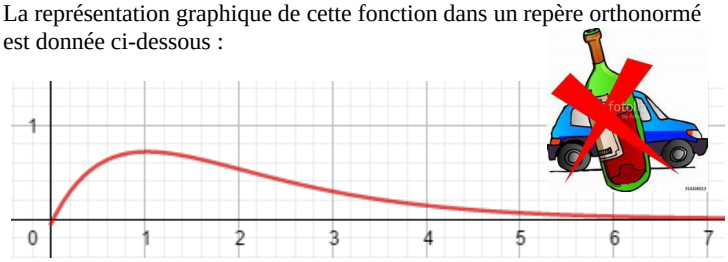
4) Répondre au problème posé.

Ex 3-20 : ***Taux d'alcoolémie***

Un étude sur un jeune homme de 64kg ayant ingéré une dose de 33g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans le sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=(2t-0,05)e^{-t}$$

La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1) Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de $0,25\ g.L^{-1}$

2) Un taux d'alcool dans le sang inférieur à $0,001\ g.L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
En complétant, puis en utilisant le programme écrit en python ci-dessous, déterminer à partir de combien de temps (à 10^{-2} près) le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est négligeable ?

```
from math import exp
x=.........
while (2*x-0.05)*exp(-x)>.........:
    x=.........
print(x)
```

3) Déterminer le tableau de variation de f .

4) En déduire une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang du jeune homme.

Ex 3-21 : ***Décroissance radioactive***

On étudie une population de noyaux radioactifs de carbone 14 au cours du temps.
À l'instant $t=0$, la population est composée de N_0 noyaux radioactifs de carbone 14.
On modélise le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant t , exprimé en milliers d'années, par la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par : $N(t)=N_0e^{-0,121t}$

1) Étudier les variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.

2) a) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps T au bout duquel la population de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
Justifier que $e^{-0,0121T}=\frac{1}{2}$

b) Déterminer avec un programme écrit en python une valeur approchée au millième de la demi-vie T du carbone 14.

3) a) Démontrer que $N(2T)=\frac{N_0}{4}$

b) En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.

LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) FONCTION RÉCIPROQUE

Définition :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.

Pour tout réel y appartenant à J, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

La fonction définie sur J qui à y associe x est appelé **fonction réciproque** de la fonction f . On la note f^{-1}

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^2$.

Propriété :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, et f^{-1} sa fonction réciproque.

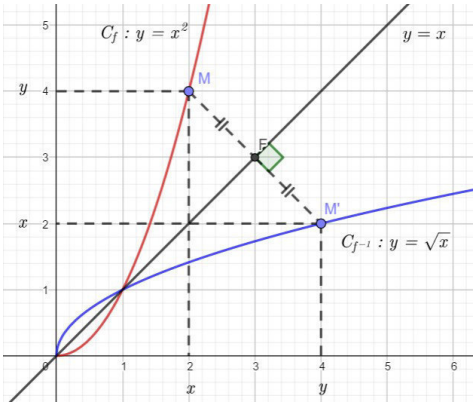
- Pour tout réel x appartenant à J, on a
- Pour tout réel x appartenant à I, on a
-

Propriété : Représentation graphique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, et f^{-1} sa fonction réciproque.

On note respectivement C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



2) DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle et définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0;+\infty[$.
Pour tout $y\in]0;+\infty[$, il existe **un unique** réel x tel que $e^x=y$.
Ce réel se note $x=\ln y$, ce qui se lit logarithme népérien de y .

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarque :

L'équivalence traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$ • Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$	• $\ln 1 = 0$ • $\ln e = 1$	Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

3) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$

Preuve : (des deux premiers points)

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

•

•

4) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18{,}42$

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété :

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

En supposant la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété de dérivation de $e^{u(x)}$ on peut écrire pour tout $x > 0$:

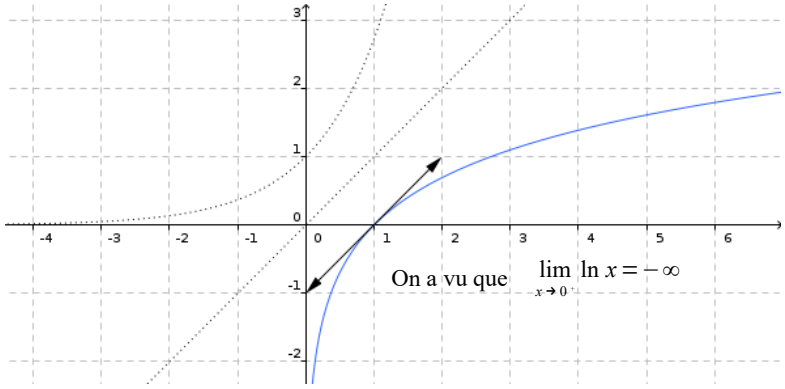
Limites classiques à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	
ln	

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport

D'autres limites classiques à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Limites classiques de la fonction exponentielle à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

5) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Fonction réciproque :

Pour tout réel x appartenant à J, on a :

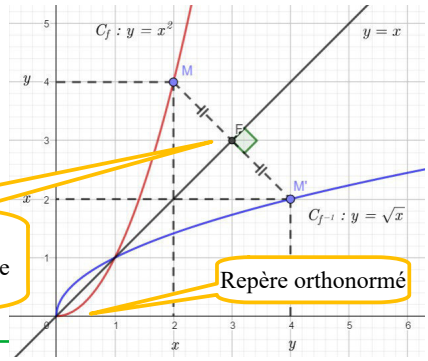
$$f(f^{-1}(x))=x$$

Pour tout réel x appartenant à I, on a :

$$f^{-1}(f(x))=x$$

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.
Pour tout réel y appartenant à J, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I. La fonction définie sur J qui à y associe x est appelé **fonction réciproque** de la fonction f.
On la note f^{-1}

$$\begin{cases} x\in I \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in J \\ x=f^{-1}(y) \end{cases}$$



Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$

Repère orthonormé

Lien avec la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle et définie et continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.
Pour tout $y\in]0\,;+\infty[$, il existe **un unique** réel x tel que $e^x=y$.
Ce réel se note $x=\ln y$, ce qui se lit logarithme népérien de y..

Définition de la fonction logarithme népérien :

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R}_+^* \\ y=\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\mathbb{R} \\ e^y=x \end{cases}$$

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

- Pour tout réel x **strictement positif**, on a $e^{\ln x}=x$
- Pour tout réel x, on a $\ln(e^x)=x$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$ On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ • $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ • $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\ln(a^n)=n\ln a$

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8)\approx 18{,}42$

Étude de la fonction logarithme népérien :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conséquences :

- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$ • $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$ • $\ln a\leqslant\ln b \Leftrightarrow a\leqslant b$
- $a>1 \Leftrightarrow \ln a>0$ • si $0<a<1$ alors $\ln a<0$

Continuité et dérivabilité :

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

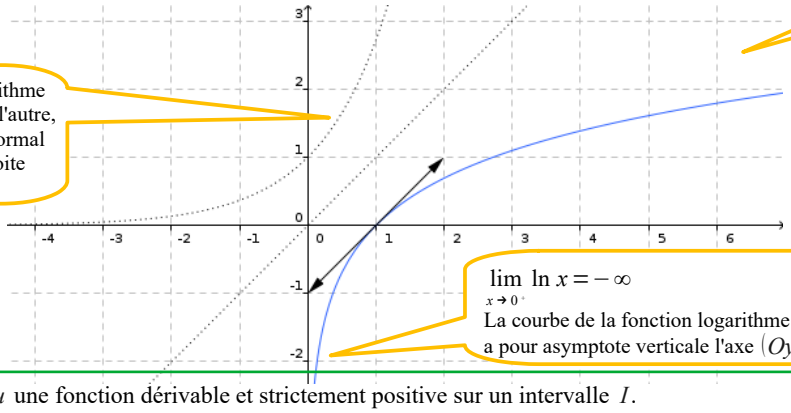
Limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (hors programme)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Représentation graphique :

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

Dérivée de ln(u(x)) :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $f: x\longmapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x\in I$, on a : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Calculatrices et Python :

Attention

python

Il existe une autre fonction notée log (logarithme décimal) définie par $\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Certaines calculatrices ou Python utilise la notation log pour parler de ln et la notation $\log_{10}$ pour parler du logarithme décimal. Soyez prudent !
En python log(x) retourne $\ln(x)$ et log(x,10) retourne $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}=\log_{10}(x)$

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

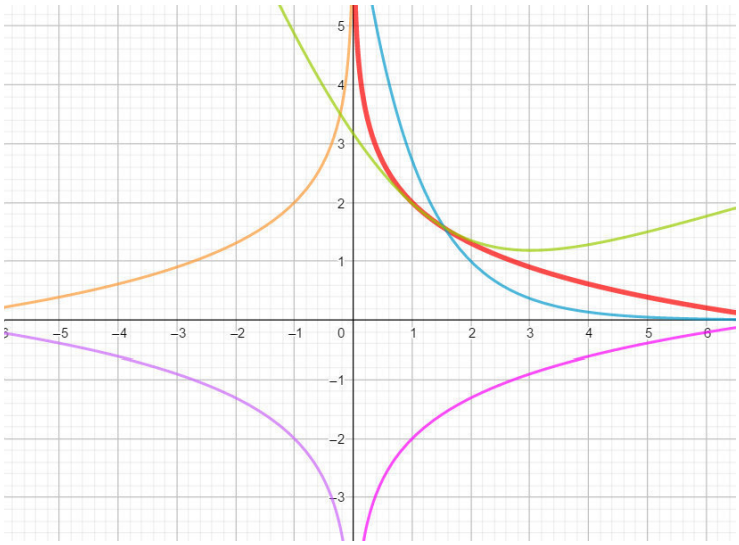
Modèles d'évolution

Approche historique de la fonction logarithme

Fonctions réciproques

Ex 4-1 :

On considère la courbe représentative d'une fonction f représentée en rouge (ou en gras) . Déterminer la courbe représentative de f^{-1} .



Ex 4-2 :

On considère la fonction f définie sur [-3;2] par $f(x)=-2x+5$

1) Dresser le tableau de variation de f sur [-3;2] .

2) Justifier que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} et donner son ensemble de définition.

3) En exprimant x en fonction de y , déterminer l'expression e f^{-1} .

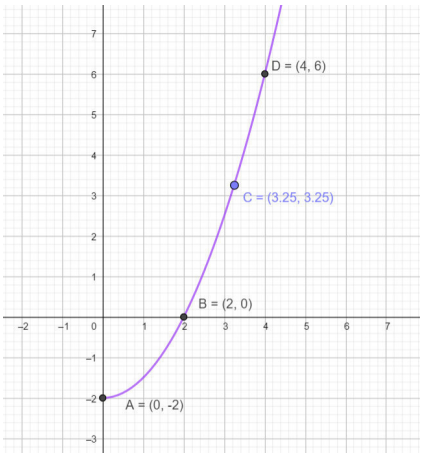
4) Tracer les courbe représentative de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Que peut-on dire du sens de variation de f et de f^{-1} ?

Ex 4-3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.

Les points A, B , C et D sont quatre points de C_f



1) Justifier graphiquement que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} et donner son ensemble de définition.

2) Lire graphiquement

$f^{-1}(-2)=$

$f^{-1}(0)=$

$f^{-1}(3,25)=$

$f^{-1}(6)=$

3) Représenter f^{-1} dans le repère ci-dessus.

4) Que peut-on dire du sens de variation de f et de f^{-1} ?

Ex 4-4 :

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x)=3x$ et $g(x)=\frac{x}{3}$.

1) Calculer pour tout réel x, $f(g(x))$ et $g(f(x))$.

2) Que peut-on conclure au sujet des fonctions f et g ?

Ex 4-5 :

Déterminer deux fonctions qui ont pour fonction réciproque elle même.

Fonction logarithme népérien – définition et propriétés algébriques

Ex 4-6 : ***QCM*** *Plusieurs réponses sont possibles.*

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x=3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x=-3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x=3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x=-3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x=\frac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=e^m$

g) L'équation $e^x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=\ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b)=\ln(a)\times\ln(b)$

b) $\ln(ab)=\ln(a)\ln(b)$

c) $\ln(a-b)=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3) $\ln(ab^5)=$ ...

a) $5\ln(ab)$

b) $5(\ln(a)+\ln(b))$

c) $5\ln(a)\ln(b)$

d) $\ln(a)+5\ln(b)$

4) $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=$ ...

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2\ln(a)$

d) 0

5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a)-\ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 4-7 : ***Calculs avec les formules***

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)}-e^{\ln(7)}$

2) $3e^{\ln(5)}+5e^{-\ln(3)}$

3) $\ln(2\sqrt{3})+2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\frac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$

5) $\frac{\ln(125)}{\ln(25)}$

6) $\frac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$

7) $\ln(1+e^x)-x-\ln(1+e^{-x})$

Ex 4-8 : ***Équations et inéquations***

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^x-2)(e^{2x}-8)=0$

2) $(e^{x-1}-3)^2=0$

3) $\left(e^{x^2+2x+5}+e^{-x}\right)\left(3e^x+4\right)=e$

4) $8-4e^{\ln(0,5)\times x+1}>0$

5) $e^{3x+5}<3e^x$

6) $\left(2e^x-10\right)\left(5-e^x\right)<0$

Ex 4-9 :

Compléter …

1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point A(ln2 ; …) et B(… ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x)\leqslant 0$ est …

3) Si $e^a=b$ $(b>0)$, alors ln(…) = …

4) $\forall$ x $\in$ … , $\ln\left(e^x\right)=x$

5) $\forall$ x $\in$ … , $e^{\ln(x)}=x$

6) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(x)>0$

Ex 4-10 : ***Calculs***

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

b) $\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$

c) $\frac{\ln 64}{\ln 81}+\frac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln\left(e^2\right)+\ln\left(\sqrt{e}\right)$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^3}\right)$

c) $\frac{\ln\left(e^4\right)}{\left(\ln\left(e^3\right)\right)^2}$

3) Calculer :

a) $\ln 3+\ln 9+\ln 27$

b) $\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$

Ex 4-11 : ***Vrai ou faux***

Justifier

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln(x^3)=3\ln(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^x)=x+\ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x})-4x=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 4-12 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction ln est :

a) $[1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^-$ e) $\mathbb{R}_+^*$ f) $]0;+\infty[$

2) La fonction ln :

a) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) est strictement positive sur $]1,+\infty[$.
d) est égale à sa dérivée.
e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

a) La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote à C .
b) C coupe l'axe des abscisses.
c) C admet une tangente de coefficient directeur -2.
d) C et la courbe de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d : y=x$.

Ex 4-13 : ***Déterminer une limite***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{3}{x}-4x-3x\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^3-\frac{5\ln x}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 1-} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0+} (2x+\ln x)^2$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-e^x}{x}$

Ex 4-14 : ***Dérivées***

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

1) $f(x)=\dfrac{3x}{\ln(x)}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln(x)-\ln(3)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $\mathrm{I}=]\mathrm{e};+\infty[$

4) $f(x)=(\ln x)^2-\dfrac{1}{\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

Ex 4-15 : ***Tangente à la courbe***

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction ln en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

Ex 4-16 : ***Signe d'une fonction grâce au sens de variation***

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x)=2x^2-\ln x$

2) $f(x)=x\ln x+\mathrm{e}$

.

Ex 4-17 : ***Déterminer une limite comportant une forme indéterminée***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x^2-3x\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\mathrm{e}^x-x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\ln 2}{x}+\ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2x}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((\ln x)^2-3\ln x+2\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\ln x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x-\mathrm{e}\ln x\right)$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)-5x}{1+x}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$

Ex 4-18 : ***Inéquations comportant*** q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier n tel que :

1) $3 \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n < 0,01$

2) $1 - 1,25^n < 0,99$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n = q_0\, 0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Fonctions du type $x : \longmapsto \ln(u(x))$

Ex 4-19 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(u(x)) > 0$

2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

5) $\ln(u(x)) \geqslant \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 5$

6) $\ln(u(x)) \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < u(x) \leqslant e^5$

Ex 4-20 : ***Résoudre une équation ou une inéquation comportant*** $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x - 5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5)=-3$

3) $\ln(7x+2)\geqslant\ln(3-x)$

4) $\ln(e^{2x}-25)\geqslant 0$

5) $\ln((x+1)(x-2))\geqslant\ln 18$

6) $\ln(1-x^2)-\ln(x-3)\geqslant 0$

<u>Ex 4-21 :</u> ***Signe d'une fonction***

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(x-3)\ln(x-1)$ définie sur $]1;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln(x-1)}$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

3) $h(x)=\ln\left(\frac{e^x-3}{e^x-1}\right)$ définie sur $]-\infty;0[\cup]\ln(3);+\infty[$

Ex 4-22 : ***Ensemble de définition***

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x)=\ln(x^2)-3$

2) $f(x)=\ln(e^x-1)$

3) $f(x)=\ln(x^2-3)$

4) $f(x)=\frac{1}{\ln(x+2)}$

5) $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Ex 4-23 : ***Tableau de variations***

Donner le tableau de variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(\ln x)^2-\ln(x^2)$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ sur $I=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ sur $I=\mathbb{R}$

Problèmes et algorithmes

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x=10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x=100$, la valeur 3 lorsque $x=1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note $\log$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k=\frac{1}{\ln 10}$, il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative . les formules sont identiques à celles de la fonction logarithme népérien :

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log(a\times b)=\log a+\log b$, $\log\frac{1}{a}=-\log a$,

$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$, $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$ et $\log a^n=n\log a$

Ex 4-24 : ***Niveau sonore***

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par $N=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité sonore exprimé en W/ m^2 , et où I_0 est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.

On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.
1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.
Quel est le niveau sonore de deux lave-linges identiques ?
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

2) Le niveau sonore d'une note de musique obtenue au violon est de 70 dB . Combien faut-il de violonistes jouant ensemble la même note, pour obtenir un niveau sonore de 80 dB ?

3) Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB et celui d'un klaxon de voiture est de 80 dB. Quel est le niveau sonore des deux bruits réunis ? Que remarque-t-on ?

Ex 4-25 : ***Algorithme de Briggs***

Dans introduction à l'analyse infinitésimale (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de log(5).

Ses calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

python

Les calculs sont initialisés par

A=1 , B=10 ,

$lA=0$ et $lB=1$.

A = 1,000000;	lA = 0, 0000000
B = 10,000000;	lB = 1, 0000000;
C = 3,162277;	lC = 0, 5000000;
D = 5,623413;	lD = 0, 7500000;
E = 4,216964;	lE = 0, 6250000;
F = 4,869674;	lF = 0, 6875000;
G = 5,232991;	lG = 0, 7187500;
H = 5,048065;	lH = 0, 7031250;
I = 4,958069;	lI = 0, 6 53125;
K = 5,001865;	lK = 0, 6992187;
L = 4,980416;	lL = 0, 6972656;
M = 4,991627;	lM = 0, 6982421;
N = 4,997242;	lN = 0, 6987304;
O = 5,000052;	lO = 0, 6989745;
P = 4,998647;	lP = 0, 6988525;
Q = 4,999350;	lQ = 0, 6989135;
R = 4,999701;	lR = 0, 6989440;
S = 4,999876;	lS = 0, 6989592;
T = 4,999963;	lT = 0, 6989668;
V = 5,000008;	lV = 0, 6989707;
W = 4,999984;	lW = 0, 6989687;
X = 4,999997;	lX = 0, 6989697;
Y = 5,000003;	lY = 0, 6989702;
Z = 5,000000;	lZ = 0, 6989700;

La méthode de Briggs utilise la relation

$\log(\sqrt{AB})=\frac{1}{2}(\log(A)+\log(B))$

$C=\sqrt{AB}$ et

$lC=\frac{1}{2}(lA+lB)$

Pour la suite des calculs, on procède de la façon suivante et on considère uniquement les variables A et B:

- si $\sqrt{AB}\leqslant 5$, alors :

A prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lA prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

- si $\sqrt{AB}>5$, alors :

B prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lB prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

Ce qui donne :

A= 3.1622776601683795	lA= 0.5
B= 5.623413251903491	lB= 0.75
A= 4.216965034285822	lA= 0.625
A= 4.869675251658631	lA= 0.6875
B= 5.232991146814947	lB= 0.71875
B= 5.0480657166674705	lB= 0.703125
A= 4.958068241684655	lA= 0.6953125
B= 5.002864610575233	lB= 0.69921875
A= 4.980416061248411	lA= 0.697265625
A= 4.991627716362686	lA= 0.6982421875
A= 4.99724300503361	lA= 0.69873046875
B= 5.00005301775164	lB= 0.698974609375

1) Vérifier les 4 premières lignes de calcul.

2) Compléter l'algorithme suivant écrit en Python, afin qu'il applique l'algorithme de Briggs pour le calcul de $\log(x)$ où x est un réel compris entre 10 et 100 avec une précision de 10^{-k} .
On initialisera l'algorithme avec :
A=10, B=100, lA=1 et lB=2

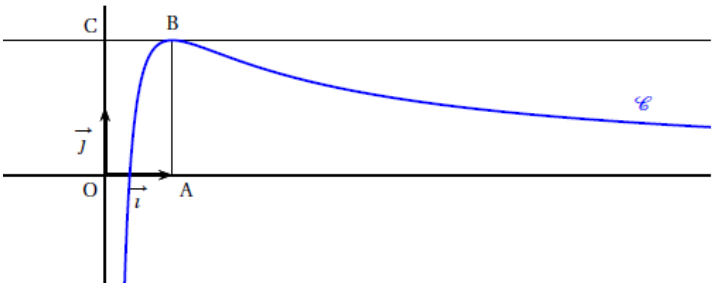
```
from math import *

def CalculeLog_x( x, k ):
    A = ............
    B = ............
    lA = ............
    lB = ............
    precision = 10**(............)
    while (B - x > ............ ):
        if (sqrt(A * B) < ......):
            ...... = sqrt(A*B)
            ...... = 1/2*(lA + lB)
        else:
            ...... = sqrt(A*B)
            ...... = 1/2*(lA + lB)
    return lB
```

3) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de log(85)

Ex 4-26 : ***Baccalauréat S – Métropole 20 juin 2013 – ex 2***

Fonction ln – utiliser une représentation graphique – étude de fonction – corollaire du TVI – **algorithme de dichotomie**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 , 0), (1 , 2), (0 , 2) ;
— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   c. En déduire les réels a et b.

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.
   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
from math import *

def f(x):
   y=2/x+2*log(x)/x
   return (y)

a=0
b=1
while (b-a)>0.1:
   m=(a+b)/2
   if f(m)<1:
      a=m
   else:
      b=m
print ("a=",a,"b=",b)
```

   a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

   b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
   c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Ex 4-27 : *Baccalauréat ES – Liban mai 2018 – ex 4*

Coût moyen de fabrication : Fonction ln – étude de fonction – corollaire du TVI – algorithme de dichotomie

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par

$$f(x)=\frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$.
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;25]$,

$$f'(x)=\frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

b. Résoudre dans $[1\,;25]$ l'inéquation $-3+\ln(x)>0$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;25]$.

d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1\leqslant x\leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- **Une équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f.
  L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y', y'' …
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y + ay' + by'' + ... = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{l} i = 0$

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x dans I, $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Remarques :

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction y, telle que $y' = f$.
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
  Donc G est une primitive de f sur I.
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.
  La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I. Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I,
  $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

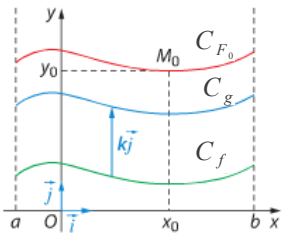
Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réels $(x_0 ; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

Preuve :

$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$
Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x)=a$ ($a \in \mathbb{R}$)		
$f(x)=x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)		
$f(x)=\frac{1}{x}$		
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)		
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x)=e^x$		

On retiendra aussi le tableau suivant :
Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a :

Une fonction de la forme	… admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq -1)$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	

3) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k\, e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$	On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

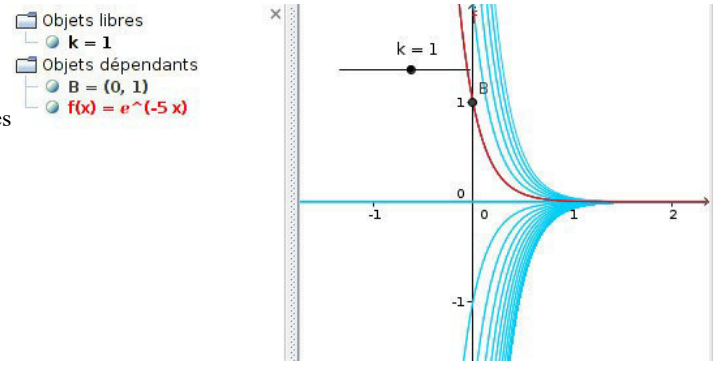
Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

Remarques :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$.

Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, …



L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=1$.

Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5\,y=0$ telle que $f(0)=5$

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)*

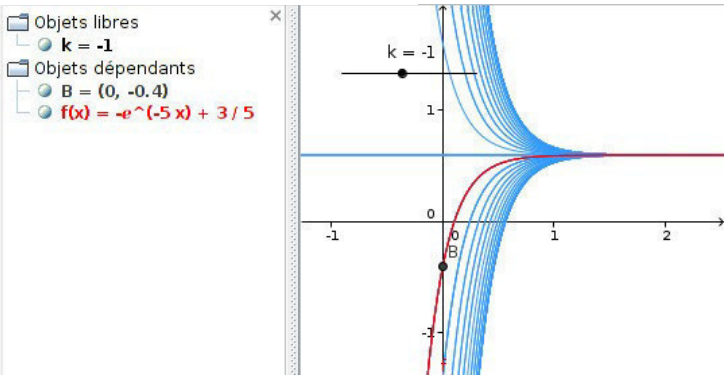
Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ où $k\in\mathbb{R}$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5\,y=3$.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=-0{,}4$.



Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5\,y=3$ telle que $f(0)=1$.

Primitives :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x dans I, $F'(x)=f(x)$.

L'usage est d'utiliser la majuscule correspondante pour noter une primitive d'une fonction.

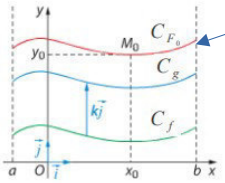
Lien entre deux primitives :

Si F est une primitive de f sur I, alors f admet **une infinité** de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x)=F(x)+k$ où $k\in\mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Condition initiale et unicité :

Pour tout couple de réels $(x_0\,;y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0)=y_0$



Règles de calculs :

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I

Fonctions	Primitives ($k\in\mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x)=a$ ($a\in\mathbb{R}$)	$F(x)=ax+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)+k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$)	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+k$	$\mathbb{R}$

On retrouve la même formule en posant $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$

Attention :
Dans de nombreuses situations, on ne sait pas calculer une primitive. (Même si elle existe)

Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a :

Une fonction de la forme	… admet pour primitive sur I les fonctions :
$u'e^u$	e^u+k, où $k\in\mathbb{R}$
$u'\times u^n$, où $n\in\mathbb{Z}$ $(n\neq-1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+k$, où $k\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x\in I$, $u(x)>0$	$2\sqrt{u}+k$, où $k\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u}$, avec pour tout $x\in I$, $u(x)>0$	$\ln(u)+k$, où $k\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u^2}$, avec pour tout $x\in I$, $u(x)\neq0$	$-\dfrac{1}{u}$

En plus du cours

L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y', y'' …

Équations différentielles :
L'équation différentielle $y'+5y=0$ peut aussi se noter $f'(x)+5f(x)=0$ ou encore $\dfrac{dy(x)}{dx}+5y(x)=0$

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction f.

- Quand une équation est de la forme $y+ay'+by''+\ldots=0$, on dit qu'elle est **linéaire**.
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde. (Hors programme en terminale)

Équations différentielles du premier ordre :

Équation linéaire du premier ordre homogène :

La somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme :

$$y(x)=k\,e^{-ax} \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Pour tout couple de réel $(x_0\,;y_0)$, l'équation $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant :

Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme

$$y(x)=k\,e^{-ax}+\frac{b}{a} \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Pour tout couple de réel $(x_0\,;y_0)$, l'équation $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Essayez donc … ça marche

Méthode générale :
Hors programme, mais … tellement importante !

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

INITIATION

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Primitives

Ex 5-1 : $y'=f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'=2$

b) $y'=e^x-1$

c) $y'=x^2$

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$, des fonctions f , g et h définies par $f(x)=2$, $g(x)=e^x-1$ et $h(x)=x^2$

Ex 5-2 : ***Déterminer les primitives***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=-\frac{5}{x^3}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

3) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{3}e^x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 5-3 : ***Déterminer une primitive vérifiant une condition***

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3e^x+x^2+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$ et telle que $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=0$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1$ sur sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=4$

Ex 5-4 : ***Primitives de la fonction racine carrée***

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 5-5 : ***Primitives de fonctions composées***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=x^3(x^4+1)$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=5e^{2x-3}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 5-6 : ***Un cas compliqué***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 5-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $y'-3y=0$

2) $y'+2y=0$

3) $2y'-y=0$

Ex 5-8 : ***Avec une condition initiale***

Soit l'équation différentielle (E_0) : $2y'+y=0$
1) Résoudre 1'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 5-9 : ***Découverte d'une propriété fondamentale***

Soit l'équation différentielle $(E): y'-2y=5$

1) Résoudre l'équation $(E_0): y'-2y=0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(E): y'-2y=5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(E_0): y'-2y=0$, alors y_0+y_p est solution (E).

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :
Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donner dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y'=ay+b$

Ex 5-10 : ***Appliquer la formule du cours***

Soit l'équation différentielle $(F): 3y'-2y=\ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0)=1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Pour l' exercice 11 on appliquera la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 5-11 :

Soit l'équation différentielle $(E): y'-y=x^2-x-1$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'-y=0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^2-x$ est une solution de l'équation différentielle (E) .

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=1$

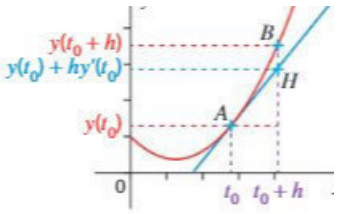
Ex 5-12 : ***La méthode d'Euler***

La modélisation de nombreux problèmes conduit à la résolution d'équations différentielles . Ces équations différentielles sont souvent très difficile à résoudre et il faut alors se contenter de résolutions approchées.
La méthode d'Euler permet d'obtenir point par point la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux qui constitue alors une solution approchée de l'équation différentielle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

On considère l'équation différentielle $y'=ay+f$ et on note y la solution de l'équation différentielle telle que $y(\alpha)=\beta$, où α et β sont des réels donnés.

L'idée de la méthode repose sur le principe que pour tout réel t_0 , la courbe représentative de y et sa tangente au point d'abscisse t_0 sont presque confondues.



Soit h un réel strictement positif et proche de 0.

On a alors : $y(t_0+h)\approx y(t_0)+h\,y'(t_0)$

1) En déduire que $y(t_0+h)\approx y(t_0)+h(a\,y(t_0)+f(t_0))$

2) On considère maintenant l'équation différentielle $y'=y$ avec comme condition initiale $y(0)=1$

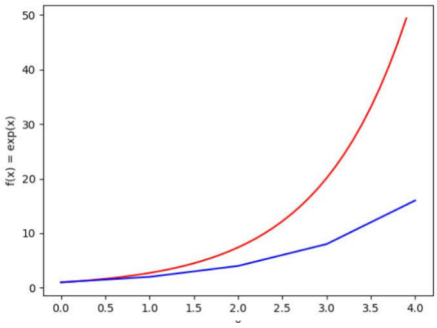
Dans ce cas $a=1$ et f est la fonction nulle.

a) Montrer que $y(0+h)\approx 1+h$

b) Déterminer une approximation de $y(t_0+h)$

3) On considère le programme écrit en python ci-dessous :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

debut = 0
fin = 4
pas = 0.1
x = np.arange(debut,fin,pas)
f = np.exp(x)
plt.plot(x,f,"r") # trace une courbe rouge
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x) = exp(x)')

def Euler (h,n):
    x=0
    y=1
    Lx=[x]
    Ly=[y]
    for i in range(n):
        x=x+h
        Lx.append(x)
        y=y+h*y
        Ly.append(y)
    plt.plot(Lx,Ly,"b")
    plt.show()
    return(Lx,Ly)
Euler(1,4)
```



a) En partant de $y(0)=y'(0)=1$, montrer que l'on obtient $y(1)\approx 2$, $y(2)\approx 4$ et $y(3)\approx 8$ et placer sur le repère ci-dessus les points A(0;1), B(1;2), C(2;4) et D(3;8).

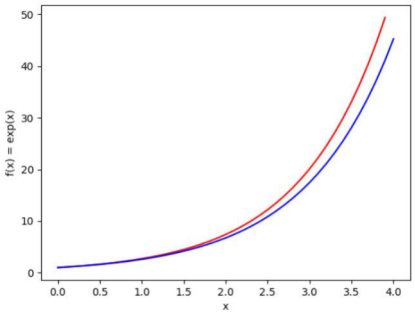
b) Dans la fonction Euler du programme, quelles valeurs a-ton attribuées à h et à n pour obtenir l'affichage de la courbe bleue ci-dessus ?
En déduire le rôle des variables h et n .

c) Déterminer la solution de l'équation $y'=y$ avec la condition initiale $y(0)=1$ et vérifier que sa courbe représentative est la courbe rouge du graphique précédent.

d) Tester la fonction Euler pour différentes valeurs de h et n .

Ci-contre, un exemple

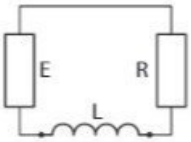
avec $h=0,1$ et $n=40$



Problèmes

Ex 5-13 : ***Circuit électrique***

Un circuit électrique en série comprend un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i (en ampère) est une fonction du temps t (en seconde) et est solution de l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{1}{5}i'(t)+100\,i(t)=10 \quad (\mathrm{E})$$

1) Vérifier que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(t)=-\frac{1}{10}e^{-500t}+\frac{1}{10}$ est la solution cherchée de l'équation différentielle (E) en n'oubliant pas de vérifier la condition initiale.

2) Étudier les variations de la fonction i sur $\mathbb{R}^+$, puis tracer le tableau de variations de i, en précisant les limites.

3) Déterminer l'instant t, à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à 0,095 A.
Donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3}.

Ex 5-14 : ***Baccalauréat S – Extrait de Métropole juin 2003***

Modèle d'évolution de bactéries : Équations différentielles

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{M}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. **a.** Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E}'\text{)} \qquad y' + ay = \frac{a}{M}.$$

   b. Résoudre (E′).

   c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

   b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

INTÉGRALES

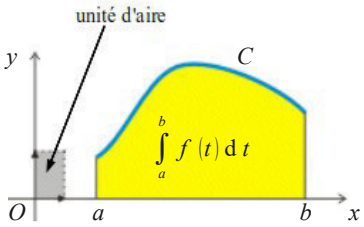
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$



On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a\,;b]$ le domaine limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

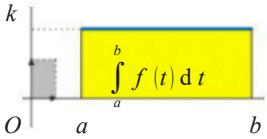
Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".

  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable :
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est

Exemples :

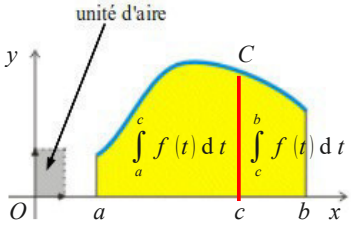
- Si $a=b$, alors
- Pour $k>0$,



B) RELATION DE CHASLES

Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel . On a :

-
-

D) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

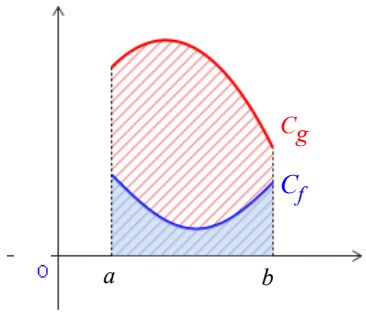
Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a\leqslant b$ on peut intégrer l'inégalité $f\leqslant g$ sur $[a\,;b]$.

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :

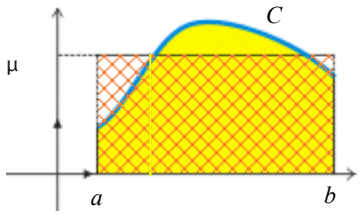


E) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

2) ÉTUDE DE $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f *sur* $[a\,;b]$ s'annulant en a.

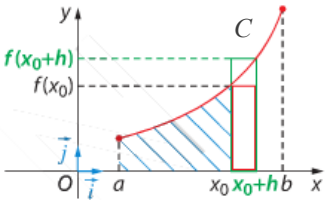
Preuve : *idée de preuve (Cas où f est croissante)*

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h\neq 0$ tel que x_0+h est dans $[a\,;b]$ par $T(h)=\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$

Si $h>0$, $F(x_0+h)-F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 te x_0+h.

(Si $h<0$, on raisonne de même avec $F(x_0)-F(x_0+h)$)

Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$
On a alors :



$$h\,f(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant h\,f(x_0+h)\Leftrightarrow f(x_0)\leqslant\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0, on en déduit que :
$\lim\limits_{h\to 0} T(h)=f(x_0)$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.
L'unicité résulte du fait que $F(a)=0$.

Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I.

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I, on a :

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I, la différence $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(b)-F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a :

On en déduit que :

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

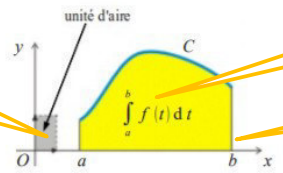
Pour comprendre la notation, on peut imaginer que l'on fait la « somme » de a à b des rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur se rapprochant de zéro notée dt.

On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le réel mesurant l'aire, **en unités d'aire**, de la partie du plan (appelée **domaine**) limitée par la courbe C, l'axe $(\mathrm{O}\,x)$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$.

La variable t est appelée variable "muette". On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable.

Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 2 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est 6 cm²

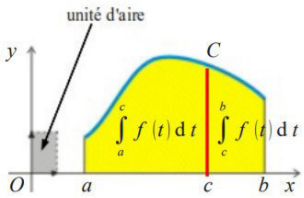
a et b sont les bornes de l'intégrale



Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



Bornes inversées :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$ (en effet par extension de la relation de Chasles : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$)

Linéarité de l'intégration :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel. On a :

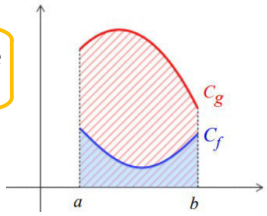
$$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Positivité et ordre :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$:

- Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$
- Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

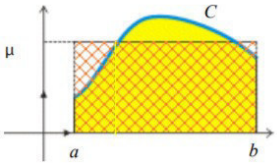
On dit qu'on intègre l'inégalité positive



Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre $\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



La fonction $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f *sur* $[a\,;b]$ s'annulant en a.

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

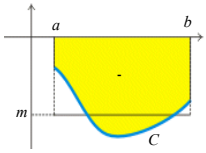
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$$ où F est une primitive de f sur I.

Pour tous réels a et b de I, la différence $[F(t)]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

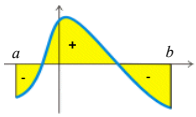
Interprétation graphique :

On dit parfois que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Si f est **une fonction continue qui change de signe** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Calculs d'aires

Intégrale d'une fonction continue et positive
Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 6-1 : ***Vrai ou faux***

1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.

2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.

3) Le résultat de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dépend de x .

4) Si f est une fonction positive et si $a<b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être strictement négative.

Ex 6-2 :

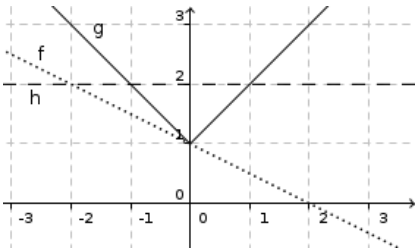
Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a;b]$, puis calculer son intégrale sur $[a;b]$.

1) $f(x)=3x-1$ sur $[2;5]$

2) $f(x)=|x-3|$ sur $[1;4]$

Ex 6-3 : ***À partir d'une représentation graphique***

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1;1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



Ex 6-4 : ***Avec une fonction affine par morceaux***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x\leq 0 \\ x+2 \text{ si } 0<x\leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+7 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2;4]$.

2) Déterminer $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex 6-5 : ***Avec un demi-cercle***

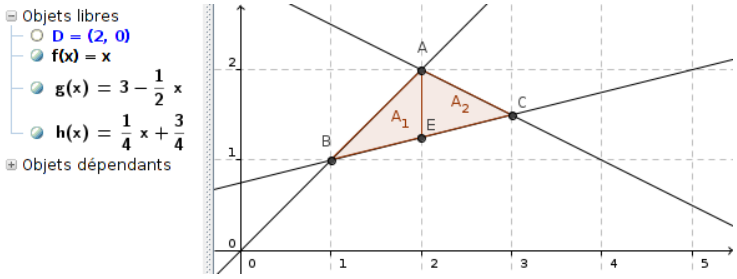
Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.

2) Montrer que C_f est un demi-cercle.

3) Déterminer $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex 6-6 :



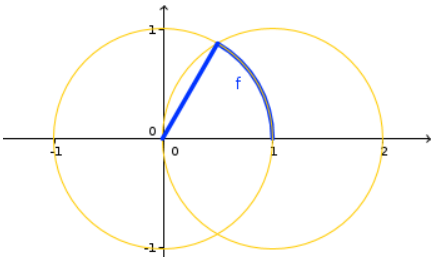
1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2) En calculant $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x$ déterminer l'aire A_1.

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

Ex 6-7 :

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)



Déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

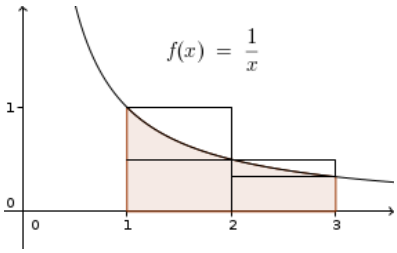
Ex 6-8 : ***Algorithme : sommes de Riemann***

On considère l'algorithme ci-dessous :

1	a=float(input("a="))	lire,a,b,p
2	b=float(input("b="))	s1 ← 1
3	p=float(input("p="))	s2 ← 0
4	s1=1	n ← 0
5	s2=0	tant que (s1-s2)>p faire
6	n=1	n ← n+1
7	while (s1-s2>p):	s1 ← 0
8	n=n+1	s2 ← 0
9	s1=0	Pour i allant de 0 à n-1
10	s2=0	s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
11	for i in range(0,n):	s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
12	s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)	Fin pour
13	s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)	Fin tant que
14	print(s1)	Afficher s1,s2
15	print(s2)	

1) On choisit $p=0,1$.
Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?

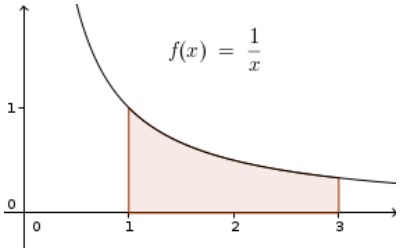
À quoi correspond cette aire ?



La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme.

Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s1 et s2.

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s1 et s2 au début de l'algorithme

4) Faire tourner le programme et déterminer ce qu'il renvoie pour p=0,01

Propriétés de l'intégrale

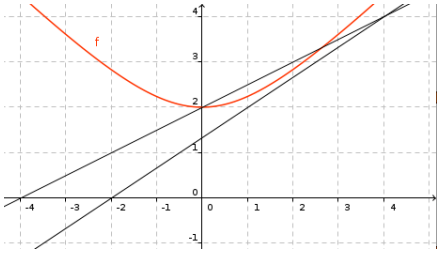
Ex 6-9 : ***Encadrer une intégrale***

1) Démontrer que pour tout $x\in[0;1]$, on a $1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$, puis en déduire un encadrement de $I=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) Démontrer que pour tout $x\in[0;8]$, on a $1\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 3$, puis en déduire un encadrement de $J=\int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f:x \longmapsto \sqrt{4+x^2}$.

En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,dx$



Ex 6-10 : ***Encadrer une intégrale - Relation de Chasles***

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=e^{x^3}$.

On pose $I=\int_{-1}^{1} e^{x^3}\,dx$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x\in[-1;1]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$.
En déduire un encadrement de I.

3) Démontrer que :
- $\forall x\in[-1;0]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$
- $\forall x\in[0;1]$, $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I.

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 … et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I … l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'ex 8 !

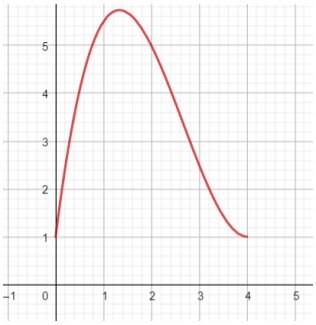
Valeur moyenne

Ex 6-11 : ***Estimation graphique***

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[0;4]$ par

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x+1$

1) Estimer graphiquement la valeur moyenne de f sur $[0;4]$.



2) Calculer la valeur moyenne de f , puis vérifier le résultat obtenu à la question 1.

Ex 6-12 : ***Vitesse moyenne***

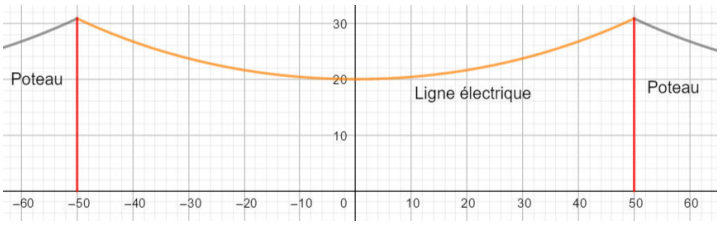
Un mobile se déplace à la vitesse $v(t)=2t^2+5t$ (t en seconde et $v(t)$ en $m\,.\,s^{-1}$).

Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet entre les instants 0 et 100 s ?

Ex 6-13 : ***ligne électrique***

La hauteur d'une ligne électrique entre deux poteaux longue de 100 m est modélisée, par la fonction h définie sur $[-50,50]$ par :

$$h(x)=10\left(e^{\frac{x}{50}}+e^{-\frac{x}{50}}\right)$$



Déterminer (à 10^{-2} près) la hauteur moyenne de la ligne électrique.

Ex 6-14 : ***Valeur moyenne et suites***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=e^{-x}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n;n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n;n+1]$, $e^{-(n+1)}\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Ex 6-15 :

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

2) $\int_{-1}^1 x^4(x^5-1)\,dx$

3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\,du$

4) $\int_0^1 e^x(e^x+9)\,dx$

Ex 6-16 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $I=[0;5]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

1) Démontrer que f est continue et positive sur $I=[0;5]$.

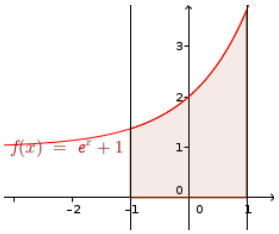
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

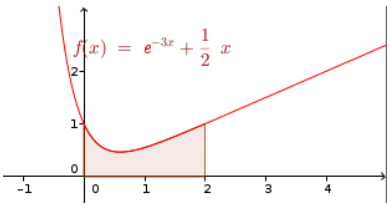
3) En déduire $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

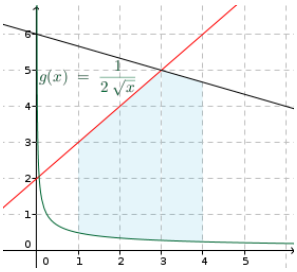
Ex 6-17: ***Calculs d'aires***

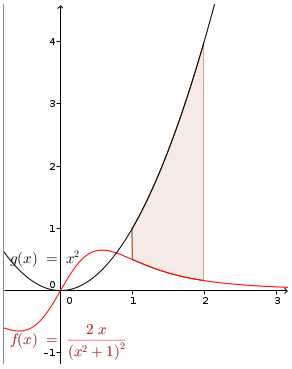
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

Remarque : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$









Ex 6-18 : ***Une primitive de la fonction ln***

Soit F et G deux fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x)=x\ln(x)-x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $[1;+\infty[$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, $F(x)=G(x)+k$.

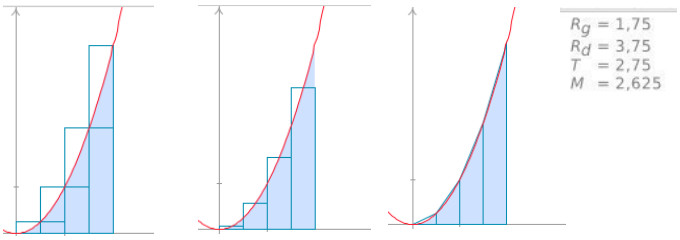
3) Calculer k .

4) Calculer $\int_1^e \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Ex 6-19 : ***Différentes méthodes d'approximation***

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

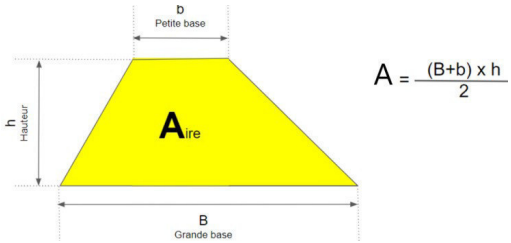
1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente.

2)

Rappel :



Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il applique la méthode des trapèzes (avec 10 trapèzes) à $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

```
def f(x):
    return ( ......... )

def MethodeTrapeze(a, b, N):
    pas = .........
    x = .........
    Aire = .........
    for i in range(N):
        AireTrapeze = .........
        Aire = .........
        x = .........
    return Aire

print(MethodeTrapeze(1,2,10))
```

3) Calculer $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ et comparer avec l'approximation obtenue.

4) a) Tester le programme **MethodeTrapeze**.py (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode des trapèzes dessinée avec 10 trapèzes.

b) Modifier le programme pour visualiser la méthode des trapèzes avec 12 trapèzes pour calculer $\int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\,\mathrm{d}x$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 6-20 : ***Vrai ou faux***

1) Si f est une fonction négative et si $a<b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.

2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.

3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.

4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ est fausse.

Ex 6-21 : ***Propriétés de l'intégrale***

Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a;b]$.

On pose $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$

3) $c \in [a;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$

4) $\int_a^b -3x+\frac{2}{3}g(x)\ \mathrm{d}x$

Ex 6-22 : ***Calculer une intégrale avec une primitive***

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{e}^x-1}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\mathrm{d}x$

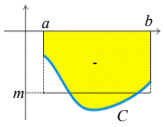
2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$

3) $\int_1^2 \left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$

Ex 6-23 : ***Calculs d'aires***

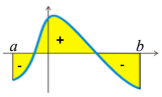
Propriété :

Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
On dit parfois que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

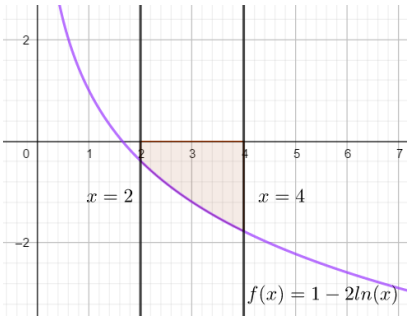


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



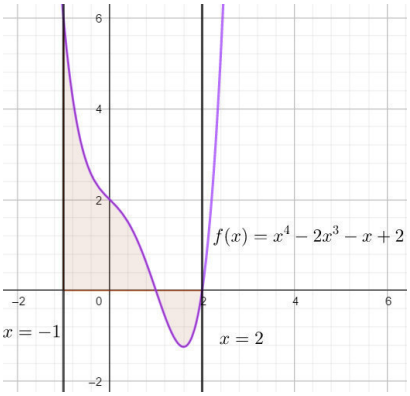
1) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié.
Utiliser le résultat de l'Ex 18



2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=x^4-2x^3-x+2$

a) Calculer $f(1)$

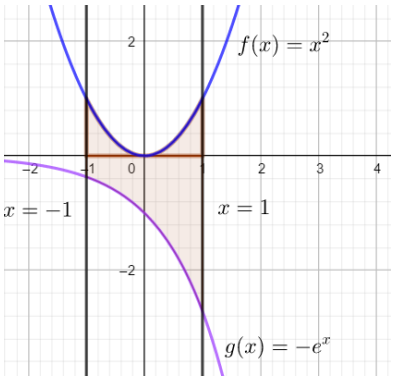
b) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié.



3) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié .

Aide :

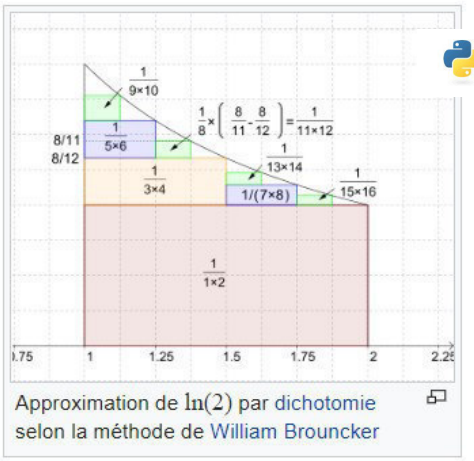
En translatant du vecteur $k\vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, tout devient positif et l'aire cherchée est inchangée . On a alors :



$$\int_a^b f(x)+k\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)+k\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$$

Problèmes et algorithmes

Ex 6-24 : ***Une approximation de ln(2) - Algorithme de Brouncker***



En 1668, William Brouncker publie le développement en série de ln(2), résultat qu'il a établi dès 1657 en découpant l'aire sous l'hyperbole en rectangles venant boucher les trous par dichotomie :

$$\ln(2)=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)\times(2k+2)}+\ldots$$

En utilisant cette formule, compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin d'obtenir une approximation de ln(2) pour $k=100$:

```
1  def Brouncker ( N ):
2      Ln_2 = ……
3      ……..……..……..……..……..
4          Ln_2 = ……..……..……..……..……..
5      return Ln_2
6
7  print(Brouncker(100))
```

Ex 6-25 : ***Méthode Monte-Carlo - Une approximation de ln(2)***

Exemple pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

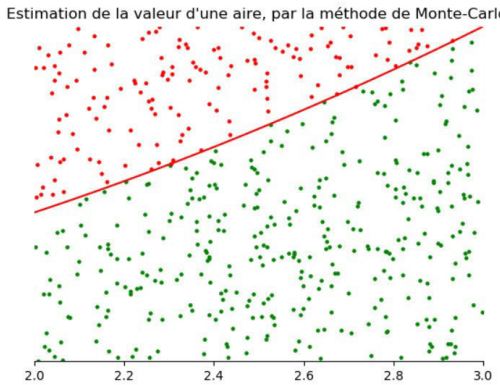
Cette méthode repose sur la loi des grands nombres.
- On définit un rectangle R de cotés [2 ;3]×[0 ; y_{max}] tel que $0\leqslant x^2\leqslant y_{max}$ pour tout $2\leqslant x\leqslant 3$

- On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.

1) Déterminer y_{max}

2) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de la fonction carrée ?

3) Que nous dit la loi des Grands Nombres ?



4) Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'appliquer la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$ avec $n=1000$.

```
1  from random import uniform
2
3  def f(x):
4      return (x**2)
5
6  def MethodeMonteCarlo(a, b, yMax, n):
7      compteur = 0
8      for i in range(n):
9          x = uniform(a,b)
10         y = uniform(0,yMax)
11         if (f(x) >= y):
12             compteur = compteur + 1
13
14     Aire = yMax * (b - a) * compteur / n
15     return Aire
16 print(MethodeMonteCarlo(2,3,9,1000))
```

a) Testez le programme **MethodeMonteCarlo**.py (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Monte-Carlo et vérifier qu'on obtient une bonne approximation de $\frac{19}{3}$.

b) Modifier quelques lignes de ce programme pour obtenir une approximation de ln(2).

Ex 6-26 : *Baccalauréat ES Métropole sept 2018 ex 4*

Recette totale : fonction ln – valeur moyenne

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.
2. On admet que, pour tout $x \in [1\,;\,5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

   a. Montrer que, pour tout $x \in [1\,;\,5]$,

$$r'(x) = \frac{x+2}{x}$$

   b. Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.

3. a. Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.
   b. Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.
4. a. Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1\,;\,5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
   Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1\,;\,5]$ par

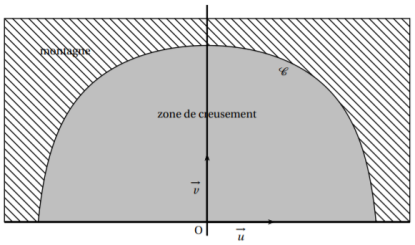
$$G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$$

   est une primitive de la fonction g.
   b. En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
   c. Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

Ex 6-27 : ***Baccalauréat S Pondichéry Avril 2017 ex 3***

Zone de creusement : fonction ln – aire - algorithme somme rectangles

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\,;\,2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\,;\,2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\,;\,2,5]$.
   En déduire le signe de f sur $[-2,5\,;\,2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est
   $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.
   On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.
   a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
   Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
   b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

```python
from math import log
def f(x):
    y=log(-2*x**2+13.5)
    return(y)
S=0
n=int(input("n="))
for k in range(1,n+1):
    r=2.5/n*f(2.5/n*k)
    S=S+r
print(S)
```

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	…	…
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	…
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	…	…
Affichage	$S = \ldots$		

CONVEXITÉ DES FONCTIONS

1) DÉFINITIONS

Définitions :

• Une fonction *f*, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située en dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.

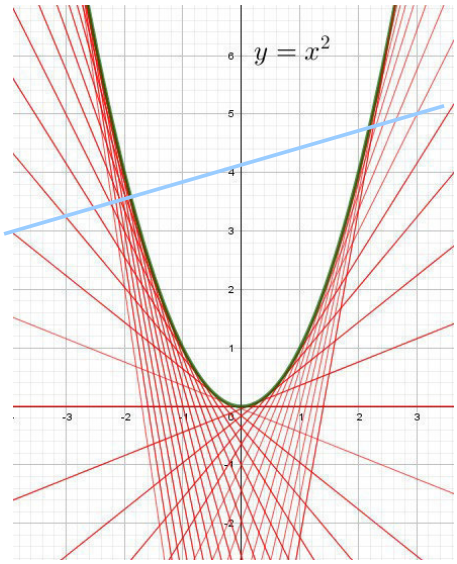
• Une fonction *f*, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.

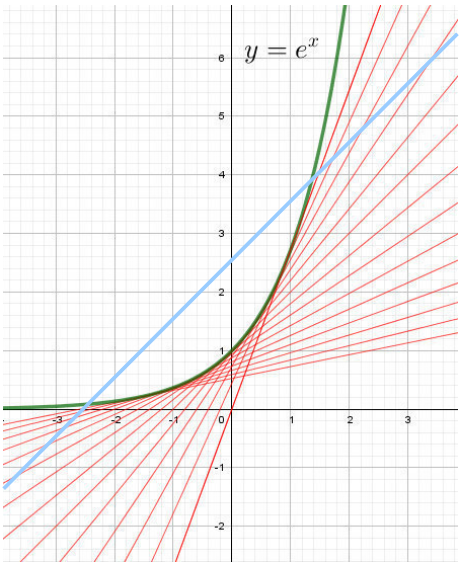
Autres définitions :

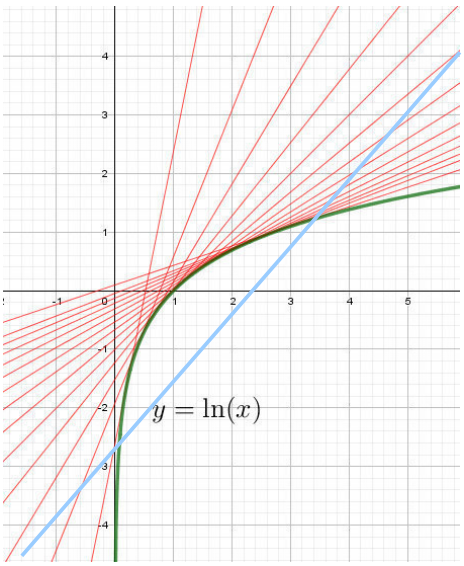
• Une fonction *f*, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

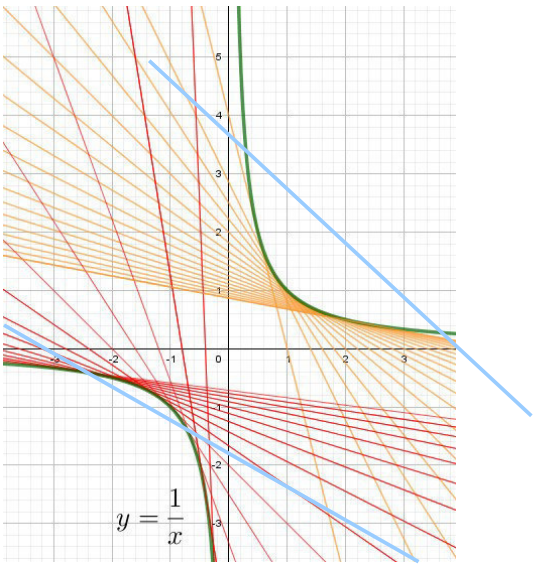
• Une fonction *f*, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Exemples :









2) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I**.

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I**.

3) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE SECONDE

La dérivée de la dérivée étant la dérivée seconde, on en déduit facilement cette nouvelle propriété ...

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I**.

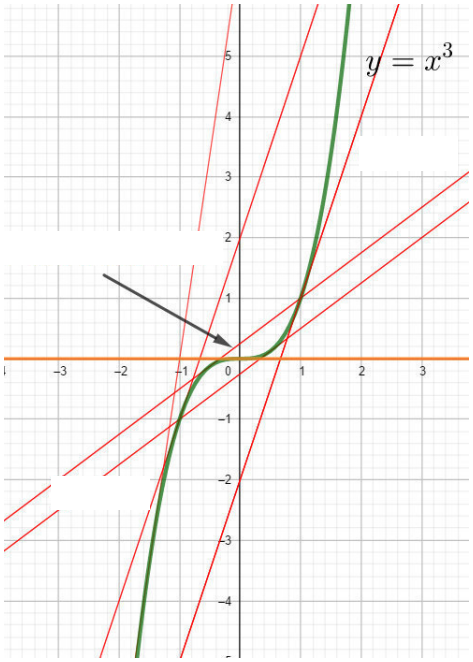
• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I**.

Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on dit que f est **deux fois dérivable** sur I.

4) POINT D'INFLEXION

Définition :

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente



Propriété :

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.

Exemple : Mise en évidence par le calcul du point d'inflexion de la fonction $f : x \longmapsto x^3$.

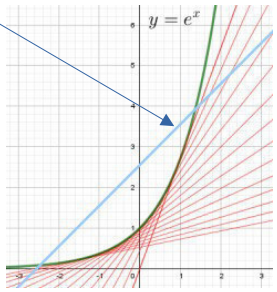
Fonction convexe :

Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I :

• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

• si sa représentation graphique est entièrement **située au-dessus de chacune de ses tangentes.**



Lien avec la dérivée :

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I**.

Lien avec la dérivée seconde :

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I**.

Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on dit que f est **deux fois dérivable** sur I.

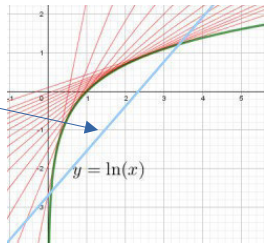
Fonction concave :

Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I :

• si sa représentation graphique est entièrement située **au-dessus de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses tangentes.**



Lien avec la dérivée :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I.**

Lien avec la dérivée seconde :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I**

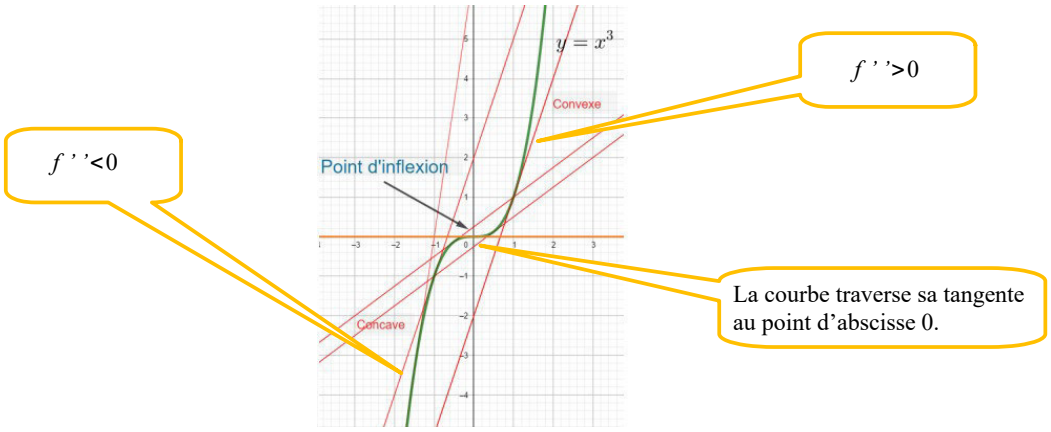
Point d'inflexion :

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Lien avec la dérivée :

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.



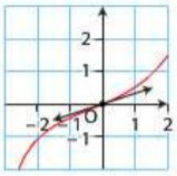
Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Modèles définis par une fonction d'une variable

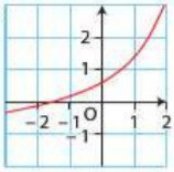
Ex 7-1 : ***À partir d'une courbe***

Pour chaque courbe, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. Préciser les éventuels points d'inflexion.
On considère que le comportement de la courbe se poursuit de manière identique en dehors de la fenêtre.

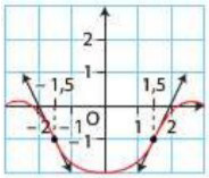
1)



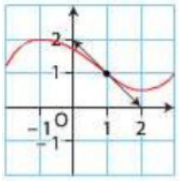
2)



3)



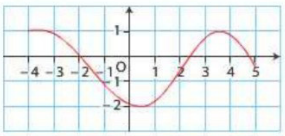
4)

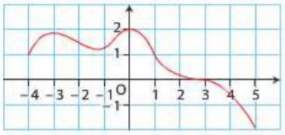


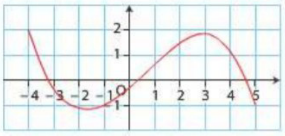
Ex 7-2 : ***À partir d'une courbe***

Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$
- f' s'annule au moins trois fois
- la représentation graphique de f admet quatre points d'inflexion.







Ex7-3 : ***À partir d'un tableau de variation de f'***

Voici le tableau de variation de la fonction f' d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	1

1) Déterminer le sens de variation de f

2) Déterminer la convexité de f

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 7-4 : ***À partir du tableau de signe de de f''***

Voici le tableau de signe de la fonction f'' d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

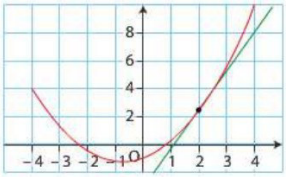
1) Déterminer le sens de variation de f'

2) Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses des éventuels point d'inflexion.

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 7-5 : ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle [−4 ; 4].

2) Pourquoi peut-on étendre ce résultat à $\mathbb{R}$?

3) En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1\geqslant\frac{11}{4}x-3$

4) Montrer alors que $x^2\geqslant 4x-4$

Ex 7-6 : ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

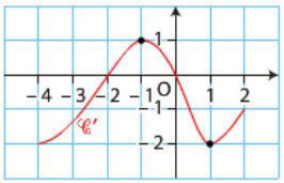
f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
1) Rappeler la convexité de f .

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) En déduire que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Ex 7-7 : ***Convexité à partir de la courbe représentative de f'***

Dans un repère, on a tracé la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f' dérivable sur un intervalle [−4 ; 2].

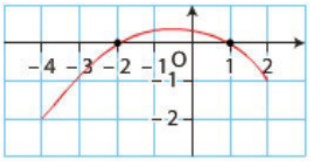


Déterminer, par lecture graphique, la convexité de f .

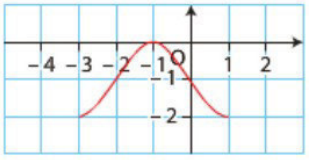
Ex 7-8 :

Dans chacun des cas, déterminer la convexité de la fonction et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1) f est une fonction deux fois dérivable sur [−4 ; 2] dont la dérivée f'' est représentée ci-contre.

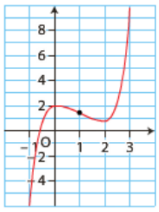


2) g est une fonction deux fois dérivable sur [−3 ; 1] dont la dérivée g'' est représentée ci-contre.

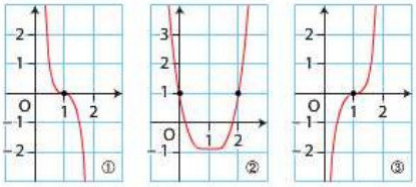


Ex 7-9 : ***Lien entre les représentations graphiques de f et f''***

Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur [−1 ; 3].



Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente celle de la fonction dérivée seconde f'' de f ?



Étude du signe de f'' pour déterminer la concavité

Ex 7-10 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-11 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+2x^3+12x^2-8x-6$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-12 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+1$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-13 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}+7$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-14 : ***Position par rapport aux tangentes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$.

On note C_f sa courbe dans un repère. Étudier la position des tangentes à C_f en 4 et en -4 par rapport à la courbe C_f .

Ex 7-15 : ***Famille de fonctions***

Pour tout entier n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+nx$

On note C_n la courbe représentative de f_n .
Montrer que C_n admet un point d'inflexion pour tout entier n .

Ex 7-16 : ***Deux points d'inflexion***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx$ où a , b , c et d sont des réels avec $a\neq 0$.

Déterminer à quelle condition la courbe représentative C_f de f dans un repère admet exactement deux points d'inflexion.

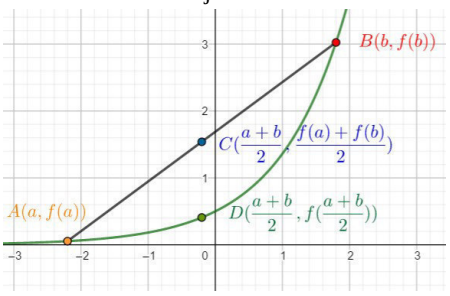
Problèmes

Ex 7-17 : ***Position par rapport aux sécantes et moyenne***

1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, compléter les propriétés suivantes que nous allons seulement conjecturer.

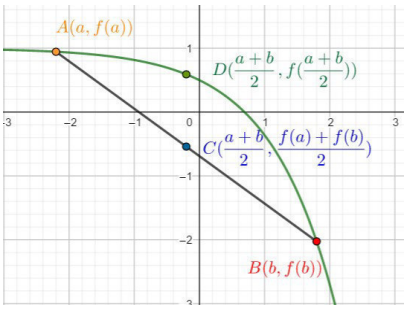
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors :

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant$



- Si f est une fonction concave sur un intervalle I, alors :

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant$



2) Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a<b$.
Dans chaque cas, démontrer l'inégalité en étudiant la convexité d'une fonction bien choisie.

a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

c) $\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$

d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

Ex 7-18 : ***Baccalauréat ES Métropole - juin 2014 - ex 4***

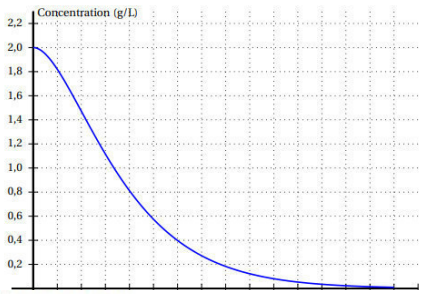
Concentration d'un médicament : Fonction exp – TVI - Convexité

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.



B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par $f(x)=(x+2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x)=-0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x)=0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	`deriver` $((x+2)*\exp(-0.5*x))$
	$\exp(-0.5x)-0.5*\exp(-0.5x)*(x+2)$
2	`deriver` $(\exp(-0.5*x)-0.5*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2)$
3	`factoriser` $(-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\exp(-0.5*x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Ex 7-19 : ***Baccalauréat ES Amérique du sud - novembre 2018 - ex 1***

Taux d'alcoolémie : Fonction exp – TVI – Convexité

f est la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ en le justifiant.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0\,;\,12]$.
   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. **a.** Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
   b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?
   Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

1) LOI UNIFORME DISCRÈTE

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

On dit que X suit **la loi uniforme** sur $\{1;2;3;\ldots;n\}$ si pour tout $k\in\{1;2;3;\ldots;n\}$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

L'espérance mathématique de X vaut $\mathrm{E}(X)=\frac{n+1}{2}$

Preuve :

2) LOI BINOMIALE

A) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n\in\mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Remarque : Lors de tirages successifs avec remise, les expériences sont indépendantes.

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

B) SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve ayant deux éventualités :

l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.

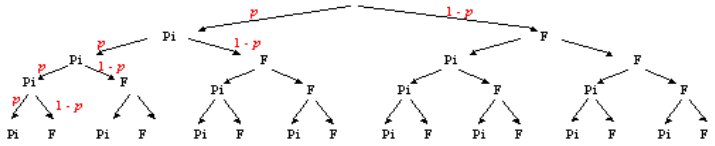
L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

- L'espérance vaut p
- La variance vaut $p(1-p)$
- L'écart type vaut $\sqrt{p(1-p)}$

Exemple :

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".

Notons $P(Pi)=p$ et $P(F)=1-p$
(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi)=\frac{1}{2}$ et $P(F)=\frac{1}{2}$).



On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)$ est

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

Elle est égale à

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et on a justifié que $P(X=3)=4\times p^3(1-p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$p^0(1-p)^4$	$4\,p^1(1-p)^3$	$6\,p^2(1-p)^2$	$4\times p^3(1-p)$	$p^4(1-p)^0$

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque :
On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès)

C) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant k ($k\in\mathbb{N}$ et $k\leqslant 4$) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

Définition :

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k\in\mathbb{N}$ et $k\leqslant n$) pour n répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$.

On l'appelle **coefficient binomial** . $\binom{n}{k}$ Se lit " k parmi n ".

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n, et pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a :
- De plus, si $n\geqslant 1$ et $1\leqslant k\leqslant n-1$, alors

D) TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal** .

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leqslant n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

« Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

E) LOI BINOMIALE

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

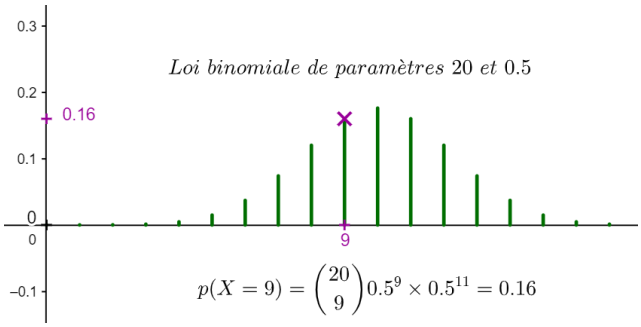
Définition :

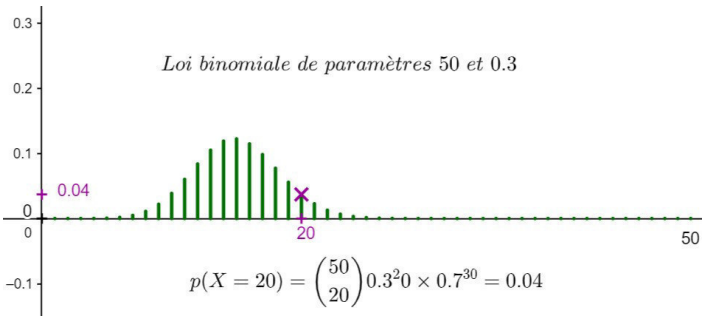
On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

Cette loi est parfois notée $B(n\,;p)$

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probas_discretes/Loi_binomiale.html





Propriété :

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X)=np$ et pour variance $V(X)=np(1-p)$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X)=$

3) LOI GÉOMÉTRIQUE

Définition et propriété :

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$.

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès.
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.

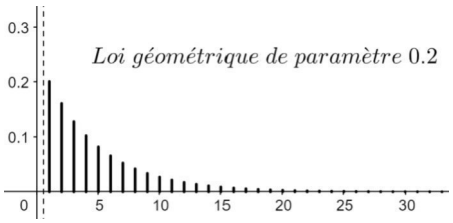
Cette loi est parfois notée $G(p)$

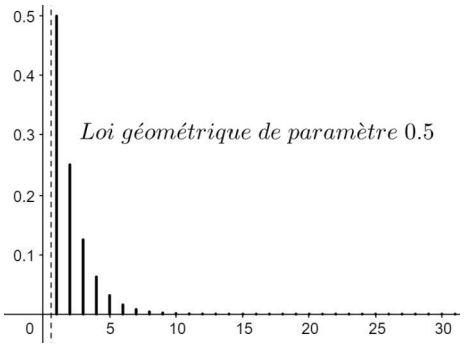
Pour tout entier $k \neq 0$,

Preuve :

On répète l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir le premier succès.
Avant le premier succès, il y a bien sûr $k-1$ échecs .
Comme les répétitions sont indépendantes, on effectue le produit des probabilités des $k-1$ échecs et du succès.

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probas_discretes/loi_geometrique.html





Propriété : Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

Pour tous entiers naturels k et m non nuls, on a :

Remarque :

On dit que X est sans mémoire, ce qui signifie que la probabilité que X prenne des valeurs supérieures à $k+m$ sachant que X est supérieure à k ne dépend pas de k, mais seulement de m.

Propriété :

La loi géométrique de paramètre p a pour espérance mathématique $E(X)=\frac{1}{p}$ et pour variance $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X)=$

Loi uniforme discrète :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

On dit que X suit **la loi uniforme** sur $\{1;2;3;\ldots;n\}$ si pour tout $k\in\{1;2;3;\ldots;n\}$ $\quad P(X=k)=\frac{1}{n}$

Espérance :

L'espérance mathématique de X vaut $E(X)=\frac{n+1}{2}$

Répétitions d'expériences identiques et indépendantes:

On considère n (où $n\in\mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Lors de tirages successifs avec remise,les expériences sont indépendantes.

Épreuve de Bernoulli :

On écrit Bernoulli et non Bernouilli

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités :
l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.
L'éventualité S correspondra souvent au "**succès**" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "**l'échec**".

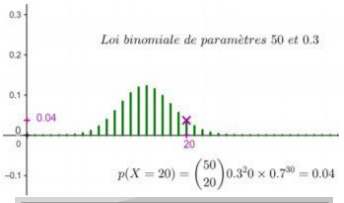
Schéma de Bernoulli :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Loi binomiale : $B(n\,;p)$

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus sur les n répétitions. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$
- pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $\quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$



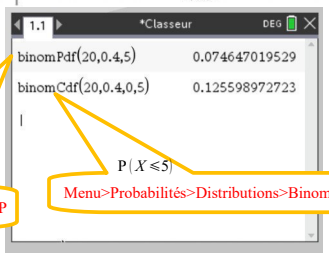
Espérance, variance et écart type :

$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Calculatrices :

Les calculatrices de lycée permettent de calculer directement $P(X=a)$ et $P(X\leqslant a)$.

Aujourd'hui, on ne s'amuse plus à faire à la main ce type de calcul.
Voilà un exemple avec une Ti-nspire pour calculer $P(X=5)$ et $P(X\leqslant 5)$ où X suit la binomiale $B(20\,;0{,}4)$



$P(X=5)$
Menu>Probabilités>Distributions>Binomiale DdP

$P(X\leqslant 5)$
Menu>Probabilités>Distributions>Binomiale FdR

Coefficients binomiaux :

$\binom{n}{k}$ Se lit " k parmi n "

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k\in\mathbb{N}$ et $k\leqslant n$) pour n répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$.

- Pour tout entier naturel n, et pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- De plus, si $n\geqslant 1$ et $1\leqslant k\leqslant n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

Triangle de Pascal :

Avec une Ti-nspire

Menu>Probabilités>Combinaisons

nCr(6,2) =15

Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0}=1$

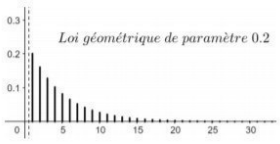
n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3 +	3 =	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k\leqslant n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.

Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n}=1$

Loi géométrique : $G(p)$

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p .
On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès. On dit que X suit **la loi géométrique de paramètre p** .
Pour tout entier $k\neq 0$, $P(X=k)=p\times(1-p)^{k-1}$



Loi sans mémoire :

Pour tous entiers naturels k et m non nuls, on a : $P_{X>k}(X>k+m)=P(X>m)$

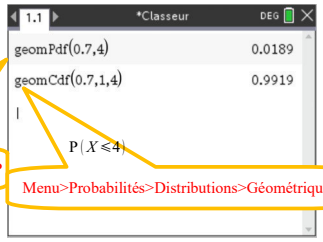
Espérance, variance et écart type :

$E(X)=\frac{1}{p}$ $\quad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$ $\quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Calculatrices :

Les calculatrices de lycée permettent de calculer directement $P(X=a)$ et $P(X\leqslant a)$.

Voilà un exemple avec une Ti-nspire pour calculer $P(X=4)$ et $P(X\leqslant 4)$ où X suit la géométrique $G(0{,}7)$



$P(X=4)$
Menu>Probabilités>Distributions>Géométrique DdP

$P(X\leqslant 4)$
Menu>Probabilités>Distributions>Géométrique FdR

Thèmes d'étude :

Inférence bayésienne
Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
Temps d'attente
Modèles d'évolution

Loi uniforme discrète

Ex 8-1 ***Lancer d'un dé***

1) On considère un dé équilibré à 6 faces.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le résultat du lancer de dé.
La loi de X est-elle uniforme ?

2) On considère la loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;n\}$.
Quelle est la valeur de la probabilité d'un événement élémentaire ?

Ex 8-2 : ***Espérance et écart type.***

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;100\}$

1) Calculer $P(X=50)$, $P(25\leqslant X\leqslant 75)$ et $P(X>50)$

2) Déterminer E(X), puis interpréter le résultat.

Ex 8-3 : ***Python : randint()***

En Python, randint(1,50) renvoit un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 50 suivant la loi uniforme discrète.

Sachant que le nombre affiché est pair (événement Pa), quelle est la probabilité que ce soit un multiple de 10 (événement D) ?

Ex 8-4 : ***Roue de loterie***

Une roue de loterie équilibrée est partagée en 16 secteurs de même angle au centre . Chaque secteur est numéroté de 1 à 16 . La roue est lancée puis s'arrête, de manière équiprobable sur un secteur.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne le numéro du secteur.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe 1 lorsque le numéro est pair et 2 lorsque le numéro est impair.
Déterminer la loi de Y, son espérance, sa variance et son écart type.

Successions d'expériences

Ex 8-5 : ***Expériences aléatoires indépendantes ou non***

Pour chacune des propositions suivantes, dire si les deux expériences aléatoires sont indépendantes ou non.

1) On lance deux fois un dé non truqué.

2) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on met de côté, puis on tire une seconde carte.

3) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on remet dans le paquet, puis on tire une seconde carte.

4) Pour payer sa baguette de pain, une cliente sort au hasard une première pièce de son porte-monnaie puis une seconde.

Ex 8-6 : ***Vrai ou faux***

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égales à $\frac{2}{3}\times\frac{19}{29}$.

3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale à $\frac{4}{9}$.

Ex 8- 7 : ***Arbre pondéré***

1) Dans une crèche, un jeu de construction en bois de 50 pièces comporte 20 cubes, 10 cylindres et 20 parallélépipèdes droits.
Un enfant choisit au hasard une pièce du jeu puis la repose dans la baril où est rangé le jeu . Il recommence l'opération. Représenter les deux expériences à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Sur les pièces cubes est gravé le chiffre 5, sur les cylindres le chiffre 2 et sur les pavés le chiffre 3.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la somme des deux chiffres obtenus.

Ex 8-8 : ***Probabilités conditionnelles***

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boule jaune . Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

3) Déterminer la probabilité de l'événement J : «Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

Ex 8-9 : ***Simuler une succession d'épreuves indépendantes***

On aimerait simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer 10 fois de manière successive et avec remise une boule dans une urne contenant 1 boule portant le numéro 1, 4 boules portant le numéro 3 et 5 boules portant le numéro 2.

Compléter le programme ci- dessous qui permet de simuler et d'afficher 20 fois cette expérience.

```
from random import random
def simul():
    b=[]
    for i in range(10):
        a=.........
        if (a<=.........):
            b.append(.........)
        else:
            if (a>=.........):
                b.append(.........)
            else:
                b.append(.........)
    return(.........)

for i in range(.........):
    print(.........................)
```

Épreuve de Bernoulli

Ex 8-10 : ***Vrai ou faux***

Les expériences suivantes correspondent-elles à des épreuves de Bernoulli.

1) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

2) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on s'intéresse à la parité du résultat obtenu.

3) Pour jouer à « pile ou face », on lance deux pièces de monnaie et on note le nombre de « pile » obtenu .

4) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note la couleur de la boule obtenue.

5) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note si la couleur de la boule obtenue se retrouve dans le drapeau français.

Schéma de Bernoulli - Loi binomiale

Ex 8-11 : ***Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale***

Dire lesquelles des expériences 1 et 2 correspondent à des schémas de Bernoulli et lesquelles des variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Expérience 1 :
On lance dix fois un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lors d'un lancer, si le numéro qui apparaît est 1 alors c'est un succès, sinon c'est un échec.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ces séries de 10 lancers et Y la variable aléatoire telle que si le lanceur a eu plus de 7 succès il gagne 10€ sinon il perd 5€.

Expérience 2 :
On lance une pièce, on note F si face apparaît et P si pile apparaît.
- Si le résultat du lancer est F alors on tire une boule de l'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire
- Si le résultat du lancer est P alors on tire une boule de l'urne 2 contenant une boule blanche et une boule bleue.

Ex 8-12 : ***Définir les paramètres de la loi binomiale***

Dans chacun des cas, justifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

1) À Genève en 2008, l'institut de recherche sur les allergies et l'asthme a annoncé qu'un vaccin contre l'allergie aux chats a été testé avec succès sur des souris. En effet le vaccin guéri l'allergie chez les souris dans 88% des cas. Un laboratoire a testé le vaccin sur une population de 30 souris allergiques. Chaque matin un laborantin prélève trois souris de l'échantillon pour effectuer des analyses, prélèvement que l'on considère comme étant avec remise.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de souris saines prélevées par le laborantin.

2) Alexandre joue à la roulette (numérotée de 0 à 36). Il mise 15 fois de suite sur le numéro « 12 ». On appelle X le nombre de parties remportées par Alexandre.

Ex 8-13 : ***Vrai ou faux : loi binomiale – coefficients binomiaux***

Soit k et n deux entiers naturels ?

1) Dans un schéma de k épreuves de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant n succès.

2) Le coefficient $\binom{5}{4}$ n'existe pas.

3) $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=\binom{7}{7}=\binom{7}{0}$

4) $\binom{n+1}{1}=\binom{n}{1}+1$

5) $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$

6) L'équation $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=\binom{k}{5}$ a pour solution 8.

Ex 8-14 : ***Coefficient binomiaux – sans calculatrice – triangle de Pascal***

1) Calculer sans calculatrice :

$\binom{111}{0}$ $\binom{15}{15}$ $\binom{412}{1}$

$\binom{15}{5}-\binom{15}{10}$ $\binom{85}{84}$ $\binom{86}{80}-\binom{85}{80}-\binom{85}{79}$

2) À l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 6.

Ex 8-15 : ***Utilisation de la calculatrice***

1) Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,7$. Calculer à 10^{-3} près avec la calculatrice les probabilités suivantes.

a) $P(X=20)$

b) $P(X<20)$

c) $P(X\leqslant 20)$

d) $P(X>20)$

2) X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que

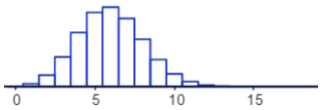
$P(X=3) = \binom{40}{3}\ 0,2^3\ \ 0,8^{37}$

Déterminer $P(X=5)$

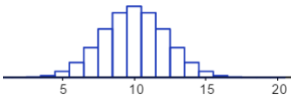
Ex 8-16 : ***Choisir la bonne représentation***

Associer chaque représentation à la loi binomiale qu'il représente.

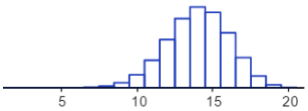
B(20 ; 0,7)



B(20 ; 0,3)



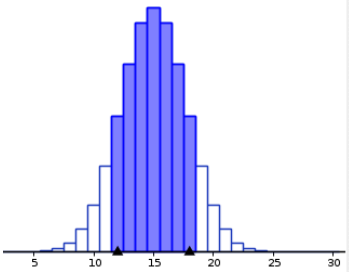
B(20 ; 0,5)



Ex 8-17 : ***Propriété géométrique***

On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,5$.

On a tracé la représentation graphique de X avec GeoGebra



9	0.0133
10	0.028
11	0.0509
12	0.0806
13	0.1115
14	0.1354
15	0.1445
16	0.1354
17	0.1115
18	0.0806
19	0.0509
20	0.028
21	0.0133
22	0.0055

1) Quelle propriété géométrique observe-t-on ?

2) Justifier cette propriété.

Ex 8-18 : ***Burj Khalifa***

Burj Khalifa, gratte ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï, compte 57 ascenseurs.

La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,006. On considère que les pannes sont indépendantes les unes des autres.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné. X suit la loi binomiale de paramètres 57 et 0,006.

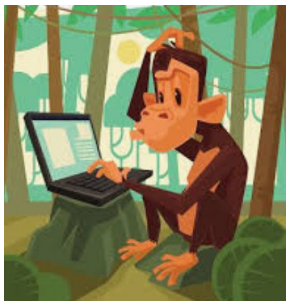
Calculer et interpréter :

1) $P(X=2)$

2) $P(X\leqslant 2)$

3) $E(X)$

Ex 8-19 : ***Singe et clavier***



Un singe tape 300 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « Z ».

1) Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

2) Calculer et interpréter :

a) $P(X=20)$

b) $P(X\leqslant 20)$

c) $E(X)$

Loi géométrique

Ex 8-20 :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre 0,4.

Calculer $P(X=4)$, $E(X)$ et $\sigma(X)$

Ex 8-21 :

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$, X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p et Y la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1-p$.

Montrer que $P(X=2)=P(Y=2)$.

Ex 8-22 : $P(X>n)=(1-p)^n$

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$ et X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $P(X>n)=(1-p)^n$

On pourra utiliser ce résultat dans la suite des exercices.

Ex 8-23 : ***Lancers d'une pièce de monnaie***

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée plusieurs fois de suite et on s'arrête dès que l'on obtient face.

1) Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de 5 lancers ?

2) Quelle est la probabilité de s'arrêter avant 6 lancers ?

3) On a déjà effectué 10 lancers et obtenu que des piles.

Quelle est la probabilité de s'arrêter au moins au bout de 14 lancers ?

Problèmes et algorithmes

Ex 8-24 : ***Composants électroniques***

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3}.

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement deux résistances défectueuses »

b) « le lot contient au plus trois résistances défectueuses »

c) « le lot contient au moins quatre résistances défectueuses »

3) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X . Interpréter l'espérance dans le cadre de l'énoncé.

Ex 8-25 : ***Lecteurs MP3 – Gain algébrique*** ***(D'après Bac S – Polynésie juin 2009)***

Après fabrication, les lecteurs MP3 d'une entreprise (dont 6 % sont défectueux) subissent quatre contrôles successifs indépendants pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
Un lecteur MP3 est :
- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros.
Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

Aide : Utiliser la variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté.

2) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Ex 8-26 : ***Passer au tableau ...***

Un professeur de mathématiques a créé un petit programme permettant d'afficher la photo de l'élève qui passera au tableau en début de cours pour corriger un exercice au tableau . Un élève peut passer plusieurs fois au tableau dans la semaine.
Le programme choisit aléatoirement un nombre entre 1 et 33 et chaque nombre correspond à la photo d'un élève de la classe.
Le choix d'une photo suit la loi uniforme discrète sur $\{1;2;3\ldots;33\}$, et les tirages successifs sont indépendants.
Alexandre est le numéro 10.
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de cours avant que Alexandre passe au tableau la première fois.
Arrondir les résultats à 10^{-3} près.

1) Quelle est la probabilité que sur sur les quatre cours de la semaine, Alexandre ne passe pas au tableau ?

2) Quelle est la probabilité que Alexandre passe au tableau la première fois au 10-ième cours ?

3) Alexandre n'est pas passé au tableau pendant 40 cours . Quelle est la probabilité qu'il aille au tableau dans les 10 cours qui suivent ?

Ex 8-27 : ***Pierre-papier-ciseaux***

Alexandre et Camille jouent à Pierre-Papier-Ciseaux.
Camille n'aime pas perdre ni faire match nul, et joue contre son frère Alexandre jusqu'à ce qu'il gagne.
On suppose qu'ils jouent de manière aléatoire et que chaque partie est indépendante des précédentes.

On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties nécessaires pour que Camille gagne la première partie.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que Camille gagne pour la première fois au bout de trois parties ?

3) Quelle est la probabilité que Camille gagne pour la première fois avant la cinquième partie.

4) Sur les dix premières parties, Camille, très malchanceux, n'a pas gagné une seule partie . Quelle est la probabilité qu'il gagne la onzième partie ?

5) Déterminer l'espérance de X.

Ex 8-28 : ***Parc de centrales nucléaires***

Un défenseur du nucléaire informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4}.

La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est d'environ 10^{-2} ».

Cette réponse est-elle correcte ?

Ex 8-29 : ***QCM***

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.
Pour chaque question quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.
Un candidat répond au hasard aux 8 questions de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=8)$ et $P(N=4)$ à 10^{-4} près.

3) Donner la loi de probabilité de N.

4) Calculer l'espérance mathématique de N.

5) Que dire d'un QCM noté +1 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

6) On fait la supposition qu'une note négative est possible.
On note le QCM de la manière suivante :

$-a$ pour une mauvaise réponse et $+b$ pour une bonne réponse
On note G la variable aléatoire correspondant à la note obtenue.
Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0 ?

Ex 8-30 : ***Jeu de grattage***

Dans un jeu de grattage, un joueur à 5 % de chance de gagner.

Un joueur décide de joueur n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$) de façon indépendante.

1) Déterminer la probabilité p_n de gagner au moins une fois.

2) Écrire en python un programme qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,7$.

3) Déterminer cette valeur.

Ex 8-31 : ***Triangle de Pascal***

Blaise Pascal
https://fr.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

1) On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
pa=[1,2,1]
na=pa+[1]
print(na)
```

Que fait ce programme ?

2) On aimerait obtenir la ligne na=[1,3,3,1] du triangle de Pascal.

On constate que pour na[0] et na[3], il n'y a rien à faire.

Comment obtenir na[1] et na[2] à partir de la liste pa ?

3) Compléter le programme ci- dessous qui permet de générer le triangle de Pascal :

```
def Pascal(n):
    pa=[1]
    for k in range(n):
        na= ……...
        for i in range ( …… ):
            ……..……..……..
        pa=na
    return(pa)

n=int(input("n="))
for i in range(……..……..):
    print(……..……...)
```

4) Tester ce programme pour n=10.

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

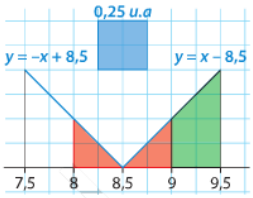
Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) NOTION DE DENSITÉ

Exemple d'introduction :



Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .

On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture .

On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1 ; t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x = t_1$, et $x = t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.

Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X \in [8 ; 9]) = 0{,}25$,

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X \in [9 ; 9{,}5]) =$

Enfin. on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X \in [7{,}5 ; 9{,}5]) =$

Rappel :

On dit que la fonction $x \longmapsto |x - 8{,}5|$ est la **densité** de la variable aléatoire X.

Remarque : Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle . Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques réels) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X \in J) = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$

f est appelée **densité** de X .

- Si $I = [a ; b]$:

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t =$

- Si $I = [a ; +\infty[$:

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on a :

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t =$

Remarques :

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)

  Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \emptyset$ alors $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$

- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :

- On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a < b$:

Remarque : On peut utiliser indifféremment les variables x ou t pour définir une densité . Il faut absolument les différencier si on a besoin d'une variable dans une borne d'une intégrale. On ne peut pas écrire $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Il faut écrire

2) FONCTION DE RÉPARTITION

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f .

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie pour tout réel t par :

Propriété :

Soit une variable aléatoire X de densité f et de fonction de répartition F .

- Pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a :
- En tout réel t où la fonction de répartition est dérivable, on a

3) PARAMÈTRES

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $I=[a;b]$.

L'espérance de X est

- Si $I=[a;+\infty[$, l'espérance de X est (si elle existe)
  $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$
- Si $I=]-\infty;b]$, l'espérance de X est (si elle existe)
  $E(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $I=[a;b]$.

La variance de X est

L'écart type de X est

- Si $I=[a;+\infty[$, la variance de X est (si elle existe)
  $V(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-E(X))^2 f(t)dt$
- Si $I=]-\infty;b]$, la variance de X est (si elle existe)
  $V(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-E(X))^2 f(t)dt$

4) LOI UNIFORME

Définition :

La loi uniforme sur $[a\,;b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par la fonction constante :

Preuve dans la feuille d'exercices

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :

Cette formule est à rapprocher de la formule :

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

Remarque : La probabilité $P(X\in[c\,;d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c\,;d]$.

Propriété :

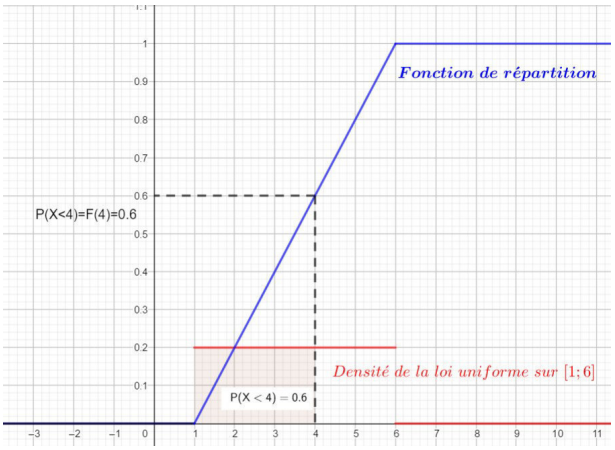
Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

Preuve dans la feuille d'exercices

Exemple :

Représentation de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[1\,;6]$



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

On a $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Preuve de E(X) dans la feuille d'exercices

5) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

Preuve dans la feuille d'exercices

Propriété :

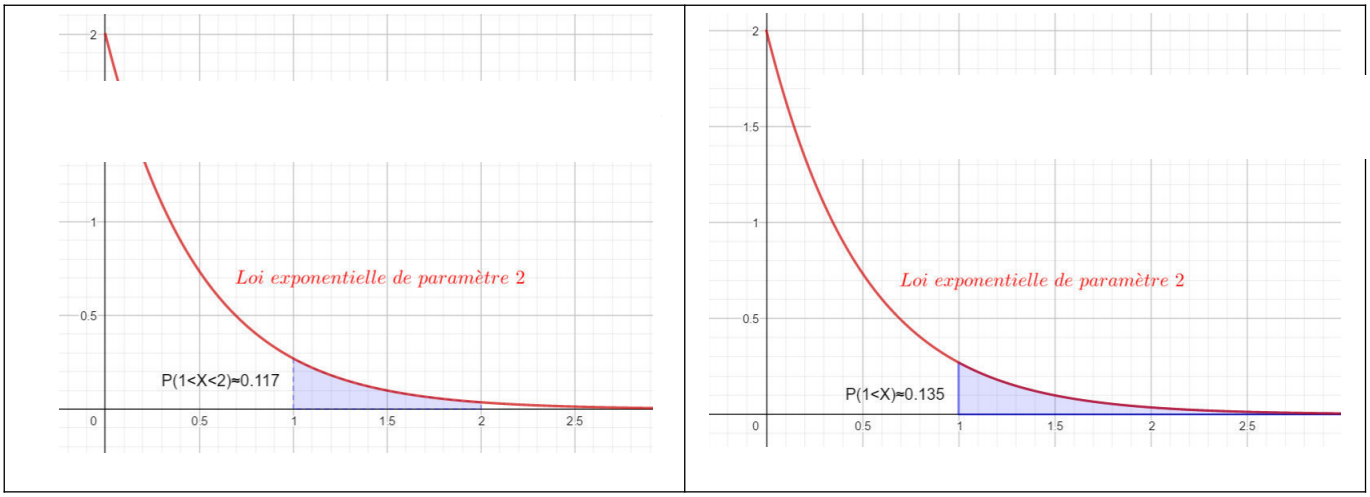
Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0 \leqslant c \leqslant d$, on a :
$$P(X \in [c\,;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}\, t = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$$
- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \leqslant a) = P(X < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

Les preuves sont immédiates :

Exemples : *On pourra au choix, appliquer directement les formules ou recalculer les intégrales.*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).
Pour tous réels positifs s et t, on a :

$$P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

Preuve :

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

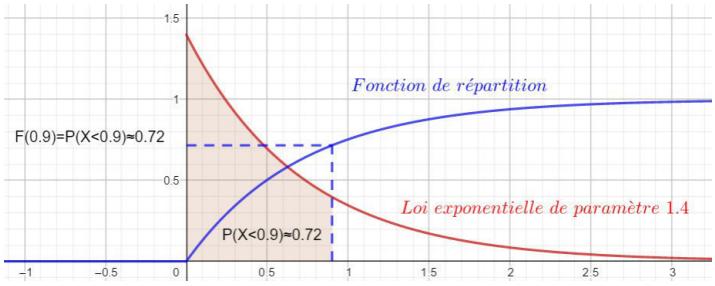
Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

Preuve dans la feuille d'exercices

Exemple :



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

On a $E(X)=\frac{1}{\lambda}$, $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$

L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X

Variable aléatoire continue et densité :

Si $I=[a\,;b]$,

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques réels) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X\in J)=\int_J f(t)\,\mathrm{d}t$

f est appelée **densité** de X

En l'infini :

Si $I=[a\,;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

La probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle :

$P(X=a)=P(X\in[a\,;a])=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et en conséquence on a :

$P(X\in[a\,;b])=P(X\in[a\,;b[)=P(X\in]a\,;b])=P(X\in]a\,;b[)$ et $P(X>a)=P(X\geqslant a)$, etc ...

Fonction de répartition :

Soit une variable aléatoire X de densité f.

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie pour tout réel t par :

$$F(t)=P(X\leqslant t)$$

Pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$

En tout réel t où **la fonction de répartition est dérivable**, on a $F'(t)=f(t)$.

Espérance, variance et écart type :

$$E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t \qquad V(X)=\int_a^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

En l'infini :

- Si $I=[a;+\infty[$, $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe) et $V(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe)
- Si $I=]-\infty;b]$, $E(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe) et $V(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe)

Loi uniforme :

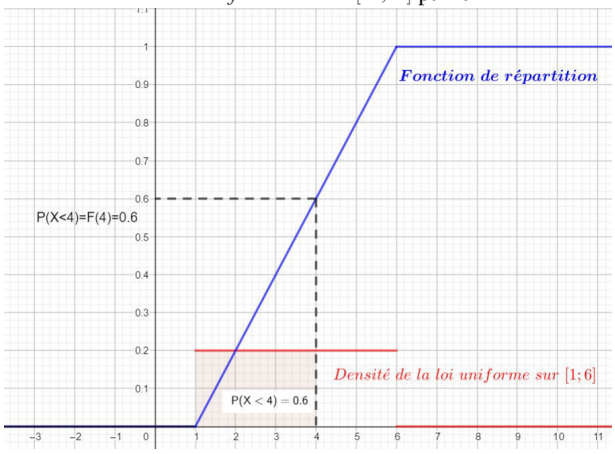
Cette formule est à rapprocher de la formule :

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

La loi uniforme sur $[a\,;b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par la fonction constante : $f:t\longmapsto\dfrac{1}{b-a}$

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :
$P(X\in[c\,;d])=\dfrac{d-c}{b-a}$



Fonction de répartition :

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<a\\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } t\in[a\,;b]\\ 1 & \text{si } t>b\end{cases}$$

Espérance, variance et écart type :

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif. La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f:t\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0\leqslant c\leqslant d$, $P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

Durée de vie sans vieillissement :

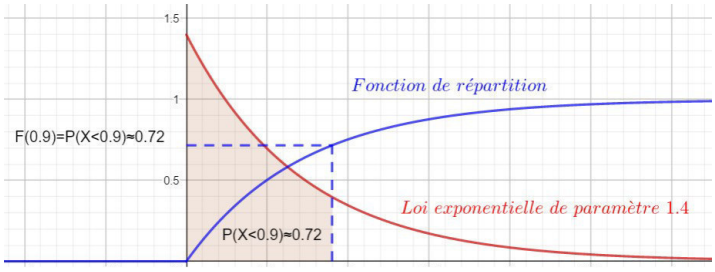
Pour tous réels positifs s et t, on a : $P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$

Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Fonction de répartition :

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$



Espérance, variance et écart type :

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Thèmes d'étude :

Inférence bayésienne
Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
Temps d'attente
Modèles d'évolution

Lois à densité : généralités

Ex 9-1 : ***Vrai ou faux***

Une fonction densité f définie sur I :

1) est monotone sur I

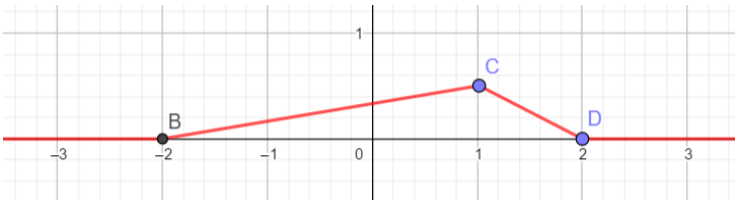
2) ne prend que des valeurs positives ou nulles

3) a une primitive sur I égale à 1

4) a une intégrale qui vérifie $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=1$

Ex 9-2 : ***Reconnaître une densité***

Soit f une fonction et C_f sa représentation graphique représentée ci-dessous :



1) Le point C a pour abscisse 1 . A quelle condition portant sur l'ordonnée de C la fonction f est-elle la fonction densité d'une variable aléatoire X ?

2) Calculer $P(0\leqslant X\leqslant 2)$

Ex 9-3 : ***Reconnaître une densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Calculer $P(-3\leqslant X\leqslant -2)$.

Ex 9-4 : ***Reconnaître une densité – Fonction de répartition – Paramètres***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & \text{si } x\in[0;1]\\ 0 & \text{si } x\notin[0;1]\end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Calculer $P\left(\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

4) Déterminer la fonction de répartition F de X et vérifier que pour tout $t\in[0;1]$, $F'(t)=f(t)$

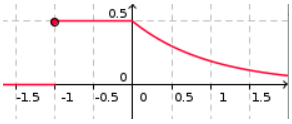
5) Retrouver le résultat de la question 3 en utilisant la fonction de répartition F.

6) Calculer E(X), V(X) et σ (X).

Ex 9-5 : ***Reconnaître une densité – Fonction de répartition – Paramètres***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ \frac{1}{2} & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$,

1) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.



2) Calculer $P\left(-\frac{1}{2}<X<3\right)$

3) Déterminer la fonction de répartition F de X et vérifier que pour tout $t\in[0;1]$, $F'(t)=f(t)$

4) Retrouver le résultat de la question 3 en utilisant la fonction de répartition F.

Loi uniforme

Ex 9-6 : ***Quelques démonstrations***

1) Montrer que la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t)=\frac{1}{b-a}$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Déterminer E(X).

Ex 9-7 : ***QCM***

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1;4]$.

1) Elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x\in[-1;4] \\ 0 & \text{si } x\notin[-1;4] \end{cases}$$

avec : a) $a=1$ b) $a=4$ c) $a=5$ d) $a=\frac{1}{5}$

2) a) $E(X)=0$ b) $E(X)=\frac{1}{2}$ c) $E(X)=\frac{3}{2}$ d) $E(X)=1$

Ex 9-8 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[10;80]$.

1) Déterminer la probabilité que ce nombre soit compris entre 30 et 60.

2) Déterminer la probabilité que ce nombre soit inférieur à 30.

3) Déterminer la probabilité que ce nombre soit supérieur à 70.

Ex 9-9 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre dans l'intervalle $]0;1[$.

1) Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[0,2;0,3]$?

2) Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 0,6 ?

3) Quelle est la probabilité que le premier chiffre soit supérieur ou égal à 7 et que le second chiffre après la virgule soit 2 ?

Ex 9-10 : ***Tableur : simulation d'une loi uniforme avec*** **ALEA()**

1) Écrire la formule simulant une loi uniforme $U(3;8)$ avec la fonction ALEA() d'un tableur.

Note : ALEA() renvoie un nombre aléatoire entre **0** (inclus) et **1** (exclus).

2) Écrire la formule donnant la fréquence de valeurs comprises entre 4 et 5 pour une simulation réalisée avec 500 cellules.

3) Ouvrir une feuille de calcul et appliquer les formules des questions 1 et 2. Quelle est la fréquence obtenue ?

Ex 9-11 : ***Temps d'attente***

On suppose que le temps d'attente à un arrêt de bus (en min) , suit la loi uniforme sur $[0;30]$.

1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 10 et 15 min.

2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit inférieure à 10 min.

3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de bus ?

4) Sachant qu'une personne attend le bus depuis 15 min, quelle est la probabilité qu'elle attende au moins encore 5 minutes ?

Ex 9-12 : Y=X+*a*

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[3;4]$.

1) Rappeler la fonction densité f et la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=X+2$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 5$, pour $x\geqslant 6$ et pour $x\in[5;6]$

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) En utilisant G, déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y.

3) Comparer les espérances et les variances de X et de Y.

Ex 9-13 : Y=*a* X

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0;6]$.
1) Rappeler la fonction densité f et la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=3X$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 0$, pour $x\geqslant 18$ et pour $x\in[0;18]$

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) En utilisant G, déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y.

3) Comparer les espérances et les variances de X et de Y.

Loi exponentielle

Ex 9-14 : *Quelques démonstrations*

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ (où λ est un réel strictement positif) est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Ex 9-15 : ***Reconnaître la loi exponentielle***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-2x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de λ la fonction f est-elle densité de la loi exponentielle ?

2) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X suivant la loi définie précédemment.

3) Déterminer la fonction de répartition F de X.

4) Vérifier que $P(1\leqslant X\leqslant 2)=F(2)-F(1)$

Ex 9-16 : ***Médiane et premier quartile***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'espérance 20.

1) Déterminer la fonction densité de X.

2) Déterminer le réel m , tel que $P(X\leqslant m)=\frac{1}{2}$

Définition : m est la médiane de la distribution de X.

3) Déterminer le réel q tel que $P(X\leqslant q)=\frac{1}{4}$.

Définition : q est le premier quartile de la distribution de X.

Ex 9-17 : ***Durée de vie***

La durée de vie (en jours) d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,001.

1) On prélève un composant au hasard. Calculer la probabilité que le composant ait une durée de vie :
a) comprise entre 200 et 300 jours,

b) inférieure à 400 jours,

c) supérieure à 500 jours.

2) Quelle est la durée de vie moyenne de ces composants électroniques ?

Ex 9-18 : **Y=X+*a***

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction densité f de X et donner la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=X+2$.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y \leqslant x)$ pour $x<2$ et pour $x \geqslant 2$.

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) La variable aléatoire Y suit-elle une loi exponentielle ?

3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 9-19 :

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) .

1) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y = aX$ (avec $a>0$).

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y \leqslant x)$ pour $x<0$ et pour $x \geqslant 0$.

c) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ?
En déduire la fonction de répartition G de Y.

3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 9-20 : ***Avec des suites***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 4$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer $a_0 = P(0 \leqslant X \leqslant 1)$, $a_1 = P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ et $a_n = P(n \leqslant X \leqslant n+1)$.

2) Soit F la fonction de répartition de X, définie .

Exprimer a_n en fonction de $F(n)$ et de $F(n+1)$.

Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

Ex 9-21 : ***Durée de vie et mort sans vieillissement***

La durée de vie d'un écran LCD, exprimée en années, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

On admet qu'en moyenne, un écran a une durée de vie de 8 ans.

1) Déterminer la valeur de λ .

2) Déterminer la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 8 ans, puis la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 10 ans. Comparer ces deux résultats.

3) Si un tel écran fonctionne depuis 2 ans, quelle est la probabilité pour qu'il ait une durée de vie totale supérieure à 10 ans ?

D'autres lois

Ex 9-22 : ***Existence et calcul d'une espérance***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Étudier $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t x\,f(x)\,\mathrm{d}t$

4) X admet-elle une espérance ?

Ex 9-23 : ***La loi de Laplace***

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour densité la fonction f , définie par $f(x)=a\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$, où $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Quelle relation existe-t-il entre a et λ pour que f soit une fonction densité ?

2) Tracer la courbe représentative de f pour $a=2$.

3) X admet-elle une espérance ? Si oui quelle est sa valeur ?

Problèmes

Ex 9-24 : ***Sur la route du lycée – temps de parcours – indépendance***

Amine habite à 1km du lycée Lyautey . Soit X la variable aléatoire égale à la durée (en min) du trajet qu'Amine emprunte pour se rendre au lycée. X suit la loi uniforme sur [15;20].

1) a) Donner la fonction densité de la loi suivie par X.

b) Quel est le temps moyen du trajet ?

c) Quelle est la probabilité qu'il mette moins de 18 min ?

2) On suppose que pour chaque jour de la semaine, la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets.
Sur une semaine Amine se rend à son lycée tous les jours du lundi au samedi.
Quelle est la probabilité qu'au moins un trajet ait duré plus de 18 minutes ?

<u>Ex 9-25 :</u> ***Sur la route du lycée – perte de livre – indépendance***

Samia, un peu étourdie, effectue un trajet de longueur L pour se rendre au lycée Lyautey . Au cours de ce trajet, elle perd successivement son livre de math et son livre de philo.
Ceci se produit de façon indépendante pour chaque livre et de façon équiprobable en tout point du parcours.

1) Soit X_P et X_M les variables aléatoires donnant (resp) la distance du point de départ au point de chute du livre de philo et du livre de math.

a) Donner le domaine de définition de X_P et X_M .

b) Déterminer les lois suivies par X_P et X_M , puis leur espérance.

2) Au lycée, Samia se rend compte de la disparition de ses livres . Elle refait le trajet en sens inverse.
Quelle est la probabilité qu'ayant effectué en sens inverse la distance Δ , Samia ait retrouvé :
a) ses deux livres ?

b) au moins un de ses deux livres ?

Ex 9-26 : ***Radioactivité***

On considère un noyau radioactif . On admet que sa durée de vie (en années) est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1) a) Rappeler la densité de probabilité f de X.

b) Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^+$. Calculer $P(t \leqslant X \leqslant t+h)$.

c) On sait que ce noyau radioactif n'est pas désintégré à l'instant t .
Montrer que la probabilité que ce noyau ne se désintègre pas entre les instants t et $t+h$ ne dépend pas de t .

2) La demi-vie d'un élément radioactif est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents sont désintégrés, c'est à dire le nombre T tel que $P(X \leqslant T) = \frac{1}{2}$.

Exprimer en fonction de λ la demi-vie T d'un élément radioactif.

3) Un déchet a une courte durée de vie lorsque sa demi-vie est inférieure à 30 ans.

a) Déterminer un minorant de λ .

b) Ces déchets doivent être isolés de l'homme pendant la durée nécessaire pour que la probabilité qu'un noyau se désintègre soit supérieure à 99,9 %.
Déterminer ce nombre minimal d'années.

4) Lors de la catastrophe de Tchernobyl en 1986, vingt radionucléides ont été disséminés, dont l'iode 131 , d'une demi-vie de 8 jours.

Des mesures effectuées actuellement devraient-elles mettre en évidence la présence d'iode 131 ?

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

1) POSITION DU PROBLÈME - VOCABULAIRE

A) DÉFINITION

Définition :

On considère deux variables statistiques numériques x et y observées sur une même population de n individus.
On note $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n$ les valeurs relevées pour la première variable et $y_1 ; y_2 ; \ldots ; y_n$ les valeurs relevées pour la deuxième variable.
Les couples $(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; \ldots ; (x_n ; y_n)$ forment une **série statistique à deux variables**.

Pour la suite du cours, on garde les notations ci-dessus et on considère l'exemple ci-dessous :

Exemple :

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de basket de 2015 à 2020.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

Le but est d'étudier cette série statistique à deux variables (le rang et le nombre d'adhérents) afin de prévoir l'évolution du nombre d'adhérents pour les années suivantes.

B) NUAGE DE POINTS

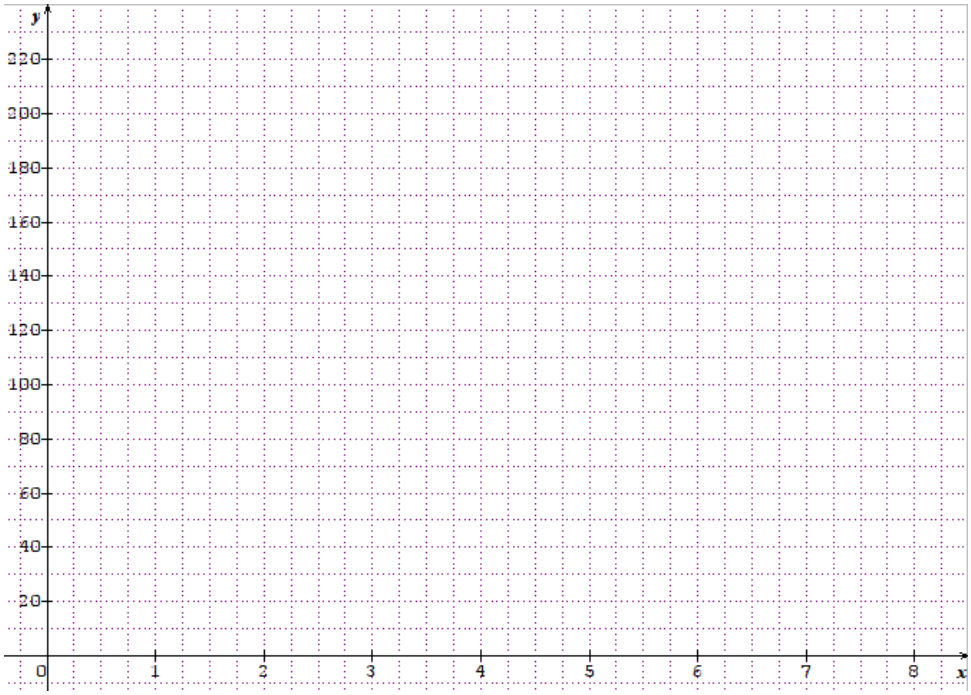
La première étape consiste à réaliser un graphique qui traduise les deux séries statistiques.

Définition :

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on appelle **nuage de points** associé à cette série statistique à deux variables, l'ensemble des points $M_1(x_1 ; y_1)$; $M_2(x_2 ; y_2)$;...; $M_n(x_n ; y_n)$.

Dans notre exemple, si on place le rang en abscisses, et le nombre d'adhérents en ordonnées, on peut représenter par un point chaque valeur . On obtient ainsi une succession de points, dont les coordonnées (1; 70), (2; 90), ... (6; 220), forment un nuage de points.

Exemple - question 1 : Représenter le nuage de points associé à la série . (Graphique à compléter au fur et à mesure du cours)

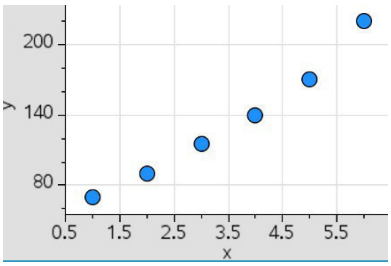


Avec une calculatrice :

Ti-nspire : https://www.youtube.com/watch?v=Nb2hmeoaMLo

Ti 83 : https://www.youtube.com/watch?v=lC1lfgYE51s

Casio : https://www.youtube.com/watch?v=xL5ixxLnINg



Remarque :

Le nuage de points associé à une série statistique à deux variables donne donc immédiatement des informations de nature qualitative.
Pour en tirer des informations plus quantitatives, il nous faut poser le problème de l'ajustement.
Le tracé met en évidence la possibilité de "reconnaître" graphiquement la possibilité d'une relation fonctionnelle entre les deux grandeurs observées (ici rang et nombre d'adhérents).
Le problème de l'établissement d'une relation fonctionnelle entre les deux séries est **le problème de l'ajustement**.

C) POINT MOYEN

Définition :

On appelle **point moyen** de cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des séries $x_1\,;x_2\,;\ldots x_n$ et $y_1\,;y_2\,;\ldots y_n$.

Exemple - question 2 : Déterminer les coordonnées des points moyens suivants :

- G_1 des années allant de 2015 à 2017 :
- G_2 des années allant de 2018 à 2020 :
- G, point moyen du nuage de points tout entier :

2) AJUSTEMENTS

A) À LA RÈGLE

On se propose, à partir des résultats obtenus, de faire des prévisions pour les années à venir.
Un moyen d'y parvenir est de tracer au juger une droite d passant le plus près possible des points du nuage et d'en trouver l'équation du type $y=ax+b$.

B) MÉTHODE DE MAYER

Cet ajustement consiste à déterminer la droite passant par deux points moyens du nuage de points.

Exemple - question 3 :

Déterminer l'équation de la droite d_1 qui passe par les points moyens G_1 et G_2 et la tracer sur le graphique précédent.

La droite d_1 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet donc une équation de la forme $y=ax+b$ avec :

On choisit $a=28,3$, et pour la suite du cours et les exercices si l'approximation est correcte, on choisira « y » au lieu de « $\approx$ »

De plus, elle passe par le point $G_1(2\,;91,7)$ d'où :

Conclusion :

Pour tracer d_1 , il suffit de placer G_1 et G_2 puis de tracer la droite qui les relie.

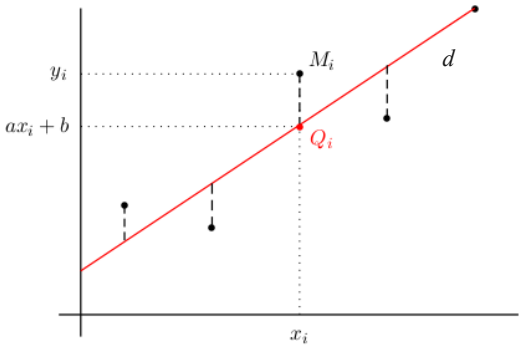
C) MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Il s'agit d'obtenir une droite « équidistante » des points situés de part et d'autre d'elle-même.
Pour réaliser ceci, on cherche à minimiser la somme des carrés des distances des points aux points de même abscisse de la droite.

Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère un nuage de n points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ justifiant un ajustement affine.
La droite d d'équation $y=ax+b$ est appelée **droite de régression** de y en x de la série statistique si et seulement si la quantité suivante est minimale :

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i\,Q_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a\,x_i+b))^2$$



Remarque :

Il serait tout aussi judicieux de s'intéresser à la droite d' qui minimise la quantité $\sum_{i=1}^{n}(x_i-(a\,y_i+b))^2$

Cette droite est appelée droite de régression de x en y.

Définition :

On appelle **covariance** notée $\text{cov}\,(x\,;y)$ ou σ_{xy} de la série statistique double de variables x et y le nombre réel :

$$\text{cov}\,(x\,;y)=\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

Pour les calculs, on pourra aussi utiliser :

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i-\overline{x}\,\overline{y}$$

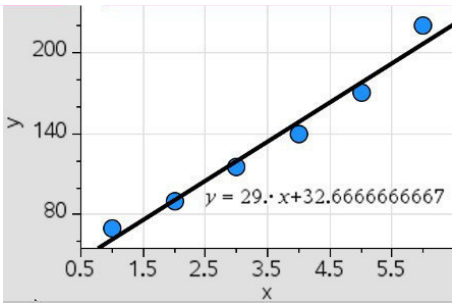
Remarque : On a $\text{cov}\,(x\,;x)=\sigma_{x^2}=\text{V}\,(x)=(\sigma\,(x))^2$

Propriété :

La droite de régression d de y en x a pour équation $y=ax+b$ où :

$$a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} \quad \text{et } b \text{ vérifie } \overline{y}=a\,\overline{x}+b$$

Avec une calculatrice :



Propriété :

Le point moyen G du nuage appartient toujours à la droite de régression de y en x.

Exemple - question 4 : Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d'ajustement d_2 de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent.

La calculatrice donne

Pour tracer la droite d_2 , il faut choisir deux points (au moins) sur cette droite.

Par exemple :

x		
y		

D) AJUSTEMENT SE RAMENANT À UN AJUSTEMENT AFFINE

On remarque qu'un ajustement affine ne semble pas très approprié pour ce nuage de points à partir de 2020,
On se propose de déterminer un ajustement plus juste. (ici, un ajustement exponentiel)

Exemple - question 5 :

On pose $z = \ln y$. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i						

Exemple - question 6 :

Déterminer une équation de la droite d'ajustement d_3 de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

La manipulation à la calculatrice est la même que précédemment, en n'oubliant pas de changer les paramètres.

La calculatrice donne $z = 0,224x + 4,045$

Exemple - question 7 :

Dans ce cas, en déduire la relation qui lie y à x puis tracer la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$.

On a

On a donc :

On obtient :

Pour tracer la courbe, il suffit de placer des points, par exemple grâce au tableau de valeurs de la calculatrice.

E) COMPARAISON

Grâce aux trois derniers ajustements, on peut évaluer ce qui se passera plus tard, comparons les :

Exemple - question 8 :

En supposant que les ajustements restent valables pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2021 suivant les trois méthodes.

Dans tous les cas, il faut calculer y lorsque x correspond à l'année 2021, c'est à dire au rang 7.

- **Méthode de Mayer :**

- **Ajustement affine :**

- **Ajustement exponentiel :**

Exemple - question 9 : En 2021, il y a eu 280 adhérents. Lequel des trois ajustements semble le plus pertinent ?

Le troisième ajustement semble le plus pertinent puisqu'il se rapproche le plus de la réalité.

Définitions :

On parle d'**interpolation** pour des valeurs à l'intérieur de la plage des valeurs observées et d'**extrapolation** pour des valeurs à l'extérieur de cette plage.

Bien entendu, les résultats obtenu par interpolation et par extrapolation sont à exploiter avec prudence.

3) COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

Définition :

Le **coefficient de corrélation linéaire** d'une série statistique de variables x et y est le nombre r défini par :

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x)\times\sigma(y)}$$

Ce coefficient sert à mesurer la qualité d'un ajustement affine.

Interprétation graphique :

Plus le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1 en valeur absolue, meilleur est l'ajustement affine.

Si $r\leqslant -0,75$ ou $r\geqslant 0,75$, on dit que la corrélation linéaire entre les séries x et y est forte.

Lorsque $r=\pm 1$, la droite de régression passe par tous les points du nuage, qui sont donc alignés.

Exemple - question 10 :

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire dans le cas de l'ajustement affine (entre x et y), puis exponentiel (entre x et z). Quel est l'ajustement le plus juste ?

Grâce à la calculatrice, on trouve :

ajustement affine :

ajustement exponentiel :

Ce qui est conforme à ce que nous avions déduit précédemment, à savoir que l'ajustement exponentiel est plus fiable pour ce cas.

Propriété :

Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $-1\leqslant r\leqslant 1$.

Remarques :

- Il ne faut pas confondre corrélation et causalité . Une forte corrélation entre deux variables ne signifie pas que l'une est la cause de l'autre ou qu'il y a un lien de cause à effet entre les deux variables.

- Si le coefficient de corrélation est proche de 0, cela signifie que le nuage de points ne peut pas être ajusté au mieux par une droite. Il faut dans ce cas essayer un autre type de courbe.

Série statistique à deux variables :

On considère deux variables statistiques numériques x et y observées sur une même population de n individus.
On note $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ les valeurs relevées pour la première variable et $y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n$ les valeurs relevées pour la deuxième variable.
Les couples $(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; \dots ; (x_n ; y_n)$ forment une **série statistique à deux variables**.

Nuage de points :

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on appelle **nuage de points** associé à cette série statistique à deux variables, l'ensemble des points $M_1(x_1 ; y_1)$; $M_2(x_2 ; y_2)$;...; $M_n(x_n ; y_n)$.

Point moyen :

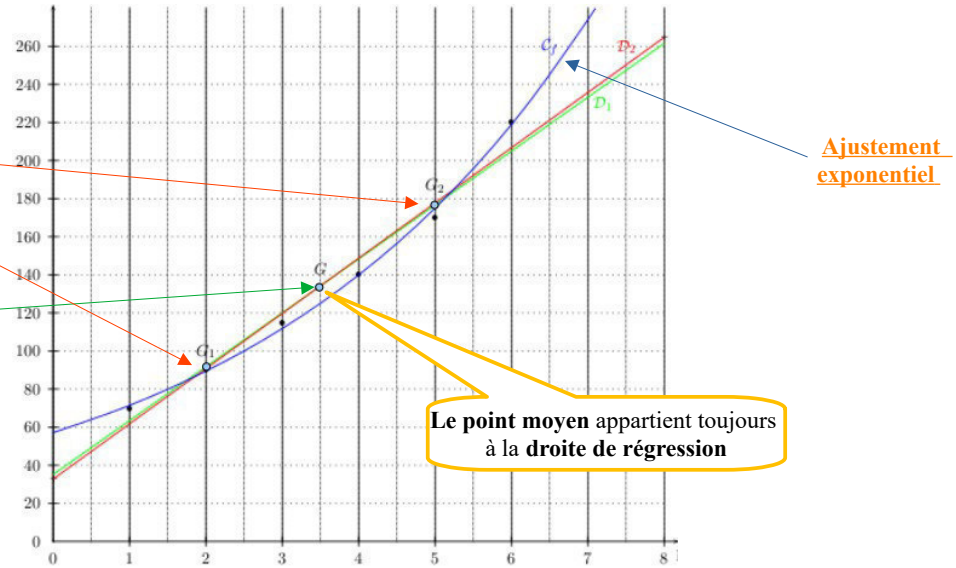
On appelle **point moyen** de cette série le point G de coordonnées $(\overline{x} ; \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des séries $x_1 ; x_2 ; \dots x_n$ et $y_1 ; y_2 ; \dots y_n$.

Ajustement :

Méthode de Mayer :
Cet ajustement consiste à déterminer la droite passant par deux points moyens du nuage de points.

Méthode des moindres carrés :

Très facile à la calculatrice
Pour une Tinspire :
>Menu
>Statistiques
>Calculs statistiques
>Régression linéaire (mx+b)



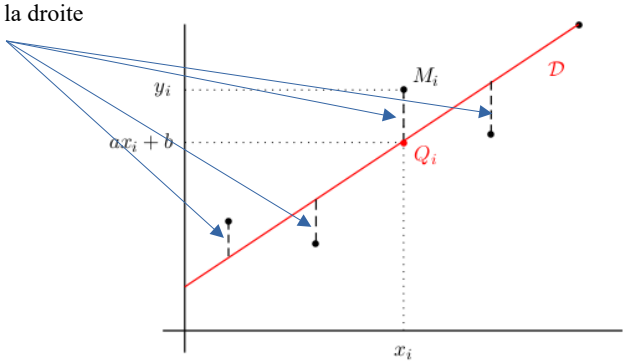
On parle d'**interpolation** pour des valeurs à l'intérieur de la plage des valeurs observées et d'**extrapolation** pour des valeurs à l'extérieur de cette plage.

Les formules de la méthode des moindres carrés :

Dans la pratique, on utilise directement les résultats fournis par la calculatrice.

La droite de régression de y en x est la droite qui minimise la somme des carrés des distances des points aux points de même abscisse de la droite.

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i Q_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a x_i + b))^2$$



Covariance :

$$\text{cov}(x ; y) = \sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$$

On aura aussi besoin de : $\text{cov}(x ; x) = \sigma_{x^2} = \text{V}(x) = (\sigma(x))^2$ (On retrouve **la variance** de x)

Droite de régression :

La droite de régression d de y en x a pour équation $y = ax + b$ où :

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\text{V}(x)} \quad \text{et } b \text{ vérifie } \overline{y} = a\,\overline{x} + b$$

Le point moyen G du nuage appartient toujours à la droite de régression de y en x.

Coefficient de corrélation linéaire :

Le **coefficient de corrélation linéaire** d'une série statistique de variables x et y est le nombre r défini par :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x) \times \sigma(y)}$$

Ce coefficient sert à mesurer la qualité d'un ajustement affine :

Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

Plus le coefficient de corrélation linéaire est **proche de 1 en valeur absolue, meilleur est l'ajustement affine**.

Si $r \leqslant -0,75$ ou $r \geqslant 0,75$, on dit que la corrélation linéaire entre les séries x et y est **forte**.

Lorsque $r = \pm 1$, la droite de régression passe par tous les points du nuage, qui sont donc alignés.

Si le coefficient de corrélation est **proche de 0**, cela signifie que le nuage de points ne peut pas être ajusté au mieux par une droite. Il faut dans ce cas essayer un autre type de courbe (exponentiel …)

Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Corrélation et causalité
Répartition des richesses, inégalités

Ces exercices sont à faire avec une calculatrice, un tableur ou un logiciel adapté (par exemple : sinequanon)

Problèmes

Ex 10-1 : *Taux de chômage au Japon*

Le tableau suivant présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active, au Japon, entre 1950 et 1996.

Année	1950	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x_i	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Taux y_i (en %)	1,2	1,6	1,6	1,2	1,1	2,0	2,6	2,1	3,1	3,4

1) Représenter le nuage de points correspondant à la série $(x_i\,;\,y_i)$.
On choisira un repère orthogonal pour lequel :
1 cm représente 5 années sur l'axe des abscisses.
1 cm représente un taux de chômage de 0,5 % sur l'axe des ordonnées.

2) Déterminer les coordonnées de point moyen G de ce nuage. Le placer sur le graphique.

3) On prend pour droite d'ajustement affine de ce nuage la droite D passant par G et de coefficient directeur 0,04.

a) Déterminer une équation de la droite D.

b) Représenter D sur le graphique.

4) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'ajustement précédent:

Quel est le taux de chômage prévisible pour 2005 ?

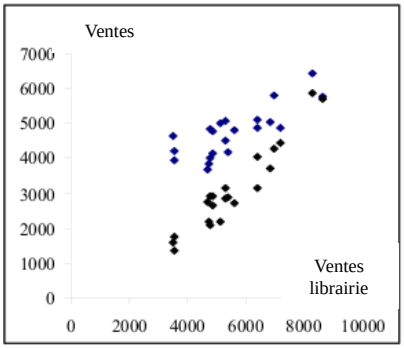
Le taux réel en 2005 est de 4,4 . Que peut-on conclure ?

5) Suivant cette prévision, à partir de quelle année le taux prévisible aurait-il dû dépasser 4,4 % ?

Ex 10-2 : *Catalogue de livres*

Livclub est un organisme qui distribue des livres sur catalogues.
Il ne propose jamais d'ouvrage en première parution : il faut déjà qu'un ouvrage soit en vente depuis un an en librairie avant que Livclub ne puisse l'inscrire à son catalogue.

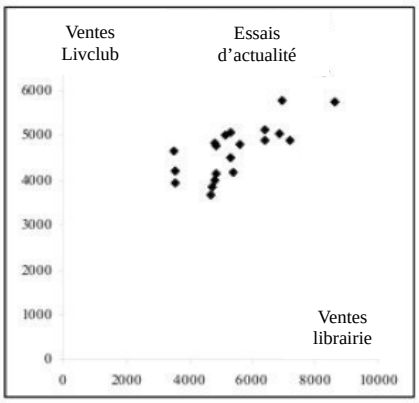
Avant de proposer un livre à la vente, Livclub connaît donc son tirage en librairie.

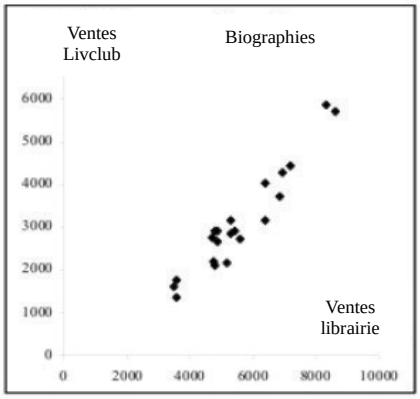


1) On a observé la relation suivante entre les ventes dans le circuit classique de distribution en librairie et les ventes de Livclub :

Le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables est ρ = 0,659 . Que peut-on dire de la qualité de la relation ?

2) En fait, dans les ouvrages précédents, il y avait deux catégories : des essais d'actualité et des biographies historiques. Les graphiques suivants représentent la relation entre les ventes en librairies et les ventes de Livclub pour chacune de ces catégories :





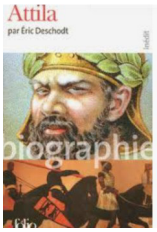
Des calculs ont donné les résultats suivants :
X = ventes en librairie et Y = ventes de Livclub

	Essais	Biographies
Moyenne de X	5 564,81	5 564,81
Moyenne de Y	4 743,76	3 105,44
Variance de X	1 935 081,01	1 935 081,01
Variance de Y	457 674,47	1 387 360,55
Covariance de X et Y	742 418,60	1 571 718,61

Calculer les coefficients de corrélation linéaire pour chacune des deux séries

3) Livclub a décidé d'inscrire à son catalogue la biographie d'Attila le Hun qui s'est vendue en librairie à 6500 exemplaires .

Combien d'ouvrages Livclub peut-il escompter vendre ?



Ex 10-3 : ***Chiffres d'affaire***

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaire en milliers d'euros d'une entreprise pendant dix années, entre 2011 et 2020.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre d'affaires y_i	110	130	154	180	190	210	240	245	270	295

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$.

2) Quel est, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre les années 2011 et 2020 ? (on donnera le résultat à 1 % près par excès)

3) Soit G le point moyen du nuage. Calculer les coordonnées de G et placer G sur le graphique.

4) Semble-t-il judicieux de procéder pour cette série à un ajustement affine ?

5) Calculer les indicateurs suivants : $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ et σ_{xy} . Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série.
Juger de la qualité d'une approximation linéaire de la relation entre ces deux variables .

6) Donner, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite D de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

7) Vérifier que G appartient à la droite D et tracer D sur le graphique.

8) En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine, quel chiffre d'affaires peut on prévoir pour l'année 2026 ?

9) On suppose qu'à partir de l'année 2020, le chiffre d'affaires progresse de 8 % par an . Quel est alors le chiffre d'affaires prévisible en 2026 ?

Ex 10-4 : ***Sécheresse***

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en m3) y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1) Représenter la série $(x_i\,;y_i)$.

2) Semble-t-il judicieux de procéder pour cette série à un ajustement affine ?

3) Calculer les indicateurs suivants : $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ et σ_{xy} . Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série.
Juger de la qualité d'une approximation linéaire de la relation entre ces deux variables .

4) Donner l'équation de la droite Δ de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $y=ax+b$ (a et b sont les arrondis à 10^{-2} près des valeurs lues sur la calculatrice) . Représenter la droite Δ sur le graphique.

5) Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole P qui passe par des points $A(1\,;2{,}25)$ et $B(10\,;27)$, et qui a pour équation $y=c\,x^2+d$ où c et d sont deux nombres réels .

a) Déterminer c et d et donnez l'équation de la parabole P.

b) Représenter la parabole P sur le graphique.

6) Dans cette question, on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10	
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27	
$\lvert y_i-(a\,x_i+b)\rvert$	2,54	0,91	2,71			Total T_1 :
$\lvert y_i-(c\,x_i^2+d)\rvert$	0	0,05	0,25			Total T_2 :

Les deux totaux calculés évaluent, pour chaque ajustement, la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.
Donner les arrondis à 10^{-1} près des deux totaux T_1 et T_2 calculés ci-dessus.
Déduire l'ajustement qui paraît le mieux adapté.

Ex 10-5 : ***Dépenses des ménages en produits informatiques***

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 2010 à 2019 :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1) a) Dessiner le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec, pour unités graphiques 1 cm pour un rang en abscisse, 1cm pour 200 millions d'euros en ordonnée.

b) Déterminer les coordonnées de G, point moyen de nuage.
Placez le point G.

Droite de Mayer

2) a) G_1 désigne le point moyen des 5 premiers points du nuage et G_2 celui des 5 derniers points.
Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

Placer ces points sur le graphique précédent et tracez la droite $(G_1\,G_2)$.
Le point G appartient-il à cette droite ?

b) Donnez l'équation de la droite $(G_1\,G_2)$ sous la forme $y=ax+b$ (on arrondira les coefficients à 0,1 prés)

c) Calculer avec un tableur ou à la calculatrice la somme des carrés des résidus pour cet ajustement : $S_1=\sum_{i=1}^{9}(y_i-(a\,x_i+b))^2$

d) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2025.

Ajustement des moindres carrés

3) a) Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d d'ajustement affine de y en x, sous la forme $y=mx+p$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 0,1 près).

b) Représenter d dans le repère précédent.

c) Calculer avec un tableur ou avec la calculatrice la somme des carrés des résidus pour cet ajustement :
$S_2=\sum_{i=1}^{9}(y_i-(m\,x_i+p))^2$ Conclusion ?

d) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2005.

Ajustement logarithmique

La croissance des dépenses semblant « ralentir » entre 2017 et 2019, on envisage un ajustement logarithmique entre 2014 et 2019.
On pose $t_i = \ln(x_i)$

4) a) Compléter le tableau suivant où t_i est arrondi est arrondi à 10^{-3}

t_i						
y_i	673	956	1077	1285	1427	1490

b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

c) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2025.

d) Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$, où on explicitera l'expression de f

Ajustement exponentiel

Si, au contraire de la question 4, on ne s'intéresse qu'aux années 2010 à 2016, la forme du nuage suggère plutôt un ajustement exponentiel.
Pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $z_i = \ln(y_i)$

5) a) Compléter le tableau suivant où z_i est arrondi est arrondi à 10^{-3}

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i							

b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

c) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2020.

d) Tracer la courbe d'équation $z = g(x)$, où on explicitera l'expression de g

L’alphabet grec en sciences

http://pierrelux.net

majuscules	minuscules	
	α	alpha
	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
	ε	epsilon
	ζ	zêta
	η	êta
Θ	θ	thêta
	ι	iota
	κ	kappa
Λ	λ	lambda
	μ	mu
	ν	nu
X	χ	xi ou ksi
	ο	omicron
Π	π	pi
	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
	τ	tau
	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
	ξ	chi ou khi
	ψ	psi
Ω	ω	omega

Ne sont indiquées que les capitales utilisées en sciences . Les autres, identiques à des lettres de l’alphabet latin, ne sont pas utilisées.

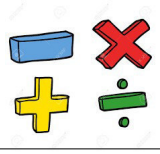
La lettre omicron, identique à notre lettre o, n’est pas utilisée en sciences.

PYTHON - les instructions de base utilisées au lycée

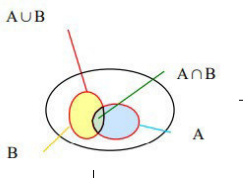
http://pierrelux.net

Créer un programme	- On va à la ligne après chaque instruction. - On peut séparer plusieurs instructions sur la même ligne en les séparant par « **;** »
Saisir une variable Il existe aussi d'autres types numériques : **type long** : Entier compris entre – inf et 2 147 483 647 ou entre 2 147 483 648 et + inf **type complex** : Nombre complexe Pour connaître tous les types … https://fr.wikiversity.org/wiki/Python/Les_types_de_base	- **A=input("A=")** si A est une chaîne de caractère (c'est le type par défaut) **type str** : *Chaîne de caractères* - **A=float(input("A="))** si A est un flottant **type float** : *Valeur spécifiée avec un point dans le programme (exemple : a=2.0) permettant une approximation de nombre réel* - **A=int(input("A="))** si A est un entier **type int** : *Entier compris entre -2 147 483 648 et 2 147 483 647 (codage sur 32 bits soit 4 octets)*
Afficher	- **print(A)** affiche la valeur de la variable A - **print("Vive les maths")** affiche le texte Vive les maths - On peut aussi mélanger texte et variable : **print("la valeur de A est ",A)**
Affecter	**B=A** affecte la valeur A ou le contenu de la variable A à la variable B
Écrire un commentaire	Les commentaires s'écrivent après le signe **#**
Opérations élémentaires	addition **+** soustraction **-** multiplication ***** puissance ****** division **/** reste de division entière **%** (9%2 donne 1) quotient de division entière **//** (9//2 donne 4)
Tester ...	**A==B** (égal) **A!=B** (différent) **A>B** (supérieur) **A<B** (inférieur) **A>=B** (supérieur ou égal) **A<=B** (inférieur ou égal)
Et / Ou	A **and** B / A **or** B
Si … Sinon Si … Sinon	**if** *condition C1* **:** *instruction A1* **elif** *condition C2* **:** *instruction A2* **else :** *instruction A3* C'est **le décalage** vers la droite qui indique les instructions faisant partie de la structure conditionnelle. Il n'y a pas d'instruction de fin. Il en est de même pour **for** , **while** et **def**.
Boucle Pour	**for i in range(1,n+1) :** *instruction A* la variable i parcourt tous les entiers de 1 à n - **for i in range(n):** la variable i parcourt tous les entiers de 0 à n-1 - **for i in range(m,n):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 - **for i in range(m,n,p):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 avec un **pas** de p.
Boucle Tant que	**while** *condition* **:** *instruction A*
Fonctions	**Def exemple(a,b …):** *instruction … y=…* **return(y)** a,b,… sont **les arguments** de la fonction exemple On peut aussi retourner plusieurs valeurs : return(x,y,z,...)
Insérer un **module**	Un module est une bibliothèque comportant un ensemble de fonctions. Je présente ci-dessous les modules utilisés au lycée.
Opérations mathématiques : math Toutes les fonctions du module **math** **https://www.afpy.org/doc/python/3.5/library/math.html**	**from math import *** On peut aussi importer uniquement la fonction souhaitée : **from math import sqrt** Le module math, contient les définitions de nombreuses fonctions mathématiques telles que **sin**, **cos** , **tan** ,**sqrt** , **pi** …
Nombres aléatoires : random Toutes les fonctions du module **random** **https://docs.python.org/fr/3.5/library/random.html**	**from random import *** Le module random contient les définitions de nombreuses fonctions faisant référence au hasard telles que : - **uniform(a,b)** qui retourne un nombre aléatoire compris entre a et b - **randint(a,b)** qui retourne un entier aléatoire compris entre a et b
Graphiques : pylab Bases du module **pylab** **http://matplotlib.free.fr/bases.html**	**from pylab import *** Le module pylab contient de nombreuses fonctions graphiques, ce qui en fait un outil très puissant pour créer des graphiques scientifiques. Ce module possède aussi les fonctions usuelles du module math , il n'est donc pas utile d'importer aussi celle-ci lorsqu'on utilise pylab. On peut aussi utiliser une version plus légère : **matplotlib.pyplot**. Mais celui-ci ne possède pas les fonctions du module math.
Listes et chaînes de caractères	**A=[]** permet de définir la liste vide A **A.append(x)** ajoute la valeur x à la liste (Si la liste était définie jusqu'au 10 ème terme, x sera le 11ème terme)
Longueur	**len(A)** renvoie la longueur de la liste ou de la chaîne de caractères A
Extraire	**A[k]** renvoie le k+1 ème élément de la liste ou de la chaîne de caractères A. Attention A[0] est le premier terme de la liste.
Concaténer	"mathé "**+**"matiques" donne la chaîne de caractères "mathématiques" [1,2,3,4]**+**[5,6,7,8] donne la liste [1,2,3,4,5,6,7,8]

Quelques symboles mathématiques à connaître



http://pierrelux.net

				Exemples
Symbole d'implication	$A \Rightarrow B$	A **implique** B **Si** A **alors** B B est **nécessaire** à A A est **suffisant** pour B	Ce symbole est censé exprimer l'idée que A est vraie entraîne que B aussi.	$x=2 \Rightarrow x^2=4$
Symbole d'équivalence	$A \Leftrightarrow B$ A ssi B	A **équivaut à** B A **si et seulement si** B	Il s'agit d'une implication dans les deux sens : A implique B et B implique A	$x=2$ ou $x=-2$ $\Leftrightarrow x^2=4$
Quantificateur universel	$\forall x \ , \ P(x)$	**Quel que soit** x ; **pour tout** x	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour tout x	$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ x^2+\frac{1}{x+1}>0$
Quantificateur existentiel	$\exists x \ , \ P(x)$	**Il existe** x tel que...	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un x .	$\exists x \in \mathbb{R} \ , \ (x-2)(x-3)>0$
Symbole d'appartenance	$x \in E$	x **appartient à** E x **est élément de** E E **contient** x	Pour un ensemble E donné, ce symbole signifie qu'il contient l'élément x .	$A \in d$ $2 \in]-3;5[$
Symbole de non-appartenance	$x \notin E$	x **n'appartient pas à** E	Négation de l'appartenance de x à E .	$-5 \notin \mathbb{N}$
Symbole d'inclusion	$A \subset B$	A est **inclus** dans B A est **un sous-ensemble** de B A est **une partie** de B B **contient** A	Pour deux ensembles A et B donnés, ce symbole signifie que tous les éléments de A sont éléments de B .	$]-2;5[\subset]-3;8[$
Symbole de non-inclusion	$A \not\subset B$	A n'est **pas inclus** dans B	Négation de l'inclusion de A dans B , c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B .	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$
Ensemble vide	$\emptyset$	**Ensemble vide**	Ensemble qui ne comporte aucun élément	$]3,1;5[\cap [5,2;+\infty[= \emptyset$
Singleton, paire, ensembles finis Accolades { … }	$\{x\}$ $\{x,y\}$ $\{x_1,x_2 \ldots x_n\}$	**Singleton** x **Paire** $x \quad y$ **Ensemble** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Ensemble dont l'unique élément est x Ensemble dont les seuls éléments sont x et y Ensemble dont les n éléments sont $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$.	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=4$ est $S=\{-2;2\}$ L'ordre n'est pas important. On aurait pu écrire $\{2;-2\}$
Couple, Triplet, n-uplet Parenthèses (...)	(x,y) (x,y,z) $(x_1,x_2 \ldots x_n)$	**Couple** $x \quad y$ **Triplet** $x \quad y \quad z$ **n-uplet** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Représentation d'une collection d'objets occupant chacun **une place précise**, au sens où contrairement à un ensemble finis, l'ordre et la répétition des objets n'est pas anodine.	Le point de coordonnées $(5;7)$ n'est pas le point de coordonnées $(7;5)$.
Réunion $A \cup B$		A **union** B **Réunion** de A et B	Ensemble contenant les éléments de A **ou** B et seulement ceux-là. Les éléments en commun à A et B sont dans la réunion. On dit que le ou mathématique est **inclusif**.	$]-7;8] \cup [-3;10[=]-7;10[$
Intersection $A \cap B$		A **inter** B **Intersection** de A et B	Ensemble contenant les éléments en communs de A et B et seulement ceux-là.	$]-7;8] \cap [-3;10[= [-3;8]$
Somme	$\sum_{i=1}^{n}$	**Somme** de $i=1$ à $i=n$	On avance de 1 en 1, c'est à dire : 1,2,3,4,5 $\ldots, n$	$\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$
Association	$f : x \longmapsto f(x)$	fonction f **qui à** x associe le nombre $f(x)$	Attention, il ne faut pas utiliser la flèche $\rightarrow$	$f : x \longmapsto x^2$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels**. $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;\ldots\}$

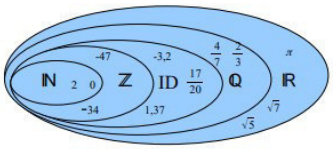
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou ***nombres entiers***) $\mathbb{Z}=\{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels privé de 0.
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0. $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs. $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs.
$\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des réels strictement positifs. $\mathbb{R}^{-*}$ est l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R}-\{2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2

$\mathbb{R}-\{2;5,2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2;5,2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2 et 5,2