Première spé

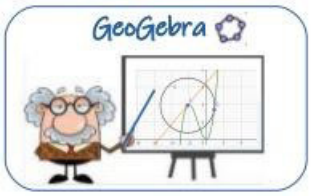
Mathématiques - Programme 2019

Fiches d'exercices et de cours à compléter

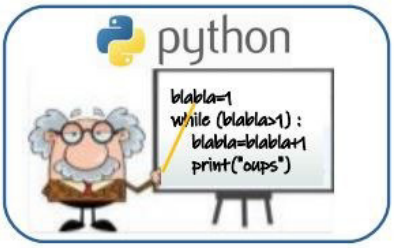
Auteur : Pierre Lux – version 2023

Toutes les corrections sont consultables en ligne

http://pierrelux.net



1 : Second degré pages 1 à 16
2 : Conditionnement – indépendance pages 17 à 29
3 : Trigonométrie pages 30 à 43
4 : Dérivation pages 44 à 60
5 : Produit scalaire pages 61 à 74
6 : Application de la dérivation pages 75 à 89
7 : Généralités sur les suites pages 90 à 106
8 : Suites arithmétiques et géométriques pages 107 à 124
9 : Variables aléatoires pages 125 à 135
10 : Exponentielle pages 136 à 148
11 : Droites et cercles pages 149 à 159



Chapitre 1 - SECOND DEGRÉ

1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto ax^2+bx+c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur $\mathbb{R}$; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

- Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont des trinômes du second degré :

- La fonction $x \longmapsto (x+1)^2-(x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x,

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Propriété :

Tout trinôme du second degré $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta \text{ où } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=f(\alpha).$$

On note souvent P ou Q un trinôme du second degré.
(Notation que j'utiliserai en exercice)

Preuve :

Soit un trinôme du second degré f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2+\frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$$

Remarque : le réel b^2-4ac se note Δ (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

Exemple : Forme canonique de $2x^2+4x+1$

Pour tout réel x, on a :

C) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Étude d'un exemple : Variations de $f : x \longmapsto 2x^2+4x+1$

On a vu que pour tout réel x, $f(x)=2(x+1)^2-1$

Soit deux réels u et v tels que $u<v\leqslant-1$. On a alors :

Soit deux réels u et v tels que $-1\leqslant u<v$. On a alors :

En généralisant ce raisonnement à un trinôme quelconque $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ que nous démontrerons plus tard de manière plus simple, on obtient le résultat suivant :

$a>0$

x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

$a<0$

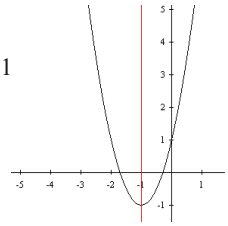
x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

Remarques :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole , dont le sommet est
- La droite d'équation

$y = 2x^2 + 4x + 1$



$y = -0{,}5\,x^2 + 2\,x + 2$

2) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

A) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)

Soit le trinôme du second degré $f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$)
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit aussi $f(x) = 0$.
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RÉSOLUTION

$a \neq 0$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puisqu'un carré n'est jamais négatif.
Si $\Delta = 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous

- $x^2 - 3x + 4 = 0$ ($a = 1$; $b = -3$ et $c = 4$)
- $2x^2 - 12x + 18 = 0$ ($a = 2$; $b = -12$ et $c = 18$)
- $6x^2 - x - 1 = 0$ ($a = 6$; $b = -1$ et $c = -1$)

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. **Exemples :** $4x^2-9=0$, $5x^2-4x=0$, …
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac>0$ donc $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.

On montre facilement la propriété suivante :

Propriété :

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

- Trouver une racine connaissant l'autre . (**Méthode de la racine évidente**)

Exemple :

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

Remarque : Deux nombres réels ont pour produit P et pour somme S si ,et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

C) FACTORISATION DU TRINÔME ax^2+bx+c

On a déjà montré que pour tout réel x de $\mathbb{R}$: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Trois cas se présentent donc :

Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $x_0=-\frac{b}{2a}$ est **la racine double** du trinôme.
Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exemples : Factoriser les trinômes ci-dessous

- x^2-3x+4
- $2x^2-12x+18$
- $6x^2-x-1$

3) SIGNE DU TRINÔME ax^2+bx+c

➔ Si $\Delta>0$, $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
On a :

x			
$x-x_1$ $x-x_2$ $(x-x_1)(x-x_2)$			

si $a>0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

si $a<0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

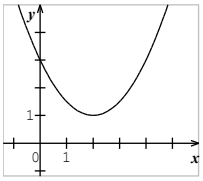
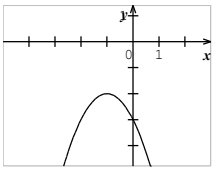
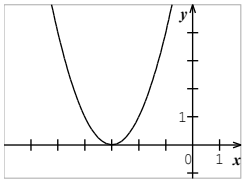
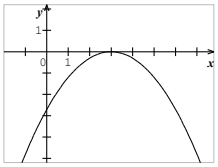
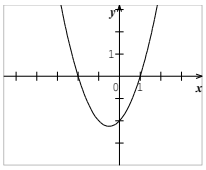
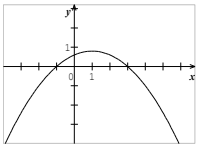
Pour résumer : ax^2+bx+c **est du signe de** a **sauf entre ses racines.**

➔ Si $\Delta \leqslant 0$, on a $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forme canonique).

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta=0$, $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+5x-3$

4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

	Équation $ax^2+bx+c=0$ **Factorisation**	**Inéquation** $ax^2+bx+c>0$	**Inéquation** $ax^2+bx+c<0$	
	L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$.	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.	
	Le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas	L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$	
	L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution (double) dans $\mathbb{R}$. Cette solution est: $x_0=-\frac{b}{2a}$ Le trinôme ax^2+bx+c se factorise: $a(x-x_0)^2$	L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0.	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.	
		L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0 .	
	L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. Ces solutions sont: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Le trinôme ax^2+bx+c se factorise : $a(x-x_1)(x-x_2)$	L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ a pour ensemble de solutions $]x_1\,;x_2[$	
		L'inéquation $ax^2+bx+c>0$ a pour ensemble de solutions $]x_1\,;x_2[$	L'inéquation $ax^2+bx+c<0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$	

Discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\,ac$ se note (**delta**)

Les différentes formes :

Forme développée réduite : $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

Forme canonique : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2\,a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

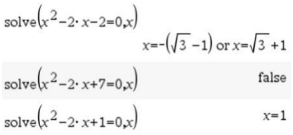
Forme factorisée :

Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable
Si $\Delta = 0$, $P(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a(x-\alpha)^2$
Si $\Delta > 0$, $P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Équation :

Les solutions de l'équation $P(x)=0$ s'appelle aussi **les racines** du trinôme.

Avec une Ti-nspire



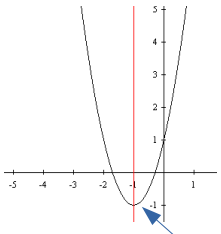
Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}$. (appelée **racine double**)
Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ On a alors : $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1\,x_2 = \dfrac{c}{a}$

Signe du trinôme :

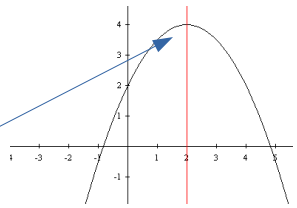
Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a
Si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2\,a}$ et $f\left(-\dfrac{b}{2\,a}\right)=0$
Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a sauf entre les racines.

Représentation graphique :

Si $a>0$ les branches de la parabole sont tournées vers le haut



Si $a<0$ les branches de la parabole sont tournées vers le bas



Coordonnées du sommet : S(α ; β) - **Équation de l'axe de symétrie** : $x=\alpha$

Intersection entre la parabole et l'axe des abscisses

Si $\Delta < 0$: pas d'intersections
Si $\Delta = 0$: un point d'intersection d'abscisse $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}$
Si $\Delta > 0$: deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2

Expressions d'un polynôme du second degré

Ex 1-1 : QCM - restituer les notions du cours

1) Parmi ces conditions, laquelle fait partie de la définition d'un trinôme ax^2+bx+c du second degré :

a) $a\neq 0$ b) $b\neq 0$ c) $c\neq 0$

2) Le discriminant d'un trinôme ax^2+bx+c du second degré est :

a) b^2+4ac b) b^2-4ac c) $(b-4ac)^2$ d) b^2-ac

Ex 1-2 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

Dire si les phrases suivantes sont une reformulation équivalente à la définition d'un trinôme P du second degré :

1) Pour tout réel *x*, il existe trois réels a , b , et c , avec $a\neq 0$, tels que $P(x)=ax^2+bx+c$.

2) Il existe trois réels a , b , et c , avec $a\neq 0$, tels que pour tout réel x , $P(x)=ax^2+bx+c$.

3) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists a\in\mathbb{R}^*$, $\exists b\in\mathbb{R}$ et $\exists c\in\mathbb{R}$ tels que $P(x)=ax^2+bx+c$

4) $\exists a\in\mathbb{R}^*$, $\exists b\in\mathbb{R}$ et $\exists c\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=ax^2+bx+c$

Ex 1-3 : QCM - restituer les notions du cours

Quelles sont les phrases synonymes de :
« -1 est une racine du trinôme $P(x)=5x^2+4x-1$ »?

1) -1 est l'image de 0 par le trinôme P.

2) 0 est l'image de -1 par le trinôme P.

3) -l est solution de l'équation $P(x)=0$.

4) 0 est solution de l'équation $P(x)=-1$.

5) le point de coordonnées (0;-1) appartient à la courbe C_p .

6) le point de coordonnées (-1 ;0) appartient à la courbe C_p .

Ex 1-4 : Reconnaître un trinôme du second degré

Reconnaître les fonctions trinôme du second degré :
(Déterminer a , b et c)

1) $x\longmapsto \sqrt{3}\,x-4\,x^2+7\,x$

2) $x\longmapsto \dfrac{2\,x^2-7}{\sqrt{3}}$

3) $x\longmapsto -\dfrac{x^2(-2\,x+3\,x^2)}{3\,x^2}$

4) $x\longmapsto (\sqrt{x^2+2})^2-3$

Ex 1-5 : De la forme réduite à la forme canonique

Déterminer la forme canonique de chaque trinôme du second degré.

1) $x\longmapsto x^2-10\,x+29$

2) $x\longmapsto 9\,x^2+12\,x-5$

3) $x\longmapsto \dfrac{1}{3}x^2+6\,x-1$

Ex 1-6 : De la forme réduite à la forme factorisée

Déterminer, lorsque cela est possible, la forme factorisée de chaque trinôme du second degré.

1) $x\longmapsto 9x^2-100$

2) $x\longmapsto (x-2)^2+5$

3) $x\longmapsto -3x^2+81$

4) $x\longmapsto \dfrac{1}{4}(x+1)^2-8$

5) $x\longmapsto -\dfrac{1}{4}(x-\sqrt{3})^2+\dfrac{3}{8}$

Ex 1-7 : Variations

Établir le tableau de variations pour chacun des trinômes suivants :

1) P : $x\longmapsto 2x^2-4x-4$

2) Q : $x\longmapsto -2x^2+3x-10$

3) R : $x \longmapsto 2x-4x^2-4$

Équations du second degré et factorisation

Ex 1-8 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) Si l'on connaît une racine, alors nécessairement, il en existe une seconde, éventuellement confondue.

2) Il existe des trinômes qui n'admettent pas de forme factorisée.

3) Les trinômes qui n'admettent pas de forme factorisée sont ceux pour lesquels $\Delta>0$.

Ex 1-9 : QCM - restituer les notions du cours

1) Lorsque le discriminant d'un trinôme est nul, on dit qu'il admet :

a) une racine simple b) une racine double c) deux racines confondues.

2) Lorsqu'un trinôme admet deux racines distinctes, ce qui change entre les formules donnant x_1 et x_2 est :

a) le signe devant b b) le signe devant $\sqrt{\Delta}$

c) le signe du numérateur d) le signe du dénominateur

3) Lorsqu'une parabole coupe au moins une fois l'axe des abscisses, le discriminant du trinôme associé est :

a) nul b) strictement positif c) positif ou nul d) strictement négatif

Ex 1-10 : QCM - logique

Pour chacun des trois couples de propositions ci-dessous, indiquer si :
a) P est une condition nécessaire pour Q
b) P est une condition suffisante pour Q
c) P est une condition équivalente à Q
d) Aucune des trois propositions.

1) P: « Un trinôme admet exactement une racine» et Q: «$\Delta=0$»

2) P : « un trinôme admet au moins une racine » et Q: «$\Delta=0$»

3) P : « un trinôme admet au moins une racine » et Q: «$\Delta\geqslant 0$»

Ex 1-11 : Racines d'un trinôme avec un logiciel de calcul formel puis avec une calculatrice

Résoudre chacune des équations ci-dessous avec un logiciel de calcul formel puis avec une calculatrice.
1) $6x^2-15x-80=0$

2) $1500x^2+2006x+1876=0$

3) $x^2-\sqrt{17}x-\sqrt{7}=0$

Pensez-vous que toutes les calculatrices donnent des solutions exactes ?

Ex 1-12 : Résoudre une équation du second degré sans Δ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

1) $x^2+5x=0$

2) $3x^2-36=0$

3) $x^2-4x+4=0$

4) $3x^2-6\sqrt{3}x+9=0$

Ex 1-13 : Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation et en déduire, lorsque cela est possible, la forme factorisée du trinôme correspondant.

a) $x^2+\frac{1}{3}x+1=0$

b) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1=0$

c) $3x^2+7x+1=0$

d) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{5}x+\sqrt{3}=0$

Ex 1-14 : Racine évidente

1) Soit P le trinôme défini par P : $x \longmapsto 3x^2+4x-7$.

a) Déterminer une racine évidente x_1 de P.

b) Déterminer l'autre racine en utilisant $x_1 x_2=\frac{c}{a}$

2) Répondre aux questions précédentes dans chacun des cas suivants :

a) Q : $x \longmapsto 2x^2-x-3$

b) R : $x \longmapsto x^2+12x+20$

Ex 1-15 : Factorisation

Écrire, lorsque cela est possible. chaque polynôme sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

a) x^2-81

b) $x^2+10x+25$

c) $10x-x^2$

d) $(x^2-3)^2-1$

e) $(x^2-3)^2-(x^2+1)^2$

f) $8x^3-4x^2+5x$

g) x^4-12x^2+36

Ex 1-16 : Équations se ramenant à des équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

1) $x^4-5x^2+4=0$

2) $x^4-x^2-2=0$

3) $6x-11\sqrt{x}-3=0$

4) $5x^3-3x^2-5x=0$

5) $\frac{x}{2x+3}=\frac{x-1}{2x}$

6) $1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}=0$

7) $\sqrt{x+1}=x+2$

8) $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x+2}$

Inéquation du second degré

Ex 1-17 : Résoudre une inéquation du second degré sans Δ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

1) $2(x-5)^2+4\geqslant 0$

2) $-3(x-15)^2-4\geqslant 0$

3) $-2(x-5)^2-7\leqslant 0$

4) $5(x+5)^2>0$

5) $-4(3-x)^2>0$

Ex 1-18 : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous : (calculs faits dans l'Ex 1-13 jusqu'à d)

1) $x^2+\frac{1}{3}x+1\geqslant 0$

2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1<0$

3) $3x^2+7x+1>0$

4) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{5}x+\sqrt{3}\leqslant 0$

5) $5x^2-6x-20<-x^2-x+4$

Ex 1-19 : Fonctions rationnelles

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles ci-dessous :

1) $f\ :x\longmapsto \frac{2x^2-x-1}{x^2-3x-6}$

2) $g\ : x \longmapsto x-2+\dfrac{1}{x+3}$

Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème

Ex 1-20 : Trouver un trinôme

Dans chacun des cas suivants. déterminer un trinôme P du second degré tel que :

a) P admet pour racines les nombres 4 et 7.

b) P admet une racine double égale à -5.

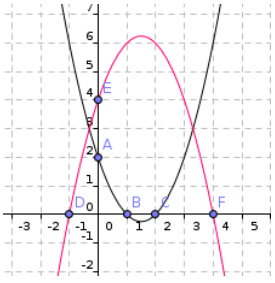
c) P admet pour racines les nombres -9 et 8 et admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

d) P n'admet aucune racine et admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

e) La courbe représentative de P admet la droite d'équation $x=-5$ comme axe de symétrie et P admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Ex 1-21 : Parabole passant par trois points

Déterminer les deux trinômes représentés par les paraboles ci-contre :



Ex 1-22 : Associer paraboles et trinômes

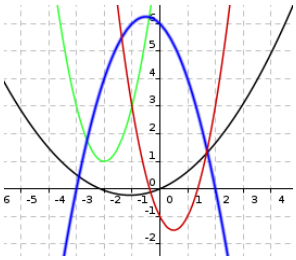
Voici quatre courbes représentatives et quatre fonctions f , g , h et k dont on ne connaît pas les coefficients a_1 ... a_4 . Malgré ces informations manquantes, associer chaque courbe à sa fonction.

$f(x)=a_1 x^2-2x-1$

$g(x)=a_2 x^2+\frac{3}{7}x$

$h(x)=a_3(x+2)^2+1$

$k(x)=a_4(x-2)(x+3)$



Opérations sur les trinômes

Ex 1-23 : Ensemble de définition

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction, donner une expression simplifiée de la fonction sur son ensemble de définition, puis préciser si la fonction est un trinôme du second degré :

1) $f:x \longmapsto \frac{x^4-4}{x^2+2}$

2) $g:x \longmapsto \frac{x^4-4}{x^2-2}$

3) $h:x \longmapsto \frac{5(6x-7)^2}{25x^2-36x+49}$

4) $i:x \longmapsto \frac{5(x-3)^2}{x^2-6x+9}$

Ex 1-24 : Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f:x \longmapsto \sqrt{3x^2-10x+7}$

2) $g:x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3x^2-10x+7}}$

Égalité de deux trinômes

Ex 1-25 : Fonction rationnelle

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{12x^2+2x-12}{2x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_f$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-1}$

Ex 1-26 : Fonction rationnelle

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{4x^3-6x+15}{x(x+5)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Démontrer qu'il existe quatre réels a , b , c et d tels que pour tout $x \in D_f$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x+5}$

Ex 1-27 : Polynôme de degré 3

Soit P le polynôme de degré 3 défini par $P(x)=2x^3-x^2-9x-6$.

1) Démontrer que -1 est une racine de P.

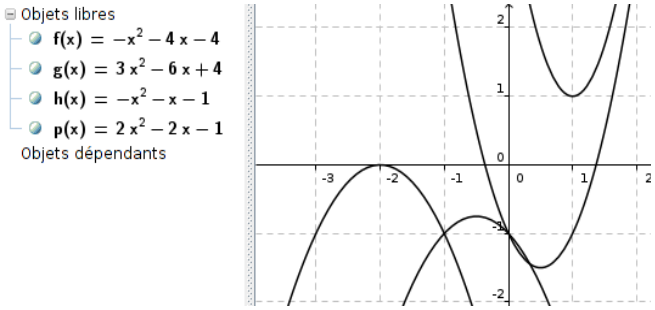
2) On peut alors factoriser P comme suit : $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$.
En déduire les valeurs de a , b et c .

3) Factoriser P.

Variation du trinôme – Représentation graphique

Ex 1-28 : Associer paraboles et trinôme

Associer chaque trinôme à sa courbe représentative en considérant les variations du trinôme et le discriminant :

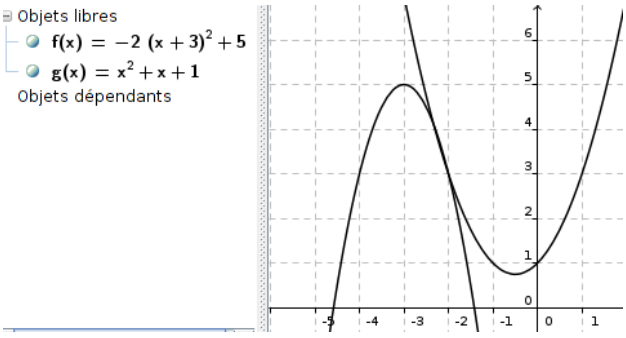


Ex 1-29 : Trouver un trinôme

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P	↗	3	↘

Déterminer le trinôme du second degré dont on donne le tableau de variations et le discriminant $\Delta = 5$.

Ex 1-30 : Tangentes ou pas ?



1) Identifier C_f et C_g .

2) Combien semble-t-il exister de points d'intersections entre C_f et C_g .

3) Vérifier par le calcul.

Problèmes du second degré

Ex 1-31 : Triangle rectangle

Le triangle de dimensions 3,4 et 6 n'est pas rectangle.
Peut-on, en ajoutant une même longueur à ses trois côtés, obtenir un triangle rectangle ?

Ex 1-32 : Avec des entiers

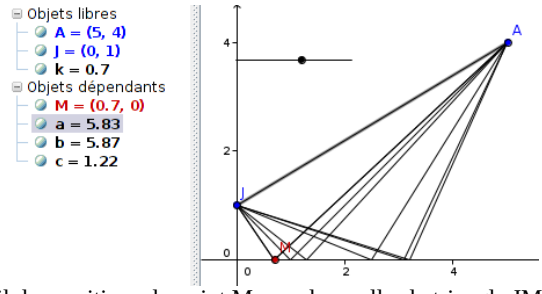
1) Existe-t-il deux nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés est égale à 1985 ? à 20111 ?

2) On considère le cas général où la somme des carrés égale k où $k \in \mathbb{N}$.

Démontrer qu'une condition nécessaire pour que le problème ait au moins une solution est : « $2k-1$ est un carré parfait »

Ex 1-33 : Triangle rectangle dans un repère

Dans un repère orthonormé, on considère les points $J(0;1)$, $A(5;4)$ et M un point mobile de l'axe des abscisses.



Existe-t-il des positions du point M pour lesquelles le triangle JMA est rectangle en M ?

Si oui, on donnera ses positions exactes.

Ex 1-34 : Optimisation

AMN est un triangle rectangle en A tel que $AM=x$ cm et $AN=5-x$ cm.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

2) Existe-t-il une position du point M pour laquelle la longueur MN^2 est maximale ou minimale ? Si tel est le cas, déterminer cette valeur et en déduire la plus grande ou la plus petite valeur de MN.

Approfondissement

Ex 1-35 : Somme et produit de deux réels

Soit x_1 , x_2 , S et P quatre nombres réels.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont racines du trinôme

$f\ : x \longmapsto x^2-Sx+P$

Montrer que $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$

2) Réciproquement, on suppose que $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$.

Vérifier que pour tout réel x :

$$x^2-Sx+P=(x-x_1)(x-x_2)$$

Conclure.

3) Trouver deux nombres réels ayant pour somme 25 et pour produit 144.

4) Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 50 cm et d'aire 144 cm^2

Ex 1-36 : Factorisation par $x-a$

x et a ($a\neq 0$) sont deux réels et n ($n\neq 0$) est un entier naturel .

1) a) Démontrer que : $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)$

b) Écrire cette expression avec le symbole de sommation : Σ

2) En posant $u=\frac{x}{a}$, vérifier que $x^n-a^n=a^n(u^n-1)$

3) a) En déduire que : $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2\,x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}\,x+a^{n-1})$

b) Écrire cette expression avec le symbole de sommation : Σ

Algorithme - Python

Ex 1-37 : Triplets pythagoriciens

Un triplet pythagoricien est un triplet $(x;y;z)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant $x^2+y^2=z^2$.

1) Trouver trois nombres entiers naturels consécutifs vérifiant cette relation ?

2) Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin qu'il affiche les triplets pythagoriciens $(x;y;z)$ pour des entiers inférieurs à 100.

```
from math import *

for x in range(1,101):
    for y in range(1,101):
        s= .........
        z= .........
        if ( ..............  ):
            print(x,y,z)
```

3) Avec cet algorithme, on obtient le triplet (3,4,5) et le triplet (4,3,5).

Modifier la boucle portant sur l'entier y afin d'éviter le deuxième cas.

Chapitre 2 - CONDITIONNEMENT – INDÉPENDANCE

1) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B**» le réel, noté $\mathbf{P_B(A)}$ (anciennement noté $\mathbf{P(A/B)}$ défini par :

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 en série S. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 provenaient de la série S.
Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève provient de la série S » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac » .
Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(A) =$ $(B) =$ et $P(A \cap B) =$

En général :

On en déduit que $P_B(A) =$

La probabilité que l'élève provienne de la série S

On a aussi $P_A(B) =$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac

Remarques :

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B =$ et $P_B(A) =$
- Si $B \subset A$, alors $A \cap B =$ $P_B(A) =$

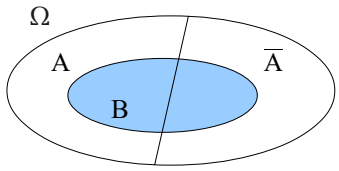
Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

Preuve :

- On a $A \cap B \subset B$, donc $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$ et en divisant les trois membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $P(B)$, on obtient : $0 \leqslant \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$



- On a $P_B(A \cup \overline{A}) =$

  Or $P_B(A \cup \overline{A}) =$ et les événements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles.
  Ce qui donne :

On voit que : $(A \cup \overline{A}) \cap B =$

2) PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION

Propriété : Formule des probabilités composées

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi …

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule de l'urne . Si elle est bleue, on la remet dans 1'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne . On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.
On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».

L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

On a $P(B_1 \cap B_2) =$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) =$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

Ce qui permet d'écrire $P_{B_1}(B_2) =$

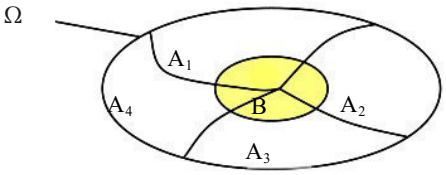
On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) =$. La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à

3) FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Ω est l'univers des événements élémentaires d'une expérience aléatoire . A_1 , A_2 , … , A_n désignent des événements de Ω .

Définition :

Dire que A_1 , A_2 , … , A_n réalisent **une partition** de l'univers Ω , signifie que :
- les événements A_1 , A_2 , … , A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$



On parle aussi de **système complet d'événements**.

Tout événement B est alors la réunion **disjointe** des événements $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, … , $A_n \cap B$

On a donc $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$

De plus pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Propriété : Formule des probabilités totales

Dans les conditions précédentes on a :

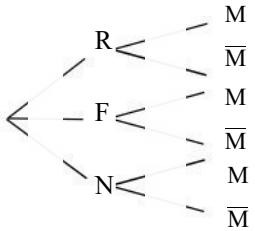
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités $P(A_i)$ d'une famille d'événements A_i constituant une partition de l'univers Ω , ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B par rapport à chaque événement A_i.

Exemple :

Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population.
Une étude statistique établit que 70 % de la population réagit négativement au test (événement N) , 20 % réagit faiblement au test (événement F) et 10 % réagit fortement au test (événement R).
La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :
- 0,9 lorsque le test est fortement positif
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif
- 0,05 lorsque le test est négatif



Par hypothèse, on a donc :

$P(R) =$, $P(F) =$, $P(N) =$ $P_R(M) =$ $P_F(M) =$ et $P_N(M) =$

Les événements R, F et N constituent une partition de la population.

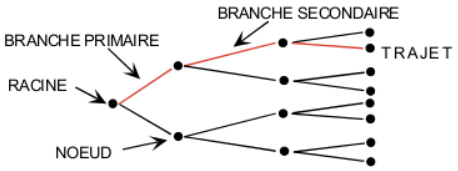
D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc égale à

4) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres (comme nous venons de le faire dans l'exemple précédent) dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires.**
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet.**



Règles :

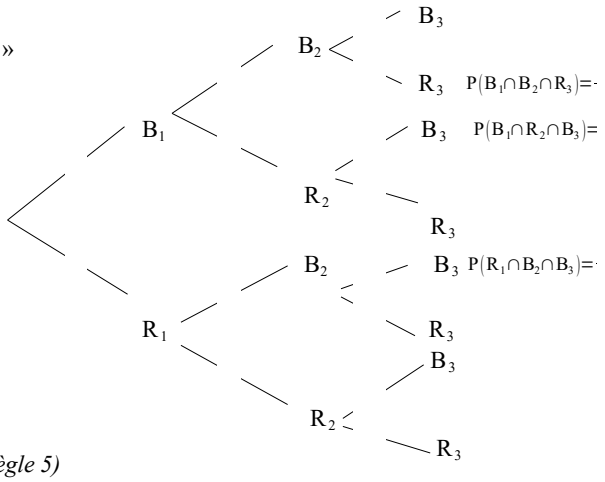
1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω.
2. Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le **produit** des poids des branches le constituant. *(Probabilités composées)*
5. La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la **somme** des probabilités de ces trajets. *(Probabilités totales)*

Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1. *(règle 1)*
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.
On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :
On note B_i : « la ième boule est bleue» et R_i : « la ième boule est rouge »



- La probabilité que la troisième boule soit rouge sachant que les deux premières étaient bleues est :

- La probabilité de l'événement $R_1 \cap B_2 \cap B_3$ est

- Soit A l'événement : « tirer une seule boule rouge » .

  A est associé aux trajets
  On a :

(règle 5)

5) ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Deux évènements A et B de probabilités non nulles sont dits **indépendants** si le fait que l'un d'entre eux soit réalisé ou non n'influe pas la probabilité que l'autre soit réalisé, c'est à dire :
si $P_B(A) = P(A)$ ou si $P_A(B) = P(B)$
En utilisant la propriété précédente, on constate que l'indépendance de A et B se traduit par la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

Une urne contient quatre boules bleues numérotées b_1 , b_1 , b_2 et b_3 , et six boules rouges numérotées r_1 , r_1 , r_1 , r_2 , r_3 et r_4.
On suppose toutes ces boules indiscernables au toucher, et on en tire une au hasard.
On considère les événements :
B : « la boule tirée est bleue » ; R : « la boule tirée est rouge » ; Q : « la boule tirée porte le numéro 4 » ; U : « la boule tirée porte le numéro 1 » .
Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(U) =$; $P(B) =$ et $P(B \cap U) =$

On a :

Ce résultat s'explique en remarquant que la proportion des boules bleues portant le numéro 1 parmi les boules portant le numéro 1 est la même que celle des boules bleues parmi les boules de l'urne.

On a aussi $P(Q)=$, $P(B)=$ et $P(Q\cap B)=$

On a

Remarques :

- Tout évènement A est indépendant de l'évènement certain et de l'évènement impossible.
- Ne pas confondre événements **incompatibles** et événements **indépendants**.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si

Dans l'exemple précédent, les événements B et U sont indépendants, mais non incompatibles ; les événements B et Q sont incompatibles et non indépendants.

Propriété :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

Si A et B sont deux événements indépendants , alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Preuve :

6) SUCCESSION DE DEUX ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition et propriété :

Lorsque deux expérience aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'influent pas les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes.**

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple :

On tire successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes et on note les deux cartes obtenues.
Deux cas se présentent :

- On remet la carte dans le paquet : les deux tirages sont indépendants.

- On ne remet pas la carte dans le paquet : le résultat du deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage et les deux tirages ne sont donc pas indépendants.

Si l'on remet la carte dans le paquet, la probabilité d'avoir deux rois est donc :

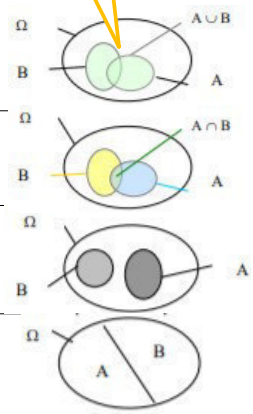
Rappels de seconde :

A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité
Événement impossible : $A = \varnothing$	événement qui ne se réalise jamais
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours
C est **la réunion** de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A **ou** B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A **ou** B
C est **l'intersection** de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A **et** B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A **et** B en même temps.
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \varnothing$
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A .

A ou B signifie :
- exclusivement A
- ou exclusivement B
- ou A et B



Attention :
Le **« ou mathématique »** est **inclusif** .

Définition :
On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω , c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre $p_i \geqslant 0$ de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité P(A) d'un événement A est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Formules :
Soit A et B deux événements de Ω , alors :

- $P(\Omega)=1$
- $P(\varnothing)=0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Équiprobabilité :
Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités, on a : $p_i = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$P(A) = \dfrac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$

Loi des grands nombres :
Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Probabilité conditionnelle :
Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B**» le réel, noté : $\mathbf{P_B(A)}$: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

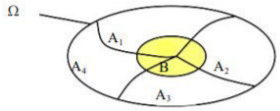
$0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$
$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$
En général, $P_B(A) \neq P_A(B)$

Probabilité d'une intersection :
Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Partition :
Dire que les événements A_1 , A_2 , … , A_n réalisent **une partition** de l'univers Ω , signifie que :

- les événements A_1 , A_2 , … , A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



Formule des probabilités totales :
Dans les conditions précédentes on a : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Événements indépendants :
Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété :
Si A et B sont deux événements indépendants , alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Succession de deux épreuves indépendantes :
Lorsque deux expérience aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'influent pas les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes**.
Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale **au produit des probabilités de chacun d'eux**.

Conditionnement : maîtriser le cours

Ex 2-1 : Différentes expressions de $P(A\cap B)$

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .
Quelles sont les différentes manières de calculer $P(A\cap B)$?

Ex 2-2 : Vrai ou faux

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .
Répondre vrai ou faux pour chacune des questions ci-dessous :

1)	$P(A)+P(\overline{A})=1$	
2)	$P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(B)$	
3)	$P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$	
4)	Si $A\cup B=\Omega$ alors $P(A)=1-P(B)$	
5)	Si $A\cap B=\emptyset$ alors $P(A)=1-P(B)$	
6)	$P_B(A)=P(A)P(\overline{A}\cap B)$	
7)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_B(\overline{A})$	
8)	$P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_B(A)$	
9)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$	
10)	$P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$	
11)	$P(A)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$	
12)	$P(A)=P_A(B)+P_A(\overline{B})$	
13)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,6$, alors $B=\overline{A}$	
14)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,5$, alors $P(A\cap B)=0,2$	
15)	Si $P(A)=0,2$, $P_A(B)=0,3$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,8$, alors $P(B)=0,7$	

2-3 : Tableau à double entrée

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .
Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B		0,14	0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

En déduire : $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$

Ex 2-4 : Utiliser la définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

1) On a $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A\cup B)$

2) On a maintenant $P(A)=\frac{1}{4}$, $P_A(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$

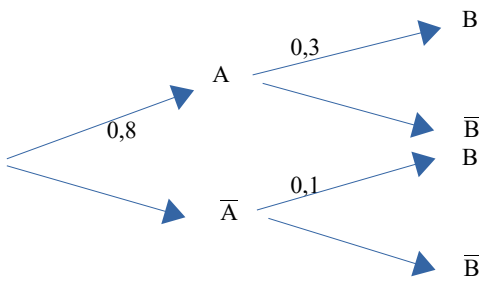
Calculer $P(A\cap B)$, $P(B)$ et $P_B(A)$.

En déduire $P(\overline{A}\cap B)$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P(A\cap\overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$

Arbre, indépendance : maîtriser le cours

Ex 2-5 : Arbre

À partir de l'arbre , déterminer $P(A)$, $P_A(B)$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$ et $P_A(\overline{B})$



Ex 2-6 : Vrai ou faux

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . (de probabilités non nulles pour les questions 4 à 7) et **indépendants** pour les questions 8 à 11.
Répondre vrai ou faux pour chacune des questions ci-dessous :

1)	Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	
2)	Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles.	
3)	Si $P(A)=0$, alors A et B sont indépendants.	
4)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	
5)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$	
6)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cap B)=P_B(A)\times P_A(B)$	
7)	Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.	
8)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cap B)=0,24$	
9)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cup B)=0,72$	
10)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,4$, alors $P(\overline{A}\cap B)=0,28$	
11)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,8$, alors $P(\overline{A}\cup B)=0,78$	

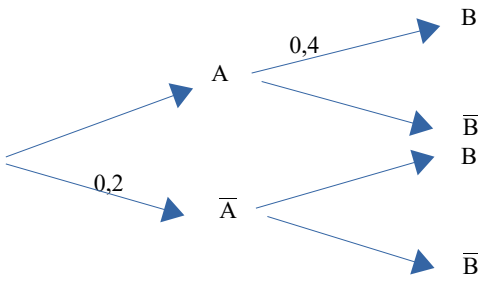
Ex 2-7 : Tableau à double entrée

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω .
Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B			0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

Ex 2-8 : Arbre

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω . Compléter l'arbre ci-dessous :



Utiliser un arbre

Ex 2-9 : Hommes, femmes et lunettes

Dans une réunion, on compte 18 femmes et 24 hommes. 12 personnes portent des lunettes dont le quart sont des femmes.
On choisit une personne au hasard de la réunion.
On note A : « la personne choisie est un homme » et B : « la personne choisie porte des lunettes ».

1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

3) Les hypothèses connues permettent-elles de déterminer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Ex 2-10 : Pièces truquées et pièces équilibrées

Dans un lot de 100 pièces astérix de monnaie toutes de même apparence ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.
La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce truquée est de $\frac{3}{4}$. La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est de $\frac{1}{2}$.
On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance .
On note T : « la pièce est truquée » et F : « on obtient FACE »

1) Calculer la probabilité d'avoir pris une pièce truquée.

2) Faire un arbre illustrant la situation.

3) a) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce truquée et de tomber sur FACE.

b) Calculer la probabilité de tomber sur FACE.

4) La pièce est tombée sur FACE . Quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?

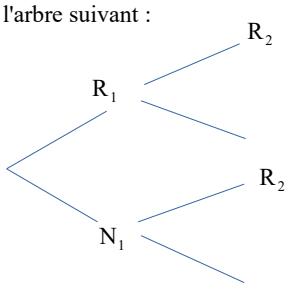
Ex 2-11 : Boules rouges et boules noires

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires.
1) On tire au hasard une boule de l'urne . Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2) On tire au hasard une deuxième boule de l'urne sans avoir remis la première.
a) Si la première boule tirée est rouge, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?

b) Si la première boule tirée est noire, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?

c) Compléter l'arbre suivant :



d) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ? Deux boules rouges ? Deux boules de la même couleur ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage ?

f) Sachant que la deuxième boule est noire, quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule rouge au premier tirage ?

Ex 2-12 : En âge de voter ...

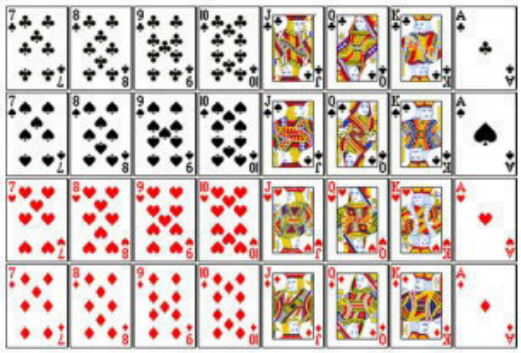
Dans un lycée, 50 % des élèves en âge de voter en 2018 sont en TES, 30 % en TL et les autres en TS.
Lors du vote, le taux d'abstention a été de 10 % chez les élèves de TES, 30 % chez ceux de TL et 15 % chez ceux de TS.
On choisit au hasard un élève en âge de voter.
1) Quelle est la probabilité qu'il soit en S et qu'il ait voté ?

2) Quelle est la probabilité qu'il ait voté ?

Utiliser la notion d'indépendance

Ex 2-13 : Événement indépendants ?

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements A: « la carte tirée est un Roi » et B : « la carte tirée est un Pique »
Les événement A et B sont-ils indépendants ?



Ex 2-14 : Loteries

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{3}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{4}$.
Les événements G_1 : « gagner à la première loterie » et G_2 : « gagner à le deuxième loterie » sont indépendants.
Quelle est la probabilité que Pierre :

1) gagne aux deux loteries ?

2) gagne seulement à la première loterie ?

3) ne gagne à aucune des loteries ?

Ex 2-15 :

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article . Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.
Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.
Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Calculer la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux.

Épreuves indépendantes

Ex 2-16 : QCM

On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
On note les numéros obtenus. Dans chaque cas choisir la bonne réponse.
1) La probabilité d'obtenir un double 6 est :
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{30}$

2) La probabilité d'obtenir un 5 et un 6 est égale à :
a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{15}$

3) La probabilité d'obtenir 6 au second lancer est égale à :
a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{5}{36}$ c $\frac{1}{6}$

Ex 2-17 : Feux tricolores

Sur le trajet d'un automobiliste, se trouvent deux feux tricolores de circulation fonctionnant de manière indépendante.
Le cycle de chacun est réglé de la manière suivante :
vert : 35s **orange** : 5s **rouge** : 20s
Calculer la probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feu orange.

Ex 2-18 : Licenciés d'un club

Ci-dessous, on a représenté dans un tableau la répartition des licenciés d'un club de sport.

	Jeune	Adulte	Total
Homme	34	46	80
Femme	68	92	160
Total	102	138	240

1) On prélève au hasard la fiche de l'un des licenciés.
On considère les événements :
F : « Le licencié est une femme » et A : « Le licencié est un adulte »
Justifier que les événements A et F sont indépendants.

2) On prélève désormais, au hasard, successivement et avec remise, deux fiches des licenciés.
Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un jeune homme parmi ces deux fiches.

Ex 2-19 : Épreuves différentes indépendantes : deux urnes

On dispose de deux urnes U1 et U2.
L'urne U1 contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules vertes.
L'urne U2 contient 4 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes.
L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et de noter leur couleur . Les tirages sont indépendants.
On appelle R_i, V_i et N_i les événements : on tire une boule respectivement Rouge, Verte, Noire de l'urne U_i, pour $i=1$ ou $i=2$.

Déterminer la probabilité que les deux boules soient de la même couleur.

Ex 2-20 : Trois répétitions : pièce équilibrée

On dispose d'une pièce parfaitement équilibrée et on la jette successivement trois fois.
On appelle A l'événement « obtenir pile au premier jet » , B l'événement « obtenir face au deuxième jet » et C l'événement « obtenir face au troisième jet ».

1) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

2) Trouver la probabilité de l'événement $A \cap B \cap C$

Algorithme – Python

Ex 2-21 : Simuler un tirage sans remise dans une urne

Une urne contient 8 bulletins verts et 6 bulletins bleus.
Camil a écrit la fonction Urne en Python ci dessous :

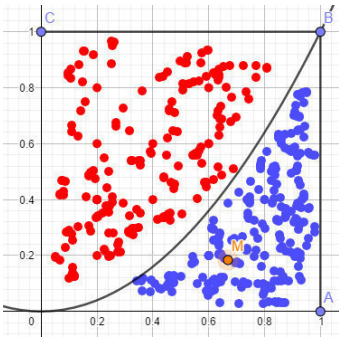
```
from random import randint
def Urne():
    tirage=[]
    for i in range(2):
        if randint(1,14)<=6:
            tirage.append("bleu")
        else:
            tirage.append("vert")
    return(tirage)
```

1) Que renvoie cette fonction ?

2) Quelle est la probabilité que cette fonction renvoie le couple ['bleu', 'bleu'] ?

3) Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie le nombre de bulletins bleus obtenus lors de deux tirages sans remise de l'urne.

Ex 2-22 : Méthode de Monte Carlo



On a représenté ci-contre un carré OABC et la fonction carrée.
On se propose de donner une valeur approchée de l'aire du domaine D délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées , la droite d'équation $x=1$ et la parabole en utilisant la loi des grands nombres.

1) On choisit au hasard un point dans le carré OABC et on regarde s'il est dans le domaine D.

La probabilite qu'il se trouve dans le domaine D est : $p = \dfrac{\text{aire de } D}{\text{aire de OABC}}$

a) Quelles conditions vérifient les coordonnées $(x;y)$ d'un point M situé :
- dans OABC

- dans le domaine D

b) Quelle est l'aire de OABC ?

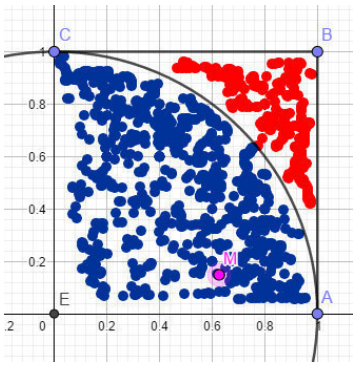
2) a) Compléter cet algorithme simulant 1000 fois l'expérience aléatoire, puis le traduire en Python

```
c ← ...
Pour k allant de 1 à …
    x ← un nombre réel compris entre …
    y ← un nombre réel compris entre …
    Si …            alors c ← c+1
    Fin Si
Fin Pour
p ← ...
```

b) Justifier qu'en exécutant ce programme, on obtient une valeur approchée de l'aire de *D*.

c) Comment obtenir une meilleure approximation ?

Une approximation de π :



3) On considère le quart de disque, noté *D*, de centre O et de rayon 1, situé dans le carré OABC . On choisit à nouveau au hasard un point dans le carré OABC et on regarde s'il est dans le domaine *D*.

a) Quelle est la probabilité que le point soit dans *D ?*

b) Quelle condition la longueur OM doit vérifier pour que le point M soit dans *D*?

c) On simule 1000 fois l'expérience aléatoire. Écrire en python un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de π .

Chapitre 3 - TRIGONOMÉTRIE

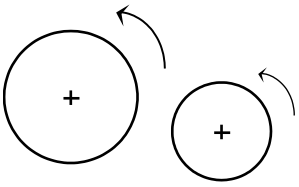
1) ORIENTATION DU PLAN

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

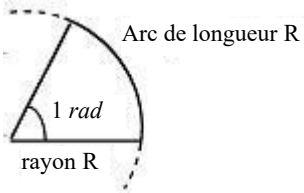
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



2) MESURE DES ANGLES EN RADIAN

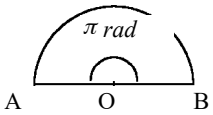
Définition :

On appelle **radian** (*rad*) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.



Remarques :

- Un angle au centre plat intercepte un arc de longueur π R . Il a donc pour mesure π radians.
- Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)
  Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesures à l'aide d'un tableau de proportionnalité :



mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian						

- $1\ rad \approx 57{,}3\ °$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0{,}0175\ rad$
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur .
  Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur

3) L'ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE

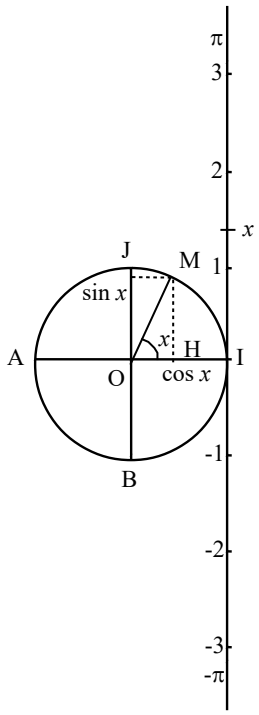
Dans le repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O.
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Tout point de l'axe correspond à **un point** du cercle.
Tout point du cercle est associé à **une infinité** de points de l'axe, donc à une infinité de nombres réels.
Plus généralement, au réel x est associé le point M du cercle et au point M sont associés les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$, $x-4\pi$, etc...

Par exemple, la longueur d'un quart de cercle de rayon 1 étant $\frac{2\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$,

le point J est associé à

(après un ou deux tours dans le sens positif, ou un tour dans le sens négatif)



Définitions :

À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.
Ce point M est unique.

- L'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- L'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)

Exemples :

$\cos 0 =$ et $\sin 0 =$; $\cos \pi =$ et $\sin \pi =$; $\cos \frac{\pi}{2} =$ et $\sin \frac{\pi}{2} =$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$

4) LIEN AVEC LES FORMULES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Lorsque M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ parcouru dans le sens direct (bornes exclues), ses coordonnées sont strictement positives.
Ainsi pour un angle aigu $\widehat{IOM}$ (mesure comprise entre 0° et 90° ou entre 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad) les grandeurs $\cos x$ et $\sin x$ peuvent être interprétées comme des rapports de longueurs.

On retrouve les notions vues en troisième dans le triangle rectangle.

Propriété :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$\cos \widehat{HOM} =$ et $\sin \widehat{HOM} =$

5) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)					
$\sin x$					
$\cos x$					

6) PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

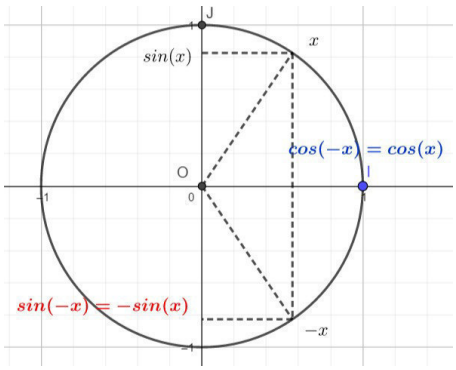
On note $\cos^2 x=(\cos(x))^2$ et $\sin^2 x=(\sin(x))^2$

Preuve :

- Preuve de : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

- Preuve de : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

- Preuve de : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$



7) LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

A) DÉFINITION

Définition :

- La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \cos(x)$
- La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sin(x)$

B) PARITÉ

On a vu que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. On en déduit que :

Propriété :

- La fonction cos est **paire**.
- La fonction sin est **impaire**.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

- La représentation graphique de la fonction cos admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.
- La représentation graphique de la fonction sin admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

C) PÉRIODICITÉ

On a vu aussi que pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$. On dit que :

Propriété :

Les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période 2π

Interprétation graphique dans un repère :

Il suffit de représenter ces courbes sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

D) VARIATIONS SUR $[0;\pi]$

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

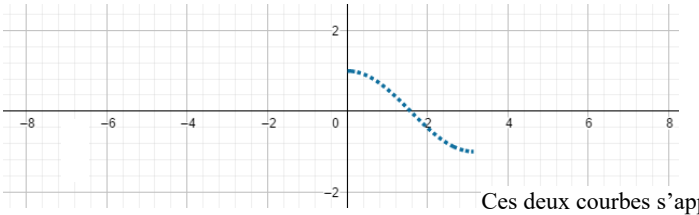
x	
cos	

x	
sin	

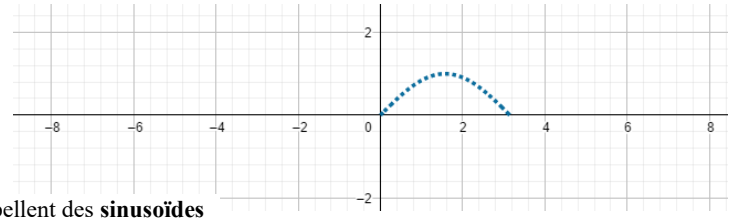
E) COURBES REPRÉSENTATIVES

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0;\pi]$
- La fonction cos est paire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie d'axe $(O\,x)$.
- La fonction sin est impaire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie de centre O.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}\,(k \in \mathbb{Z})$

Courbe représentative de la fonction cos



Courbe représentative de la fonction sin



Ces deux courbes s'appellent des **sinusoïdes**

Définition :

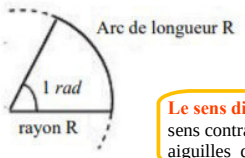
On appelle **radian** (*rad*) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.

CALCULATRICE :

Il faut bien choisir l'unité : **degré** ou **radian**

Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles

mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$



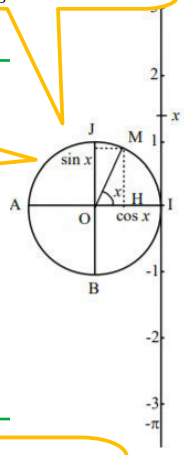
Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'enroulement de la droite numérique :

À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels. Ce point M est unique.

- L'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- L'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



Lien avec les formules dans un triangle rectangle :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = \cos x \quad \textbf{et} \quad \sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = \sin x$$

Valeurs remarquables :

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Astuce :
- On écrit 0 , 1 , 2 , 3 , 4 dans chacune des cases
- puis on applique la racine carrée
- et on divise par 2

C'est les mêmes résultats que pour le sin, mais dans l'autre sens

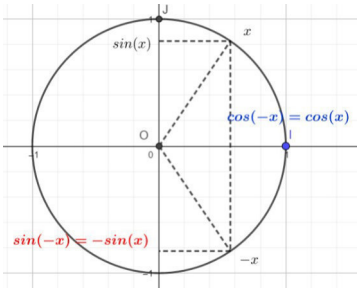
Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

On note :
$\cos^2 x = (\cos(x))^2$

$\sin^2 x = (\sin(x))^2$

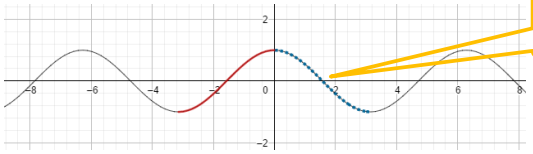


La fonction cosinus :

Parité :
$\cos(-x) = \cos x$

Périodicité :
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

- La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \cos(x)$
- La fonction cos est **paire**. *(La représentation graphique de la fonction cos admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**)*
- La fonctions cos est **périodique** de période 2π *(Il suffit de représenter la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π , puis on complète la courbe en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$)*



Grâce au cercle trigonométrique, on voit que la fonction cos est décroissante sur [0; π]

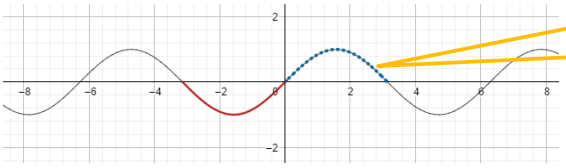
Ces deux courbes s'appellent des **sinusoïdes**

La fonction sinus :

Parité :
$\sin(-x) = -\sin x$

Périodicité :
$\sin(x+2\pi) = \sin x$

- La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sin(x)$
- La fonction sin est **impaire**. *(La représentation graphique de la fonction sin admet donc l'**origine du repère** pour **centre de symétrie**)*
- La fonctions sin est **périodique** de période 2π *(Il suffit de représenter la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π , puis on complète la courbe en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$)*



Grâce au cercle trigonométrique, on voit que la fonction sin est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Le radian – Arcs de cercle

Ex 3-1 : Conversion

Compléter le tableau suivant :

Mesure en degré	90	210			15		120
Mesure en radian			$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{45\pi}{2}$	

Ex 3-2 : Longueurs d'arcs de cercle

Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :

1) Un arc de cercle de diamètre 5 cm et d'angle $\frac{\pi}{4}$ rad.

2) Un arc de cercle d'angle 210° et de rayon unitaire.

3) Un arc de cercle de rayon 20 cm et d'angle $\frac{2\pi}{5}$ rad.

4) Un arc de cercle de rayon unitaire et d'angle 150°.

Ex 3-3 : Angle au centre

Sur un cercle de rayon R, déterminer la mesure en degré des angles des arcs de cercle de longueur L dans chacun des cas suivants :

1) R=5 et $L=\pi$

2) R=0,5 et $L=\frac{\pi}{6}$

3) R=10 et $L=\frac{20\pi}{3}$

Ex 3-4 : Cadran d'horloge

Un cadran d'horloge dispose de deux aiguilles . Celle des minutes mesure 12 cm et celle des heures 6 cm.
Calculer la distance parcourue par l'extrémité de la grande aiguille depuis midi lorsqu'il est :

1) 12h05

2) 12h25

3) 13h15

4) 16h32

L'enroulement de la droite numérique

Ex 3-5 : QCM

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.

1) Le sens trigonométrique est :

a) le sens des aiguilles d'une montre ; b) le sens direct ;

c) le sens inverse des aiguilles d'une montre ; d) le sens indirect.

2) Le cercle trigonométrique est tel que :

a) son rayon vaut π b) son diamètre vaut 2

c) son périmètre vaut 360° d) son périmètre vaut 2π

3) Si un segment est enroulé dans le sens trigonométrique autour du cercle trigonométrique les longueurs associées seront :

a) positives b) négatives c) de signe quelconque

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, deux points x et y de la droite numérique :

a) espacés de 3π ne sont pas situés sur le même point du cercle.

b) espacés de 360° ne sont pas situés sur le même point du cercle.

c) sont situés sur le même point du cercle que s'ils sont espacés d'un multiple de 2π .

d) espacés de 0° sont situés sur le même point du cercle.

Ex 3-6 : Vrai ou faux

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.

1) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

2) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\pi+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

3) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, aucun point de la droite numérique ne peut correspondre au point O.

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique dans le sens direct, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point J.

Ex 3-7 : Se repérer sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique les points ci-dessous correspondants, après enroulement autour du cercle trigonométrique, aux abscisses suivantes de la droite numérique :

points	A	B	C	D	E	F	G	H
abscisses	0	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	-2000π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{-5\pi}{4}$	11π

Ex 3-8 : Même point-image ?

Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels de chaque couple ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) $\frac{18\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$

2) $\frac{-7\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$

3) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{-19\pi}{6}$

4) $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{15\pi}{4}$

Sinus et cosinus d'un nombre réel

Ex 3-9 : Vrai ou faux

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à x après enroulement de la droite numérique.

1) L'abscisse du point M est $\sin x$.

2) L'ordonnée du point M est $\sin x$.

3) La longueur du segment [OM] est 2π .

4) L'ordonnée du point M est comprise entre -1 et 1.

5) L'abscisse du point M est positive.

Ex 3-10 : Vrai ou faux

Soit x un réel quelconque.

1) $\cos x+\sin x=1$

2) $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$

3) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

4) $\cos(-x)=\sin x$

5) $0\leqslant\cos x\leqslant 1$

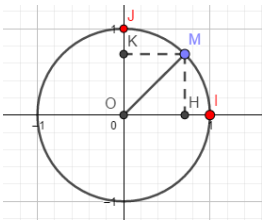
6) $\cos x\leqslant\sin x$

7) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $k\in\mathbb{R}$

8) $\sin(-x)=-\sin(x)$

Ex 3-11 : valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique . M est un point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{4}$.



H et K sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ).

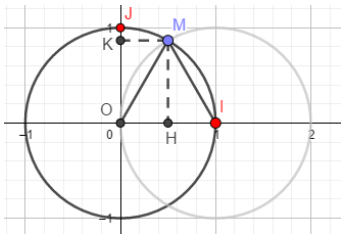
1) Quelle est la nature du triangle OMH ?

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ex 3-12 : valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique . M est un point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

H et K sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ).



1) Quelle est la nature du triangle OMI ?

2) Que peut-on alors dire de la hauteur (MH) du triangle OMI ?

3) En déduire la longueur OH, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4) Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ex 3-13 : Signe du cosinus ou du sinus

Donner le signe du sinus ou du cosinus dans chacun des cas suivants :

a) $\sin x$ et $x \in [0;\pi]$

b) $\cos x$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\sin x$ et $x \in [-\pi;0]$

d) $\cos x$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

Ex 3-14 : Un peu de logique

1) Si $\cos x = \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{3}$

2) Si $x = \frac{\pi}{4}$, alors $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Si $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $x = \frac{2\pi}{3}$

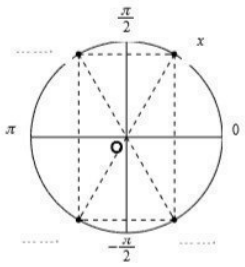
4) Si $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{5\pi}{6}$

5) Si $\cos(2x) = \cos(2y)$, alors $\cos x = \cos y$

Ex 3-15 : Formules à connaître et surtout à retrouver

1) a) Compléter les pointillés avec :

$\pi+x$, $\pi-x$ et $-x$



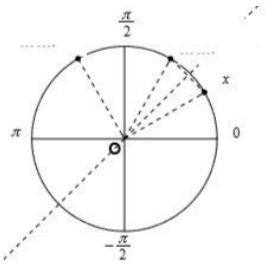
b) En utilisant les propriétés des symétries, en déduire :

$\cos(\pi+x)=$ $\cos(\pi-x)=$

$\sin(\pi+x)=$ $\sin(\pi-x)=$

2) a) Compléter les pointillés avec :

$\frac{\pi}{2}-x$ et $\frac{\pi}{2}+x$



b) En utilisant les propriétés des symétries, en déduire :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

Ex 3-16 : Calculs

Calculer les sinus et les cosinus des réels suivants :

1) $\frac{5\pi}{6}$

2) $-\frac{11\pi}{2}$

3) $-\frac{7\pi}{3}$

4) $\frac{9\pi}{4}$

5) $-\frac{\pi}{6}$

6) $\frac{1947\pi}{2}$

Ex 3-17 : Calculs

Calculer la valeur du produit $\cos x \times \sin y$ dans les cas suivants :

1) $x=0$ et $y=\pi$

2) $x=\frac{\pi}{3}$ et $y=\frac{\pi}{3}$

3) $x=0$ et $y=-\frac{\pi}{4}$

4) $x=\pi$ et $y=-\frac{\pi}{2}$

5) $x=527$ et $y=240\pi$

6) $x=\frac{17\pi}{2}$ et $y=17$

Ex 3-18 : ***Simplifications***

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A=\cos(\pi-x)+2\cos x-3\cos(x+\pi)$

2) $B=\sin(x+5\pi)+3\sin(x+7\pi)-\sin(-x)$

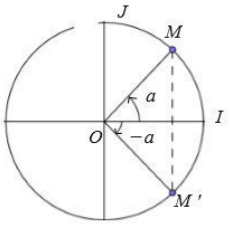
3) $C=\cos(-x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$

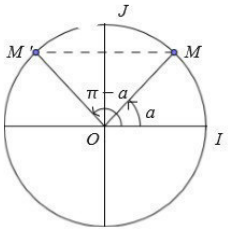
4) $D=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(5\pi+x)$

5) $E=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

6) $F=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

Ex 3-19 : Déterminer les réels correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus





Propriété :

$$\cos x=\cos a \Leftrightarrow x=a+2k\pi \text{ ou } x=-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M', symétriques par rapport à (OI) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus. On retrouve la formule des angles associés : $\cos(-x)=\cos(x)$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $[0\,;\pi]$

Propriété :

$$\sin x=\sin a \Leftrightarrow x=a+2k\pi \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M', symétriques par rapport à (OJ) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même sinus. On retrouve la formule des angles associés : $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $\sin x=0$

2) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $2\cos x=1$

6) $\cos x+\sin x=7$

7) $\cos x+3=2$

8) $4\sin x=-2$

Ex 3-20 : Déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près d'un réel x vérifiant :

1) $\cos x=\frac{1}{4}$

2) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

3) $3\sin x=1$

4) $\cos^2 x=1-\sqrt{2}$

5) $\sin(x-\pi)=\frac{\pi}{3}$

6) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex 3-21 : Sinus correspondant à un cosinus et inversement

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur un intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus correspondant :

1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in]0;\pi]$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in[\pi;2\pi]$

4) $\sin x=\frac{1}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Ex 3-22 : Système d'équations

Déterminer les solutions réelles des systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Ex 3-23 : Trigonométrie et géométrie

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M,N,P et Q les points dont les coordonnées sont données ci-dessous.
α et β sont deux réels . Pour chaque point, déterminer s'ils sont situés à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle , ou à l'extérieur du cercle.

$M(\sin\alpha;\cos\alpha)$

$N(-0,5\cos\alpha;0,5\sin\alpha)$

$P(\cos\alpha-\sin\alpha;\sin\alpha+\cos\alpha)$

$Q(\cos\alpha\times\cos\beta-\sin\alpha\times\sin\beta;\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta)$

Ex 3-24 : Équation produit

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1) En remarquant que $(\cos x-\sin x)^2\geqslant 0$, en déduire que :
$\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

2) De la même façon, en développant $(\cos x+\sin x)^2$, montrer que :
$-\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

3) En déduire que pour tout réel x , on a :
$-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

L'équation $\cos x\times\sin x=1$ a-t-elle une solution ?

Ex 3-25 : Inéquation

Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\cos(\alpha)<\frac{1}{2}$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

2) $\cos(\alpha) < \frac{1}{2}$ et $\alpha \in [0;2\pi[$

3) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in]-\pi;\pi]$

4) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in [0;2\pi[$

Les fonctions sinus et cosinus

Ex 3-26 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 3x^2$
1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

Ex 3-27 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$
1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

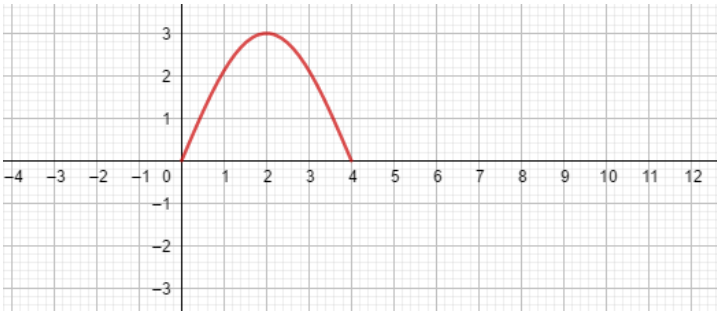
Ex 3-28 : Étudier la parité et la périodicité – compléter la courbe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
1) Vérifier que la fonction f est périodique de période 8.

2) Étudier la parité de f .

3) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4;12]$ à partir du tracé de f sur $[0;4]$.

En déduire le tracé de f sur $[-4;12]$.



Ex 3-29 : Étudier la parité et la périodicité – retrouver la courbe

1) Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, étudier la parité et la périodicité.

a) $f_1 : x \longmapsto \cos(2x)$

b) $f_2 : x \longmapsto 2\sin(x) - 1$

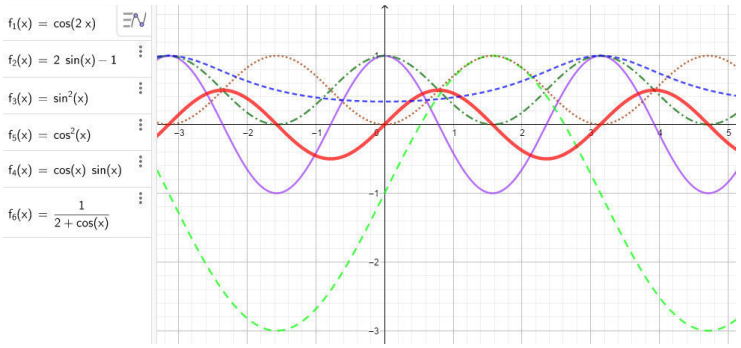
c) $f_3 : x \longmapsto \sin^2 x$

d) $f_4 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$

e) $f_5 : x \longmapsto \cos^2 x$

f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$

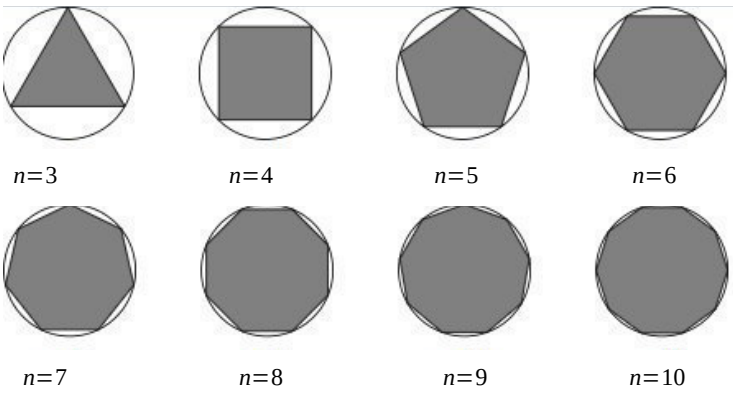
2) En utilisant les résultats précédents, associer chaque fonction à sa représentation graphique.



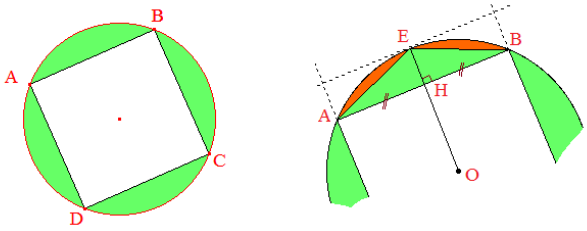
Algorithme-Python

Ex 3-30 : *Approximation de* π

La méthode d'Archimède permet d'approximer la valeur de π en utilisant des polygones réguliers inscrits dans le cercle.
L'idée est de considérer un cercle de rayon 1. Son périmètre est alors de 2π. Si on trace un polygone régulier inscrit dans ce cercle, avec un nombre de coté suffisamment grand, son périmètre devrait alors être proche de la valeur 2π.



L'idée d'Archimède est de partir d'un polygone régulier (par exemple le carré) et trouver un lien entre le périmètre de ce polygone et celui d'un polygone qui aurait deux fois plus de coté et aurait un sommet sur deux en commun avec le polygone précédent.



Ainsi, si on part d'un carré, on va construire une suite de polygones ayant 4 cotés puis 8 puis 16... c'est à dire des puissances de 2.
On notera, c_n la longueur d'un côté du polygone régulier à 2^n cotés inscrits dans le cercle de rayon 1.

1) On considère le carrée et l'octogone de la figure ci-dessus.
On note c_2 la longueur AB et c_3 la longueur AE.

a) Exprimer AH en fonction de c_2 .

b) En utilisant le triangle AHO, exprimer OH en fonction de c_2 .

c) En utilisant le triangle AHE, exprimer AE^2 en fonction de c_2 .

d) En déduire que $c_3 = \sqrt{\frac{c_2^2}{4}+\left(1-\sqrt{1-\frac{c_2^2}{4}}\right)^2}$

En généralisant ce que nous venons de faire, on obtient la formule :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n^2}{4}+\left(1-\sqrt{1-\frac{c_n^2}{4}}\right)^2}$$

Faire bien attention aux différents pièges :
Le premier terme est $c_2=\sqrt{2}$ et le nombre de côtés est 2^n

2) Compléter le programme écrit en Python ci-dessous qui donne une approximation de π à 0,0001 près et le nombre de côtés du polygone correspondant.

```
from math import *
n= ...
c=...

while (.....>0.0001):
    n=.....
    c=sqrt((c**2)/4+(1-sqrt(1-(c**2)/4))**2)
    print("approximation de pi : ",.....,"obtenue
                                    avec",2**n,"côtés")
```

3) On peut aussi montrer que la mesure d'un côté d'un polygone à n côtés est aussi donnée par la formule $c_n=2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

a) Montrer cette formule.

b) Compléter le programme écrit en Python ci-dessous qui donne une approximation de π à 0,0001 près et le nombre de côtés du polygone correspondant en utilisant cette nouvelle formule.

```
from math import *
n=2
c=.....
while (pi-c*2**(n-1)>0.001):
    n=.............
    c=.............
    print("approximation de pi : ",c*2**(n-1),"obtenue
                                    avec",.........,"côtés")
```

Chapitre 4 - DÉRIVATION

1) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto \frac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque x prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $]-0{,}9\,;0[\cup]0\,;0{,}9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 …

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11.6	10	8,4	8.04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant . En effet :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a: $f(x) =$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8-4x$ s'accumulent autour de 8.
Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]8-\varepsilon\,;8+\varepsilon[$, aussi petit que soit ε, $(\varepsilon > 0)$. Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0{,}001$, tous les nombres 8 – 4x sont dans I, lorsque

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note :

B) CAS GÉNÉRAL

Définition :

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L»**.
C'est à dire que pour tout ε, $(\varepsilon > 0)$, aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On note :

C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE … (admis)

Remarque importante:

On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée… et des composées de ces fonctions.

- $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors :

  $\lim_{x\to 0} P(x) = P(0)$ et $\lim_{x\to 0} Q(x) = Q(0)$

- Si, de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors :

  $\lim_{x\to 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim_{x\to 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$

- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = L'$, alors :

  $\lim_{x\to 0} (f+g)(x) = L + L'$ et $\lim_{x\to 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

Exemples :

$\lim_{x\to 0} (-3x^2 + 2x - 8) =$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{4x+2}{x^2+1}\right) =$; $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} =$ $\lim_{x\to 0} \left(-3x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}}\right) =$

2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition :

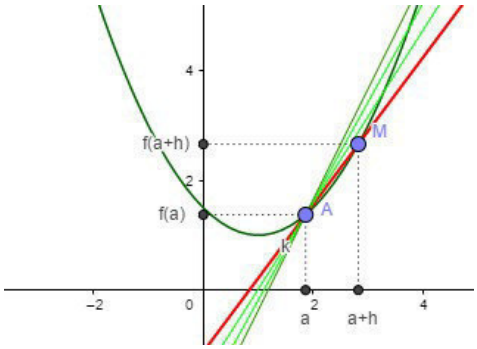
Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel quelconque.

3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT



Un peu d'intuition …
Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.
Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.

Propriété :

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Preuve:

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation
- Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a, mais C_f admet une tangente verticale d'équation

B) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe . On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_o est la limite des vitesses moyennes lorsque h tend vers 0. Il s'agit du nombre dérivée en t_o de la fonction d.

Autres domaines... :
Le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

4) FONCTIONS DÉRIVÉES

A) DÉFINITION

Définition :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f', qui, à tout x de I, associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Exemple :

Remarque :
On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.
Cet ensemble (noté $D_{f'}$) est toujours inclus dans D_f .

B) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
1)	$f : x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f' : x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
2)	$f : x \longmapsto x$	$f' : x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
3)	$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuves : On choisit toujours h, au voisinage de a et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 0$.

Ainsi, pour tout réel a, f est dérivable en a et $f'(a) = 0$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 1$.

Ainsi, pour tout réel a, f est dérivable en a et $f'(a) = 1$

3) Si $a > 0$.

Si $a = 0$.

5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

A) SOMME , PRODUIT …

Propriétés :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D (D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints)et k un réel, alors :

- Les fonctions $k \cdot u$, $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et:

  $(\boldsymbol{k \cdot u})' = \boldsymbol{k \cdot u'}$ (1) , $(\boldsymbol{u+v})' = \boldsymbol{u'+v'}$ (2) et $(\boldsymbol{u \cdot v})' = \boldsymbol{u' \cdot v + u \cdot v'}$ (3).

- Si pour tout réel a de D, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur D et:

  $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ (4) , $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ (5).

Preuves :

1) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \dfrac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = k \cdot u'(a)$. Ainsi $k \cdot u$ est dérivable en a et $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$. Ainsi $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$

$t(h) = \dfrac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} =$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} =$ et $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) =$ (admis, mais intuitif),

Alors $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $u \cdot v$ est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$, pour tout $a \in D$.

4) Soit $a \in D$.

Pour tout $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h} =$

Or $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} =$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{v(a) \times v(a+h)} =$ (admis, mais intuitif).

Donc $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} t(h) = -\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

5) Puisque $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Remarque :

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f : x \to x^n$ est vraie pour tout entier relatif n, en n'oubliant pas la condition $x \neq 0$ si $n < 0$.

C) DÉRIVÉE DE $f : x \longmapsto g(ax+b)$

Propriété :

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x, tel que $ax+b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Exemple : Déterminer sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (2x-5)^4$

D) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Remarque:

Si P est un polynôme de degré $n > 0$, alors P' est un polynôme de degré

Exemple :

Soit P le polynôme définit sur $\mathbb{R}$ par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$
P est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc P est dérivable et pour tout réel x:

$P'(x) =$

Exemple :

Soit f la fonction rationnelle définit par $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = x - 1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a:
$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc $f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2}$ avec $u'(x) = 2 \times 2x = 4x$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) =$

Nombre dérivé :

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a :

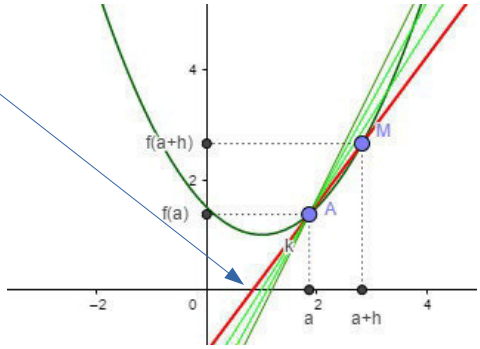
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (si la limite existe, on dit alors que f est **dérivable** en a)

Interprétation géométrique :

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe. (h tend vers 0)

Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.



Équation de la tangente : au point $A(a;f(a))$

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ (Si f est dérivable en a)

Cas particuliers:

- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a **une tangente horizontale** d'équation $y=f(a)$.

Fonction non dérivable :

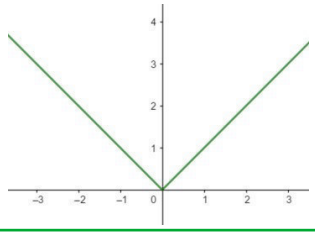
- Si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a

  C_f admet **une tangente verticale** d'équation $x=a$.

  Exemple classique de la fonction racine carrée en 0
  la droite d'équation $x=0$ est tangente verticale à la courbe à l'origine du repère.

- Si C_f admet une pointe au point d'abscisse a alors la fonction n'est pas dérivable en a .

  Exemple classique de la fonction valeur absolue en 0



Formules :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f:x\longmapsto k\ (k\in\mathbb{R})$	$f':x\longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto x$	$f':x\longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\sqrt{x}$	$f':x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f:x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f':x\longmapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\frac{1}{x}$	$f':x\longmapsto-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f:x\longmapsto\frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f':x\longmapsto-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel, alors :

- Les fonctions $k\cdot u$, $u+v$ et $u\cdot v$ sont dérivables sur D et:

$$(k\cdot u)'=k\cdot u' \quad , \quad (u+v)'=u'+v' \quad \text{et} \quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

- Si pour tout réel a de D, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

Composée avec une fonction affine :

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x, tel que $ax+b\in I$, la fonction f définie par $f(x)=g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x)=ag'(ax+b)$$

Nombre dérivé d'une fonction en « un point »

Ex 4-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en un réel a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers a .

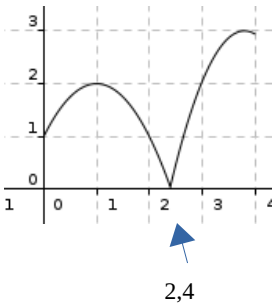
2) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

3) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

4) Si une fonction f est dérivable en a , le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est égal à la limite d'un taux de variations de f .

Ex 4-2 : QCM : restituer les notions du cours

Soit f la fonction définie sur [0;4] représentée ci-dessous :



1) Au point d'abscisse 1 :
a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(1)=0$

c) f est dérivable et $f'(1)=2$

2) Au point d'abscisse 2,4 :
a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(2,4)=-1$

c) f est dérivable et $f'(2,4)=1$

3) Au point d'abscisse 0 :
a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(0)\approx 2$

c) f est dérivable et $f'(0)\approx 1$

Ex 4-3 : La fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue f est définie pour tout réel x , par :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

1) Justifier que, pour tout réel a non nul, f est dérivable en a et préciser la valeur de $f'(a)$ en fonction des valeurs de a .

2) **Dérivabilité de f en $a=0$**

a) Donner, suivant les valeurs du réel h non nul, une écriture du taux de variation $t(h)$ de f en zéro sans valeur absolue.

b) On note :

- $\lim\limits_{h\to 0+} t(h)$ (appelée limite à droite de $t(h)$ en 0) la limite de $t(h)$ quand h tend vers 0 en étant supérieur à zéro

- $\lim\limits_{h\to 0-} t(h)$ (appelée limite à gauche de $t(h)$ en 0) la limite de $t(h)$ quand h tend vers 0 en étant inférieur à zéro

Déterminer $\lim\limits_{h\to 0+} t(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0-} t(h)$

c) Que peut-on en déduire au sujet de la dérivabilité de f en 0 ?

d) Représenter graphiquement la fonction f . Comment le résultat de la question c) s'observe sur la courbe représentative de f ?

Ex 4-4 : Calculer le nombre dérivé

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f : x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f : x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f : x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f : x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Ce que dit wikipédia à propos de la notion de tangente à une courbe :

Tangente vient du latin *tangere*, toucher : en géométrie, la **tangente** à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point.
La notion de tangente permet d'effectuer des approximations : pour la résolution de certains problèmes qui demandent de connaître le comportement de la courbe au voisinage d'un point, on peut assimiler celle-ci à sa tangente. Ceci explique la parenté entre la notion de tangente et le calcul différentiel (c'est à dire les dérivées).

Se contenter comme on le fait parfois de définir la tangente comme une droite qui « touche la courbe sans la traverser » serait incorrect, puisque

- rien n'empêche la courbe de retraverser une de ses tangentes un peu plus loin (le concept de tangente au point *M* ne décrit bien la situation que dans un petit voisinage du point *M*).
- il y a des situations exceptionnelles où la tangente en *M* traverse la courbe justement au point *M*. On dit alors qu'il y a une inflexion en *M*.

Ex 4-5 : Exprimer $f'(a)$ en fonction de a

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f. Déterminer alors, pour tout réel $a \in D_f$, si le nombre dérivé de f en a existe et, si c'est le cas, exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

a) $f(x)=3x-2$

b) $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$

c) $f(x)=3\sqrt{x}$

Ex 4-6 : Déterminer l'équation d'une tangente

Déterminer si la fonction f est dérivable en a et, si c'est le cas, déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a. Tracer alors sur la calculatrice la courbe et la tangente.

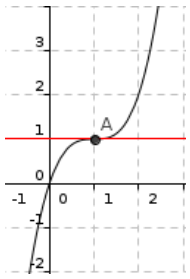
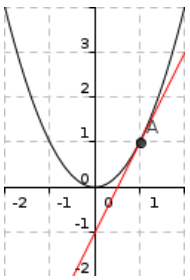
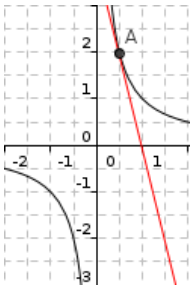
1) $f : x \longmapsto |x+1|$, $a=-3$

2) $f : x \longmapsto \sqrt{x-2}$, $a=2$

3) $f : x \longmapsto x^2+2x+2$, $a=1$

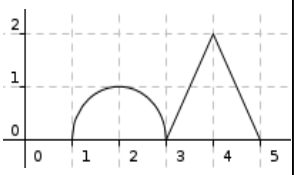
Ex 4-7 : Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f, et A un point de C_f d'abscisse a.
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 4-8 : Déterminer l'équation d'une tangente à l'aide d'un graphique

Soit f la fonction définie sur [1;5] dont la courbe représentative est donnée ci-contre :
Déterminer si f est dérivable en a.



Si tel est le cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1) $a=1$

2) $a=2$

3) $a=3$

4) $a=4$

5) $a=5$

Ex 4-9 : Algorithme - Python

1) On aimerait écrire un programme qui renvoie les valeurs du taux de variations d'une fonction $f:x \longmapsto ax^2+bx+c$ entre x_0 et x_0+h où h prend successivement les valeurs 10^{-p} où p est un entier qui varie de 0 à 10.

Compléter ce programme afin qu'il réponde au problème donné.

```
def f(a,b,c,x):
    return ...

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
x=float(input("x="))
for i in range(0,11):
    t=(f(a,b,c,.........)-f(a,b,c,.........))/.............
    print(t)
```

2) Tester ce programme avec les deux exemples ci-dessous :

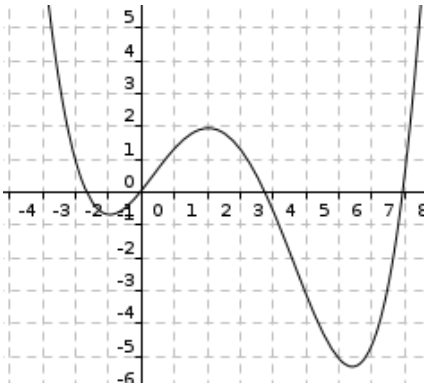
a) $f:x \longmapsto 2x^2-5x+4$, $x_0=3$

b) $f:x \longmapsto -x^2-2x+2$, $x_0=1$

Dans chaque cas, conjecturer grâce au programme la valeur de $f'(x_0)$, puis retrouver ce résultat par le calcul.

Ex 4-10 : Signe du nombre dérivé

La courbe représentative d'une fonction dérivable a été tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le signe (ou l'éventuelle nullité) des réels suivants :

a) $f'(-3)$ b) $f'(1)$ c) $f'\left(\frac{4}{5}\right)$

d) $f'(2)$ e) $f'(5)$ f) $f'\left(\frac{50}{7}\right)$

Ex 4-11 : Tracer une courbe possible

Dans chacun des cas suivants, tracer une courbe représentative possible d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ et vérifiant la (ou les) conditions(s) proposée(s).

1) f est dérivable en 2 et $f'(2)=1$

2) f n'est pas dérivable en -1.

3) f est dérivable en -2 et en 2 et on a $f'(-2)=f'(2)=0$.

4) f est dérivable en 0 et on a $f'(0)=1$. f n'est pas dérivable en -1 et en 2.

5) f est dérivable en -3 et en 3 , $f'(-3)=1$, $f(3)=0$ et f est croissante sur $[0;3]$.

Règles de dérivation

Ex 4-12 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Si f est définie sur un intervalle I, alors elle est dérivable sur I.

2) La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \longmapsto x^2$

3) Une fonction affine a pour dérivée une fonction constante.

4) La dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables u et v sur un intervalle I est la somme des dérivées u' et v' .

5) La dérivée d'un produit de deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I est le produit des dérivées u' et v' .

6) Pour que la fonction $\frac{1}{u}$ soit dérivable en a , il suffit que u ne s'annule pas en a .

Ex 4-13 : Calculs de dérivées

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble vos calculs sont valables.

a) $f : x \longmapsto (x-2)\times(x-4)$

b) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f : x \longmapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

d) $f : x \longmapsto (x^2-1)\sqrt{x}$

e) $f : x \longmapsto 3x^3-2x^2+2x+5$

f) $f : x \longmapsto (3x-2)^2$

g) $f : x \longmapsto (x-3)(x^4+1)$

h) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

i) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$

j) $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}\right)^5$

Ex 4-14 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit la fonction $u : x \longmapsto x^2 - x$

1) Déterminer sur quel ensemble la fonction u est dérivable, puis calculer sa dérivée.

2) En déduire sur quel ensemble les fonctions suivantes sont dérivables, puis calculer leur dérivée :

a) $5u$

b) u^2

c) $u(u-3)$

d) $\frac{1}{u}$

e) $\frac{1}{1+u}$

Ex 4-15 : Calculs de dérivées avec un logiciel de calcul formel

Dans chacun des cas, calculer la dérivée avec un logiciel de calcul formel (Xcas ou Maxima ou une calculatrice de type CAS …) , en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f : x \longmapsto (x^{15} - x)(x^{37} - x^2)$

b) $f : x \longmapsto 18x^{11} - \frac{1}{17x^{19}}$

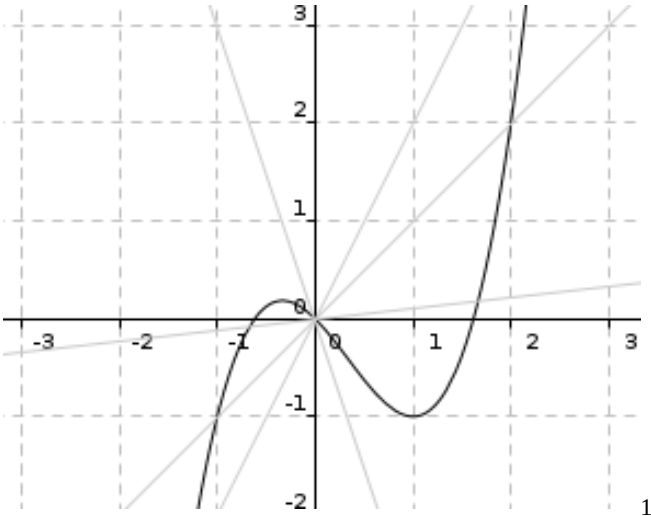
c) $f : x \longmapsto \sqrt{x}(x^4 - x^3 - 2x)$

d) $f : x \longmapsto \frac{2-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$

Approfondissement

Ex 4-16 : Tangente parallèle à une droite donnée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x$
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1)
Déterminer la fonction dérivée de f .

2) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer lorsqu'elles existent, toutes les tangentes à C_f parallèles à la droite proposée .
Lorsqu'elles existent, préciser l'équation de ces tangentes, puis tracer les sur le graphique ci-dessus.

a) $d_1 : y=0$

b) $d_2 : y=x$

c) $d_3 : y=-3x$

d) $d_4 : y=\frac{1}{9}x$

Ex 4-17 : Retrouver une fonction de dérivée connue - primitives

Dans chaque cas, on connaît la fonction dérivée f' d'une fonction, mais pas la fonction f . Retrouver une fonction f qui convient, et préciser sur quel ensemble la réponse proposée est valable . Est-ce possible de trouver plusieurs expressions de f lorsque f' est donnée ?

a) $f'(x)=5$

b) $f'(x)=3x+2$

c) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x)=10x^9$

e) $f'(x)=3x-\frac{1}{x^2}$

Ex 4-18 : Même dérivée

1) Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que les fonctions f et g ont la même fonction dérivée, puis exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

a) $f(x)=2+\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x+1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

b) $f(x)=x^4-4+\frac{x^4}{x-1}$ et $g(x)=\frac{x^5-5x+5}{x-1}$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$

2) Que peut-on conjecturer ?

Ex 4-19 : Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Lorsque la fonction f' est elle-même dérivable sur I, on dit que la fonction dérivée de f' est la dérivée seconde de f , et on note f'' .

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f:x \longmapsto x^4-3x^3+2$ sur $\mathbb{R}$

b) $g:x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ sur $[1;3]$

d) $i:x \longmapsto (-2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …
Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Ex 4-20 : Condition nécessaire et suffisante ?

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

1) Rappeler la propriété du cours permettant de parler de la dérivabilité de la fonction $f \times g$ sur un intervalle J contenu dans I.

2) Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x$ et $g(x)=\sqrt{x}$. Rappeler les ensembles de dérivabilité et les fonctions dérivées de f et g .
Démonter que la fonction $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

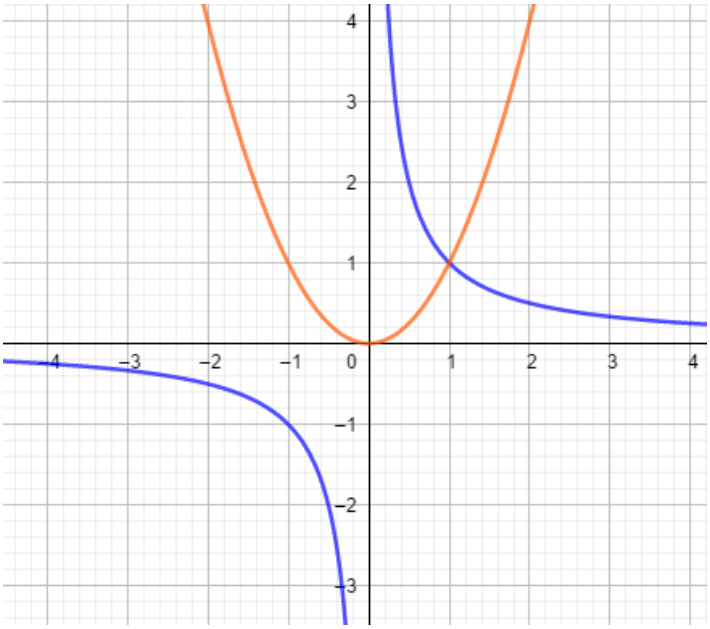
3) Comment pourrait-on exprimer les résultats des deux questions précédentes en termes de condition nécessaire et suffisante ?

Ex 4-21 : Tangente commune : parabole et hyperbole

On considère la fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ et la fonction inverse $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$.
On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives.
Le but du problème et de trouver d'éventuelles droites tangentes à la fois à C_f et à C_g

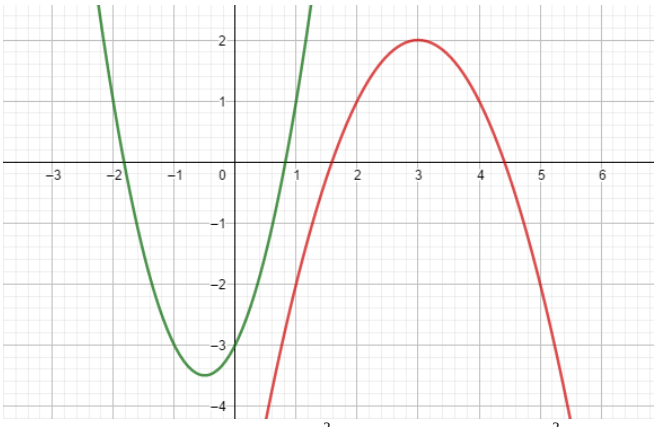
1) Conjecturer le résultat cherché avec GeoGebra.

2) Démontrer le résultat conjecturé.



Aide :
Considérer deux réel a et b , puis déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a et celle de C_g au point d'abscisse b . Chercher à quelles conditions ces tangentes sont confondues.

Ex 4-22 : Tangente commune : deux paraboles



Montrer que les paraboles $P_1 : y = 2x^2 + 2x - 3$ et $P_2 : y = -x^2 + 6x - 7$ admettent deux tangentes communes bien qu'elles n'admettent aucun point commun.

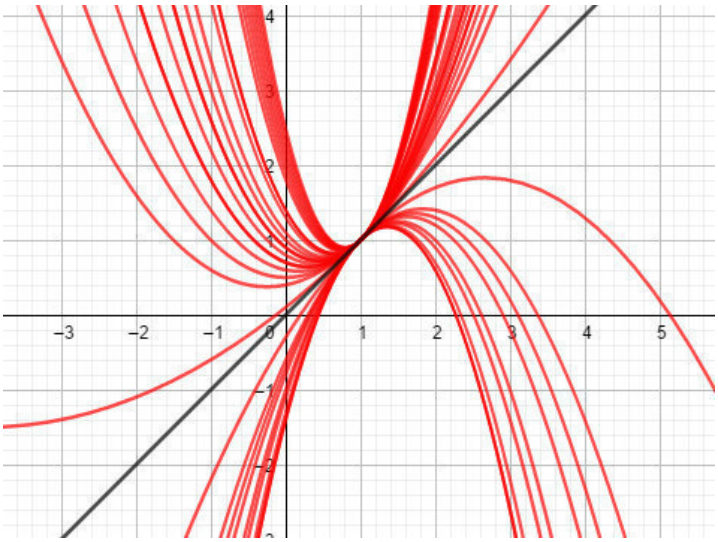
Déterminer l'équation réduite de chacune de ces tangentes.

Ex 4-23 : Ensemble de Paraboles - GéoGebra

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite $d: y=x$.
On aimerait déterminer l'ensemble des paraboles admettant d pour tangente au point d'abscisse 1, et montrer que l'ensemble des sommets de ces paraboles varie sur un ensemble que l'on déterminera.

1) Conjecturer le résultat cherché avec GeoGebra.

2) Démontrer le résultat conjecturé.



Chapitre 5 - PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

1) PRODUIT SCALAIRE

A) DÉFINITION

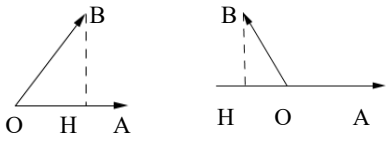
➔ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Ce n'est pas une multiplication !

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\ \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ où $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$ ***Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.***
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{cases} OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.



H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel***

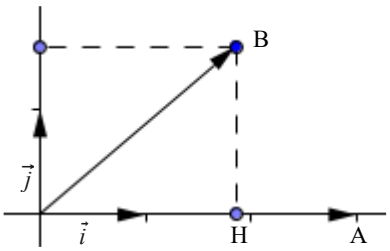
➔ Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

- Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)=xx'+yy'$ où $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque.

- Montrons que $OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}=xx'+yy'$ où $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans un repère orthonormal bien choisi …

  Choisissons un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens.
  On note $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

  Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire $OB \cos \widehat{AOB}$.
  Ainsi $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} =$

  Deux cas se présentent :

  - Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens et

  - Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire et

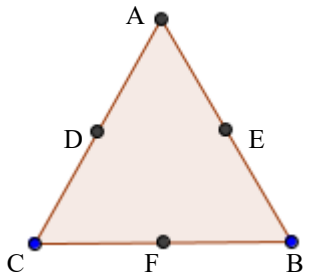
Exemple 1 :

Soit A $(2\,;3)$, B $(-1\,;4)$ et C $(-2\,;1)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3$.
(dans l'unité de longueur choisie).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:



-

-

B) REMARQUES

- Signe du produit scalaire :
On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{AOB}$.
En effet les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est du signe de $\cos \widehat{AOB}$.

	$0 \leqslant \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$	$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \widehat{AOB} \leqslant \pi$
Signe			

- Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

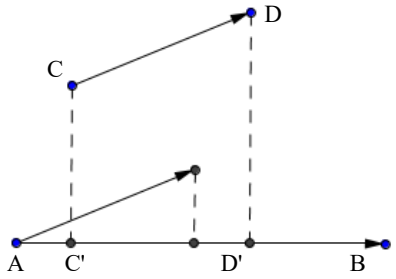
le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 . On a donc:

- Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

C) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
  En effet $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\begin{cases}OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens}\\ -OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires}\end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.
  Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB),
  alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIÉTÉS

A) OPÉRATIONS VECTORIELLES

Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Linéarité: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **et** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **et** $\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Conséquence :

$a\cdot\vec{u}\cdot b\cdot\vec{v}=ab\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- **Symétrie:** Immédiat, puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Linéarité:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

On démontre de même les autres égalités.

Exemples :

- Calculer $(3\,\vec{u}-2\,\vec{v})\cdot(2\,\vec{u}+\vec{v})=$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :
  - « $\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$ » :
  - « $\vec{u}\,.\vec{v}+\vec{w}$ » :
  - « $\vec{u}\cdot(k+\vec{v})$ » :

Remarques :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :
- En effet, on peut avoir en particulier $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
- D'autre part $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ n'implique pas $\vec{v}=\vec{w}$.

B) CARRÉ SCALAIRE ET NORME

Définition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

On a : $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Remarques :

- Un vecteur $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^2 = 1$.
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Preuve :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On note α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques:

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
  Si $\vec{w} \perp \vec{u}$, alors
  $$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{v} + 0 = \vec{u}\cdot\vec{v}$$
- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$
  On en déduit que: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

4) QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

A) LE THEORÈME D'AL KASHI

Théorème : ...

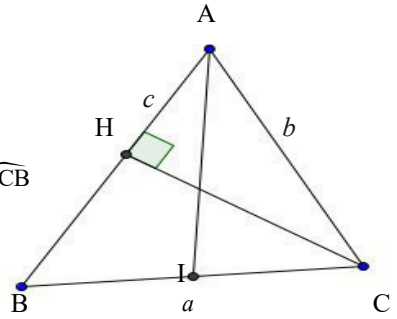
Soit ABC un triangle quelconque.

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\widehat{A}$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé

L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$



Preuve :

Remarques :

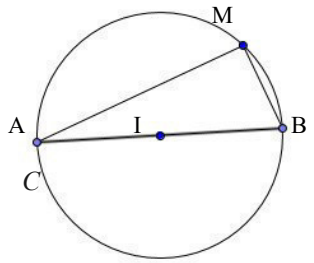
- De la même façon, on montre que :
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos\widehat{A} = 0$ et … $a^2 = b^2 + c^2$ *(On retrouve le théorème de Pythagore)*

B) ÉTUDIER UN ENSEMBLE DE POINT : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB].

- Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]



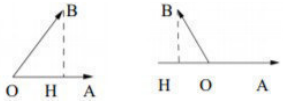
Preuve :

Définition :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-contre :

*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel.** Ce n'est surtout pas un vecteur.*

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
  où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$
  où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
  Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{cases}OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens}\\ -OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$



H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Avec des vecteurs colinéaires :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

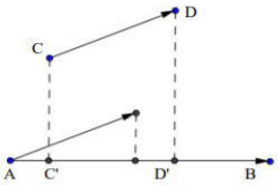
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire** , alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Avec des projections orthogonales :

Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB), alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.



Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Linéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **et** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **et** $\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Carré scalaire et norme :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

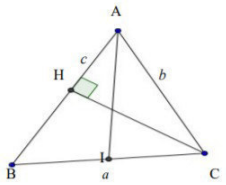
Applications :

Théorème d'Al Kashi :

Soit ABC un triangle quelconque.

On a : $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\widehat{A}$

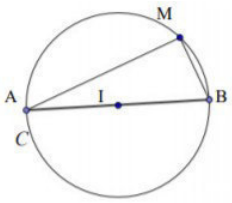
Ce théorème est aussi appelé **théorème de Pythagore généralisé.**



Cercle :

Soit A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB]



Méthode à connaître :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

En effet : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

Normes, projections orthogonales

Ex 5-1 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|$

2) $\|-5\vec{u}\|=-5\|\vec{u}\|$

3) Si $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=4$, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$

4) Si I est le milieu de [AB], alors $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AI}\|+\|\overrightarrow{IB}\|$

5) Si A, B et C sont trois points alignés, alors $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|$

6) Si les projections orthogonales de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont égaux.

7) Si $\overrightarrow{AB}$ a pour projeté orthogonale $\overrightarrow{A'B'}$ sur une droite d , alors ABB'A' est un parallélogramme.

8) Si ABCD est un parallélogramme, alors le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur une droite d est égal au projeté orthogonal de $\overrightarrow{DC}$ sur d .

9) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $\|\vec{u'}\|\leqslant\|\vec{u}\|$

10) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $3\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $3\vec{u}$ sur d .

Ex 5-2 : Normes

Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

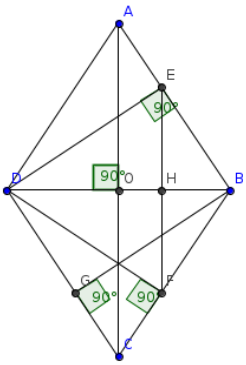
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-5\\\sqrt{3}+5\end{pmatrix}$

3) $A\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

Ex 5-3 : Projection orthogonale

ABCD est un losange de centre O.
ABD est un triangle équilatéral. Déterminer les projections orthogonales suivantes :



1) $\overrightarrow{AB}$ sur (BD) :

2) $\overrightarrow{AD}$ sur (DE) :

3) $\overrightarrow{AD}$ sur (DF) :

4) $\overrightarrow{DE}$ sur (DB) :

5) $\overrightarrow{DE}$ sur (BG) :

6) $\overrightarrow{EF}$ sur (AC) :

Les différentes expressions du produit scalaire

Ex 5-4 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) Si $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=12$ et $\cos(\alpha)=\frac{1}{3}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=20$
(où α représente l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}$

Pour les questions 3 , 4 et 5, on considère que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{GH}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$

5) $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

6) Si les points A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

Pour les dernières questions, on considère un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

7) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$: 8) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$: 9) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$:

10) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CA}>0$ 11) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$

12) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 13) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB^2$

Ex 5-5 : Choisir la méthode la plus adaptée

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1) $AB=4$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=45°$

2) $AB=2$, $AC=7$ et $\widehat{BAC}=\frac{5\pi}{6}$

3) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a A(2;3) , B(-4;5)

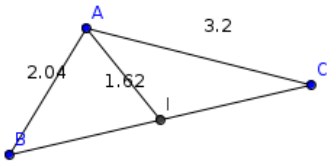
et C(-5;-7)

$\overrightarrow{FB}\,.\,\overrightarrow{FD}$

4) ABCD est un losange dont la longueur des côtés vaut 4 et tel que $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{6}$. On donnera une approximation à 10^{-2} près.

$\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AH}$

5) I est le milieu de [BC] .



$\overrightarrow{FB}\,.\,\overrightarrow{FA}$

3) ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC]. Calculer :

$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$

<u>Ex 5-6 :</u> ***Choisir la méthode la plus adaptée***

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

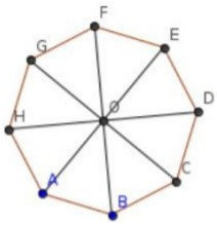
1) Soit ABCD un carré de côté 4 et E, le point du segment [AC] tel que AE=0,4AC. Calculer $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CI}$

2) On considère l'octogone ci-contre avec HD=8.

Calculer :

$\overrightarrow{OD}\,.\,\overrightarrow{OG}$



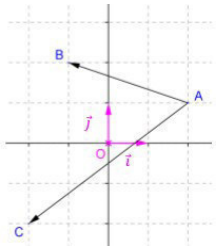
$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}).\,\overrightarrow{AI}$

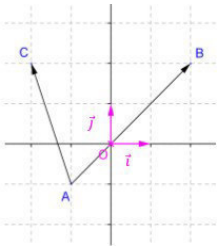
Calculer un angle ou une longueur avec le produit scalaire

Ex 5-7 : Déterminer un angle

1) Dans chacun des cas calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

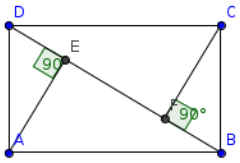
2) En déduire $\widehat{BAC}$





Ex 5-8 : Déterminer une longueur

On considère un rectangle ABCD tel que AB=5 et AD=3.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droites (BD).
En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



Ex 5-9 : Déterminer l'angle au sommet d'un triangle isocèle

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(-3;2) , B(-1;5) et C(1;2).
Montrer que le triangle ABC est isocèle et donner une mesure de son angle au sommet en degré à 10^{-1} près.

Propriétés – Opérations vectorielles

Ex 5-10 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) Si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{t}$, alors $\vec{v}=\vec{t}$

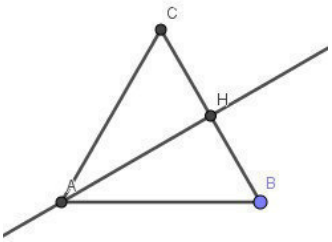
2) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

3) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$

4) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $4\vec{u}$ et $-5\vec{v}$ sont orthogonaux.

5) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

Pour les dernières questions, on considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.



6) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH^2$

7) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0,5\,AB^2$

8) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=0,75\,AB^2$

Ex 5-11 : Quelques calculs

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=8$
Calculer :

1) $\vec{u}.(3\vec{u}-2\vec{v})$

2) $(\vec{u}-5\vec{v}).(3\vec{u}-2\vec{v})$

3) $(\vec{u}-3\vec{v})^2$

4) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

5) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

6) $\|2\vec{u}-5\vec{v}\|$

Ex 5-12 : Avec les normes

1) Existe-t-il deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\vec{u}.\vec{v}<0$$

2) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$

3) Peut-on déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$$

Ex 5-13 : Relation de Chasles et linéarité

Soit 4 points A, B , C et D tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Orthogonalité et alignement

Ex 5-14 : Vecteurs orthogonaux ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}4876\\-4898873\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}317019173\\315539\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}18^{497}\\17^{512}\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}17^{513}\\18^{498}\end{pmatrix}$

3) $\vec{w}\begin{pmatrix}18^{497}\\306^{43}\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-17^{497}\\306^{454}\end{pmatrix}$

Ex 5-15 : Triangle rectangle

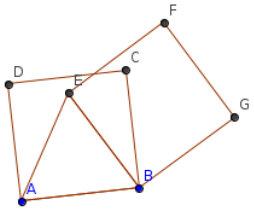
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne $M(2;\lambda)$, $A(1;3)$ et $L(4;3-\lambda)$.
Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

Ex 5-16 : Démontrer que des droites sont perpendiculaires

Soit ABCD un carré de côté a , I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Démontrer que les droites (CJ) et (DI) sont perpendiculaires.

Ex 5-17 : Démontrer que des points sont alignés

Soit ABE un triangle équilatéral de côté a ,
le carré ABCD contenant E et le carré EBGF contenant C.



1) Exprimer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ en fonction de a .

2) Montrer que BCG est un triangle équilatéral.

3) Exprimer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF}$ en fonction de a .

4) Exprimer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$ en fonction de a .

5) En déduire la valeur de $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$.

6) Démontrer que les point D, E et G sont alignés.

<u>Ex 5-18 :</u> Caractériser un quadrilatère

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a .

D et E sont les points tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de a .

2) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

4) On note H le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
Exprimer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de a , puis déterminer la distance AH.

5) En déduire la nature du quadrilatère EBHC.

<u>Ex 5-19 :</u> Dans un parallélogramme – Théorème d'Al Kashi

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que AB=6, AD=4 et $\widehat{BAD}=60°$.

1) Calculer $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$ et $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2$. En déduire AC et BD.

2) À l'aide du théorème d'Al Kashi, retrouver la distance BD.

Ex 5-20 : Théorème de la médiane

Soit un triangle ABC . On note I le milieu de [BC].

Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Ex 5-21 : Théorème de la médiane et théorème d'Al Kashi

On souhaite construire un parallélogramme ABCD dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle :

$AC=7$, $BD=\sqrt{19}$ et $BAD=60°$.
On pose $x=AB$ et $y=AD$.

1) A l'aide du théorème de la médiane, démontrer que $x^2+y^2=34$.

2) En utilisant l'angle $\widehat{BAD}$, démontrer que $x^2+y^2-xy=19$.

3) En déduire les dimensions du parallélogramme ABCD et le construire.

Ensembles de points

Ex 5-22 : Conjecture avec GeoGebra : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

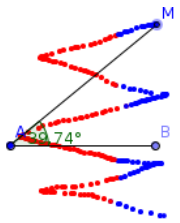
Soit A et B deux points tels que AB=4 cm . On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, $(k \in \mathbb{R})$.

1) Dans GeoGebra, placer deux points A et B tels que AB=4.

2) Créer un point libre M puis une expression « ps » permettant de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.
(Utiliser la formule avec les normes et les angles)

3) Créer un curseur « k » variant de -20 à 20, puis définir un affichage conditionnel de M en bleu lorsque ps>k et rouge lorsque ps<k.
(Clic droit sur le point>propriétés>avancé>couleurs dynamique)

4) Choisir k=12, puis activer la trace de M et balayer la zone de construction jusqu'à pouvoir conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ =12.
Démontrer cette conjecture.



5) **Régionnement du plan :**
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \geqslant 12$

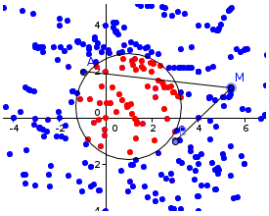
6) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$

Ex 5-23 : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).

1) Déterminer l'ensemble F_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$

Introduire le milieu I de [AB].



2) Déterminer l'ensemble F_2 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{25}{4}$$

3) Déterminer l'ensemble F_3 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{27}{4}$$

4) Déterminer l'ensemble F_4 des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant -1$$

Ex 5-24 : $\mathbf{MA^2+MB^2=k}$

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu du segment [AB] et k un nombre réel.

1) Pour tout point M du plan, montrer que :

$$MA^2+MB^2=k \quad \Leftrightarrow \quad MI^2=\frac{1}{2}\left(k-\frac{AB^2}{2}\right)$$

2) En raisonnant par disjonction de cas sur le signe de $k-\frac{AB^2}{2}$,

caractériser l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=k$

Chapitre 6 - APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

1) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve : (de la première propriété … les deux autres se démontrent de la même façon)

B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarques :
- Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 9$.
f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$
$f'(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	
signe de f'	
f	

On indique :
- le signe de f'
- les zéros de f'
- les valeurs de f pour les zéros de f'

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

Attention : Il est fondamental de se placer sur **un intervalle**.

Exemple :

La fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur $\mathbb{R}^*$.

Comme vous le savez … f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$;

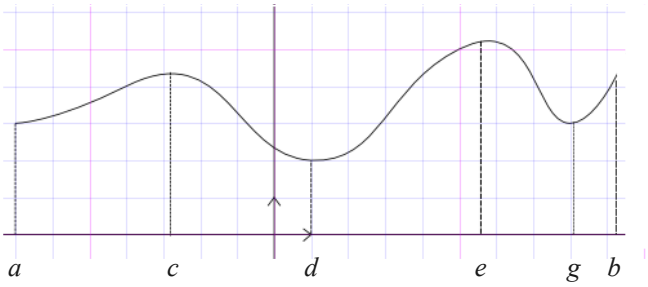
Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver . N'oubliez pas :
- **La définition**
- **les sommes de fonctions**

  Exemple : Soit $f : x \longmapsto x^2 + x - 2$

2) EXTREMUM D'UNE FONCTION

A) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d.
« Autour » de c et de g, on remarque que le comportement de f n'est pas banal …
On constate que *localement* f admet un maximum en c et un minimum en g.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.
On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en c si $f(c)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c.

Remarque sur les extrémités :
Sur un intervalle fermé $[a\,;b]$, on peut définir un extremum local en a ou en b.
Par exemple, dire que $f(a)$ est un maximum local signifie que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle $[a\,;\alpha[$, où $\alpha \leqslant b$.

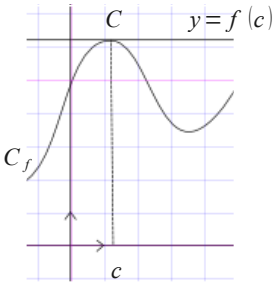
Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b.

B) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c)=0$



Conséquences graphiques:

On a $f'(c)=0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul; la tangente est horizontale.

Remarques :

- Il est important que I soit ouvert .
  Exemple :

- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.
  Exemple :

- La réciproque de ce théorème est fausse: Si $f'(c)=0$, on n'a pas forcément un extremum en c.
  Exemple :

Pour fixer les idées, on choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :
- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable ,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c)=0$ … mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir : *Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration…*

x	…	c	…
signe de f'	+	0	–
f	↗	$f(c)$	↘

x	…	c	…
signe de f'	–	0	+
f	↘	$f(c)$	↗

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.

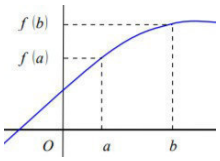
Rappel important :

Sens de variation d'une fonction :

*On oublie souvent de préciser **strictement**, mais il ne faut pas oublier qu'une fonction strictement croissante est croissante . Ce n'est donc pas faux.*

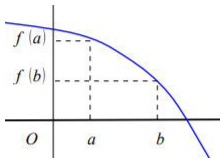
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

- **croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)\leqslant f(b)$.



- **strictement croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$. **Le sens de l'inégalité est conservé**

- **décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)\geqslant f(b)$.



- **strictement décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)>f(b)$. **Le sens de l'inégalité change**

Du sens de variation au signe de la dérivée :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)\leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)=0$

Du signe de la dérivée au sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)\leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)=0$, alors f est constante sur I.

Fonction STRICTEMENT croissante ou décroissante :

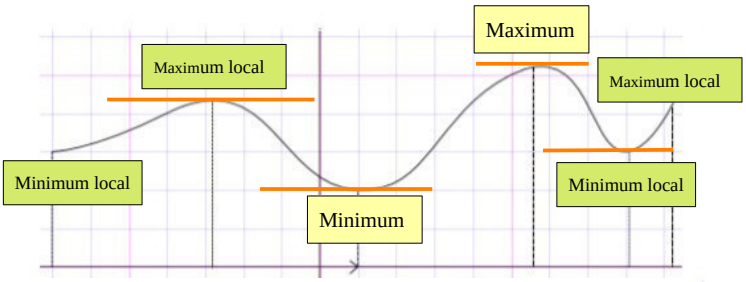
Si la dérivée f' est **strictement positive** sur I, **sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule**, alors f est **strictement croissante** sur I.

Si la dérivée f' est **strictement négative** sur I, **sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule**, alors f est **strictement décroissante** sur I.

Extremum :

- f admet **un minimum** sur I en x_m, si pour tout réel x de I, $f(x_m)\leqslant f(x)$

- f admet **un maximum** sur I en x_M, si pour tout réel x de I, $f(x_M)\geqslant f(x)$



Lien avec la dérivation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I (attention donc aux extrémités) et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c)=0$.

Et réciproquement :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.

Pour fixer les idées :

On choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :
- c est une borne de I,
- c est un réel où f n'est pas dérivable,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c)=0$

Ex 6-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Si une fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a.

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x)\leqslant f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a, alors f est dérivable en a.

Ex 6-2 : Déterminer les variations d'une fonction

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I, puis déterminer les éventuels extrema de f.

1) $f:x \longmapsto x^5-1$, $I=\mathbb{R}^+$

2) $f:x \longmapsto \sqrt{2x+1}$, $I=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f:x \longmapsto x+\frac{3}{x}$, $I=[1;4]$

4) $f:x \longmapsto \frac{x-1}{2-x}$, $I=\mathbb{R}-\{2\}$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $I=[0;1]$

6) $f : x \longmapsto (x^2+3)^2$, $I=\mathbb{R}$

7) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}-x$, $I=\left[\dfrac{1}{4};6\right]$

<u>Ex 6-3 :</u> Variations : deux méthodes

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I en utilisant la définition d'une fonction croissante/décroissante, puis vérifier le résultat grâce à la dérivée.

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=[1;3]$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2+2}$, $I = \mathbb{R}^+$

3) $f : x \longmapsto -x^4+1$, $I = [1;3]$

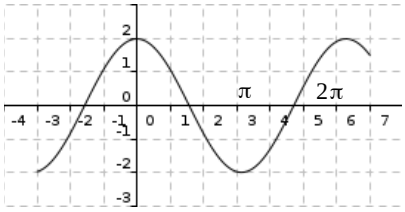
4) $f : x \longmapsto \sqrt{x}(x+3)$, $I = [3;5]$

5) $f : x \longmapsto -x^8 - x^2$, $I = [-5;5]$

6) $f : x \longmapsto |x-1|$, $I=[-1;3]$

Ex 6-4 : À partir d'une courbe

On considère une fonction f dérivable sur $I=[-3;7]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1) Déterminer les variations de f sur I, ainsi que le signe de sa dérivée.

2) Déterminer tous les extrema locaux de f .

Ex 6-5 : Montrer des inégalités

Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I.

1) $\frac{1}{1-x} \leqslant x-3$, $I=[2;+\infty[$

Aide : faire le tableau de variation sur I de $d : x \longmapsto \frac{1}{1-x}-(x-3)$

2) $x^2 \geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $I=]0;4]$

3) $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$, $I=]0;2]$

4) $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$, $I=\mathbb{R}_+^*$

Retrouver ce résultat en développant $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

<u>Ex 6-6 :</u> Trouver une fonction vérifiant des conditions

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction (ou d'une représentation graphique de fonction) vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est négative sur $\mathbb{R}$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Ex 6-7 : Encadrement

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2};3\right]$ par $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-3$.

1) Étudier les variations de f (faire un tableau de variation)

2) Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2};3\right]$

En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2};3\right]$

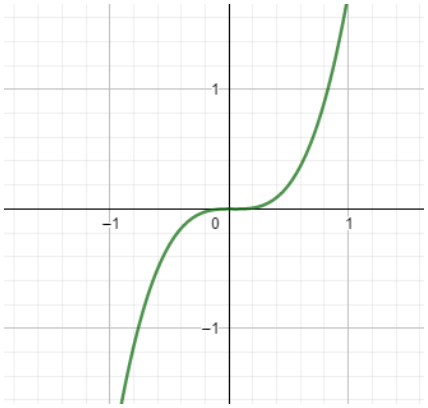
3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $\left[-\frac{5}{2};3\right]$

Ex 6-8 : Attention à la représentation graphique

Zineb a représenté à l'aide de GeoGebra la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-0,2x^2$.

Elle affirme que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

A-t-elle raison ?



Ex 6-9 : Trinôme du second degré

1) Démontrer en utilisant la dérivation le résultat déjà vu sur les variations d'un trinôme du second degré $f: \ x \longmapsto ax^2+bx+c \quad (\ a \neq 0 \ )$

2) Écrire un algorithme qui, à partir des valeurs connues a , b et c , indique la valeur de l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, ainsi que la valeur en laquelle il est atteint . Traduire cet algorithme en Python.

Ex 6-10 : Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-2x$

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .

2) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point A d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x-2$.

a) Montrer que $f(x)-g(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Étudier le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Ex 6-11 : Position relative de deux courbes

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $g(x)=-\frac{1}{x+2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .

1) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Développer $(x+1)^2(x+3)$

b) Étudier le signe de $h(x)$.

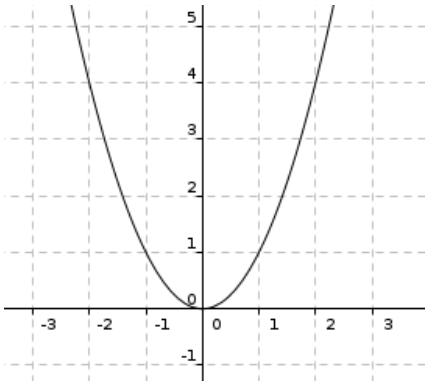
c) Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

4) Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection . Donner une équation de cette tangente.

Ex 6-12 : Étude de fonctions convexes

1) Soit $f : x \longmapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :

Tracer les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2, -1, 0, 1 et 2.
Quelle semble être la position de chacune de ces tangentes par rapport à C_f .



2) Soit a un réel . Déterminer l'équation $y=g_a(x)$ de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

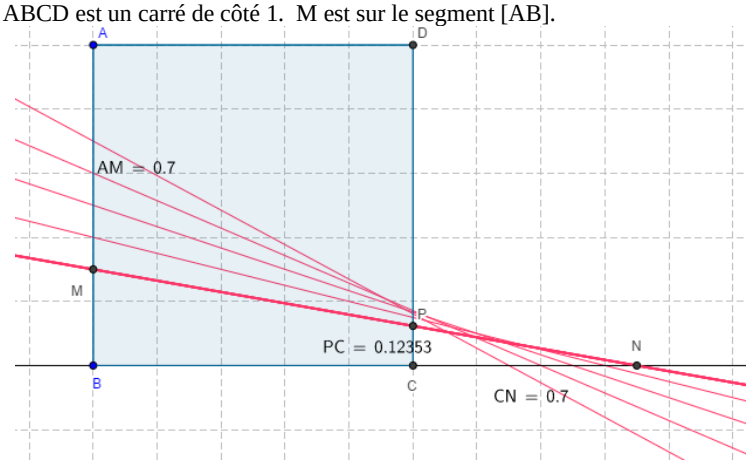
Démontrer alors que, pour tout réel x , on a $f(x) \geqslant g_a(x)$.
Une telle fonction est dite convexe.

3) La fonction inverse est-elle convexe sur $]-\infty;0[$?
Démontrer en revanche qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problèmes d'optimisation

Ex 6- 13 : Distance maximale

ABCD est un carré de côté 1. M est sur le segment [AB].



On place le point N tel que CN=AM sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].

La droite (MN) coupe (DC) en P . On pose $AM=x$ avec $0\leqslant x\leqslant 1$.

Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

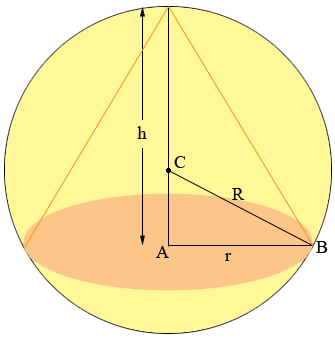
1) Démontrer que $PC=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;1] par $f(x)=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

Ex 6- 14 : Cône : volume maximal

Dans une sphère de centre C et de rayon R, on inscrit un cône de révolution de hauteur h .



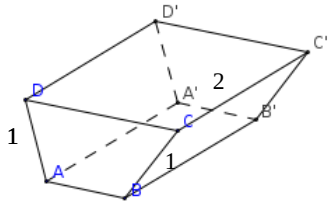
1) Démontrer que le rayon r de la base du cône est égal à $\sqrt{h(2R-h)}$

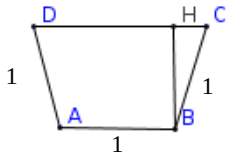
2) a) Calculer le volume du cône en fonction de h .

b) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

Ex 6- 15 : Prisme : volume maximal

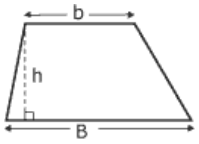
Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle ABCD.





La longueur du côté CD est variable.
Les autres dimensions sont fixes. On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD). On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle ABCD, puis le volume $V(x)$ de la benne.



$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$

2) Démontrer que $S'(x)$ peut s'écrire sous la forme $S'(x)=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (utiliser la formule $\sqrt{u}'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

3) Étudier le sens de variation de S puis de V.

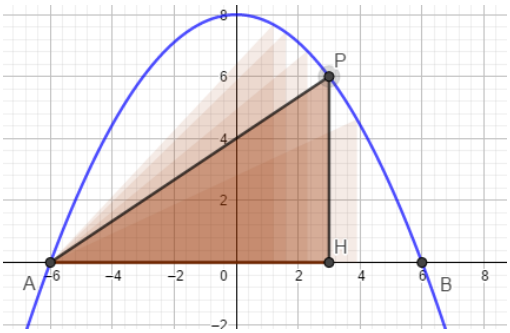
4) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

5) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CBH}$?

Ex 6- 16 : Parabole et aire maximale

La parabole d'équation $y=-\frac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $P(x;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f(x)=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$

3) Étudier les variations de f.

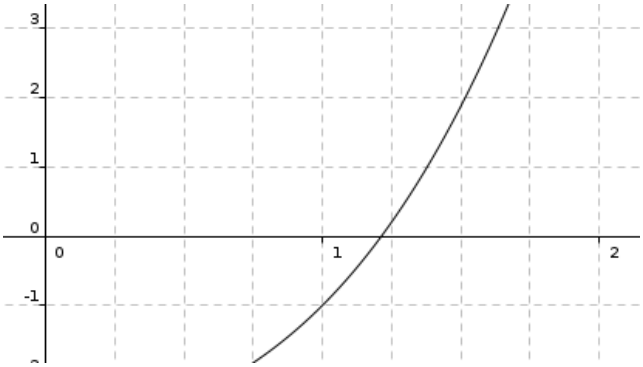
4) Répondre au problème posé.

Algorithme – Python

Ex 6-17 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\frac{3}{2}$.
T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A.
Déterminer l'abscisse x_1 de A.

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général . Soit f une fonction dont la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α . On note C_f sa courbe représentative . Soit x_0 un réel supérieur à α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$.
Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs x_1 , … , x_{10} .
(A faire pour un polynôme de degré 3 quelconque)

```
def f(a,b,c,d,x):
 return ..............

def der_f(a,b,c,x):
 return ..............

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
d=float(input("d="))
x=float(input("x="))
for i in range(1,......):
    x=.................................
    print(x)
```

d) On se propose maintenant de trouver un réel x tel que $|f(x)|<10^{-p}$ et en insérant un compteur .
Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
def f(a,b,c,d,x):
 return a*x**3+b*x**2+c*x+d

def der_f(a,b,c,x):
 return 3*a*x**2+2*b*x+c

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
d=float(input("d="))
x=float(input("x="))
p=int(input("p="))
nb_etape= ..............
while ............... ............... ...............:
    x=x-f(a,b,c,d,x)/der_f(a,b,c,x)
    nb_etape= ..............
print(x,"en",nb_etape,"étapes")
```

3) **Application :**
Étudier la fonction $g:x \longmapsto x^3-x^2+2x$, vérifier que sa fonction dérivée est strictement positive, puis que l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution α .

En utilisant le second programme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Chapitre 7 - SUITES NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

1) DÉFINITION et NOTATIONS

Définition :

On appelle **suite numérique**, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Une suite se note u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n) , qui est la notation la plus utilisée.

On note u_n **l'image** de l'entier naturel n . (plutôt que $u(n)$ …)
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n) , **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n**.
u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) .

- (u_n) désigne une suite.
- u_n désigne un nombre.

Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite $(1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2)$ »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$ »

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3\times n + 10$

- La suite des nombres impairs a pour terme général

Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u)_{n\geq n_0}$ et son **terme initial** est u_{n_0}

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$,
- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$,

Remarque : Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition … attention .

2) DIFFÉRENTES FAÇONS DE DÉFINIR UNE SUITE …

A) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite** , qui permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n .

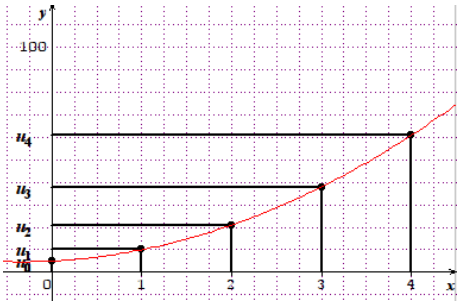
Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n$
- La suite (v_n) définie par $v_n = 3n^2 + 5$

Cas particulier important :

Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$. (au moins) .
On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n ,
$u_n = f(n)$.

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f , d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , …



Exemple :

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.
Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3n^2 + 2n + 5$.
Pour calculer le terme d'indice n , il suffit de chercher l'image de n par f .

On en déduit que :

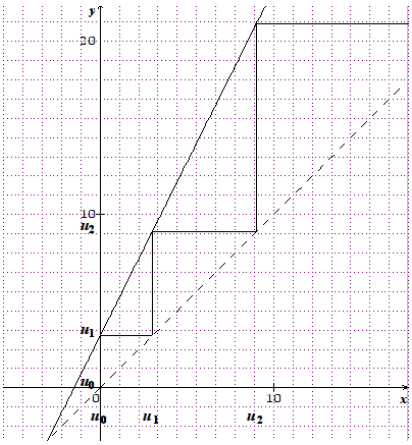
B) PAR RÉCURRENCE

On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite (u_n) .
En effet :

Si l'on considère la fonction f définie sur par $f(x) = 2x + 3$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus générale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. ($f(I) \subset I$)
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$) , et de **la relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.



En utilisant la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
On peut lire les termes u_0, u_1 , u_2 , … sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées .

Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite .

Remarques :

- La donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
- La remarque « … $f(x)$ est aussi dans I … » est importante.

Exemple :

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice n, il faut d'abord calculer les $n-1$ termes qui le précèdent …

- Éviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.
  Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x$, alors :
  « EXPLICITE » : ,

  « RECURRENCE avec $u_0 = 1$ » :

3) SUITES CROISSANTES , SUITES DÉCROISSANTES

Les suites sont des fonctions particulières … il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, …

Définition :

- Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$
  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots$
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.
  $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

*On définit de même ces notions **strictement** .*

Remarques :

- Si pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante** .
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes … (exemple : la suite (u_n) définie par)

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence $u_{n+1} - u_n$**
- **ou** , si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 2$.
  Pour tout entier naturel n , on a :

et pourtant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$

- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ ($n \geqslant 1$)

  Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

4) SUITES BORNÉES

Définition :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Exemples :

-
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

Remarque :
S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant M$, on dit que la suite est majorée par M à partir du rang p.
(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

5) LE COTÉ AGRÉABLE DES SUITES $u_n = f(n)$

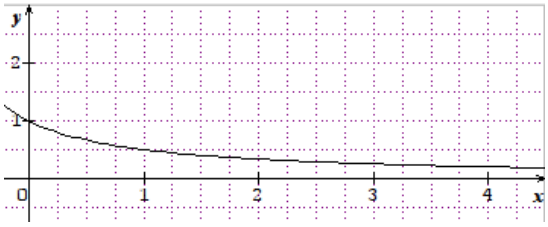
Si une suite est de la forme $u_n = f(n)$, on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction f , des résultats sur la suite.
On montre facilement que :

- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est minorée.

Les réciproques sont fausses

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.



6) LIMITE D'UNE SUITE

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si « ***u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand*** » , alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note :

De manière plus mathématique :

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note :

De manière plus mathématique :

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque :

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, « **les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L** ».

On note :

De manière plus mathématique :

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

Notations :

(u_n) désigne **une suite**.

u_n désigne un nombre appelé **terme général de la suite, terme de rang *n*** ou **terme d'indice *n* .**

u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) . (Parfois, le terme initial peut être u_1 ou u_2 …)

Définition par une formule explicite :

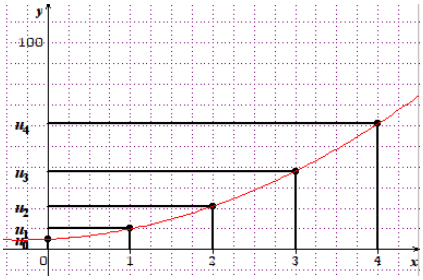
Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$. (au moins)
On définit une suite (u_n) de façon **explicite** en posant, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.
(On peut calculer directement à partir de n le terme d'indice n)

Représentation graphique :

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f , d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , …

- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est minorée.

Les réciproques sont fausses



Définition par récurrence :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$.
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$) , et de **la relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.

Inconvénient : pour déterminer par exemple u_7 *, il faut connaître* u_6 *et donc* u_5 …

Représentation graphique :

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$ et $u_0 = 1$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 10$

Étape 1 : On trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 10$

Étape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$

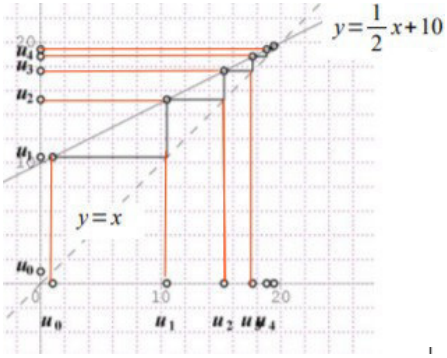
Étape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses

Étape 4 : On place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées

Étape 5 : On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$

et ainsi de suite … pour obtenir u_2 , u_3 , u_4 ….

Dans la pratique, on ne dessine pas tous les traits de construction et on se contente de mettre en évidence les variations et les limites.



Variations :

On définit de même ces notions **strictement**.

On dit aussi que la suite est croissante ou décroissante à partir du rang p.

Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence** $u_{n+1} - u_n$
- Si la suite est à termes strictement **positifs** (ou strictement négatifs), on compare le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- Si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f .

Suite bornée :

On dit que M est **un majorant** et que m est **un minorant** de la suite.

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Limites :

- Suite convergente : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$
- Suite divergente : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou aucun des trois cas (ex : $u_n = (-1)^n$)

Définition et notations

Ex 7-1 : Notations, termes, indices

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$, par : 0 ; 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 …

a) Déterminer u_0 , u_1 et u_2 .

b) Avec quel indice note-t-on le cinquième terme de la suite u ?

c) Déterminer le terme de rang 6.

d) Conjecturer le terme général de la suite u en fonction de n .

e) La suite u peut aussi se noter u_n : vrai ou faux ?

f) La suite u est-elle une fonction ? Si, oui, donner son ensemble de définition.

Ex 7-2 : QCM : restituer les notions du cours

On considère une suite u définie sur $\mathbb{N}$ de premier premier terme d'indice 0.

Dans chaque cas, indiquer la ou les bonnes réponses.

1) Quel est le 5ème terme de la suite ?

a) u_4 b) u_5 c) u_7 d) 4

2) Quel est le rang du 10ème terme ?

a) u_{10} b) u_9 c) 9 d) 10 e) 11

3) Quel est le terme de rang 7 ?

a) u_6 b) u_7 c) 6 d) 8

4) Les égalités suivantes sont-elles valides ?

a) $u_3=2,7$ b) $u_{-5}=4$ c) $u_{2,4}=8$ d) $u_5=-50$

Ex 7-3 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Indiquer si la situation peut-être traduite par une suite définie sur une partie de $\mathbb{N}$.

1) À chaque saut du perchiste, on associe la performance.

2) À chaque intensité du courant, on associe la tension relevée aux bornes du générateur.

3) À chaque instant de la journée, on associe la température extérieure.

4) À chaque heure de la journée, on associe le nombre d'automobiles passées sur l'avenue des Champs-Élysées.

5) À chaque mois, on associe la durée des communications téléphoniques.

Ex 7-4 : Combien de termes

Combien dénombre-t-on de termes :

a) de u_1 à u_{37} :

b) de u_0 à u_{18} :

c) de u_{17} à u_{85} :

Suite définie par une formule explicite

Ex 7-5 : Calculs des premiers termes

Dans chaque cas, déterminer les valeurs des quatre premiers termes de la suite (u_n) :

a) $u_n=n^2-4$

b) $u_n=\dfrac{1}{n+1}$

c) $u_n=(-1)^n$

d) $u_n=n^2-5n+4$

Ex 7-6 : Trouver une formule explicite

Déterminer une formule explicite de la suite telle que :

1) Chaque terme est égal à la moitié de son rang.

2) Chaque terme est égal au cube de son rang.

3) $u_n = f(n)$ où $f(x) = \sqrt{2x+7}$

4) $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{8}$, $u_3 = \frac{1}{16}$ ...

5) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$ ...

6) $u_0 = 5$, $u_1 = -\frac{1}{5}$, $u_2 = 5$, $u_3 = -\frac{1}{5}$ ...

Ex 7-7 : Un peu de logique

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel, par $u_n = n^3 - 6n^2 + 5n + 4$

1) Déterminer u_0 et u_1 .

2) La proposition P : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4$ » est-elle vraie ?

3) Écrire la négation de la proposition P.

4) Combien de termes u_n sont-ils égaux à 4 ? Justifier.

Ex 7-8 : Ensemble de définition

Indiquer, **en justifiant**, si la proposition est **vraie** ou **fausse**.
« La suite de terme général u_n est définie pour tout entier naturel n »

1) $u_n = \frac{5}{3^n - 1}$

2) $u_n = \frac{3}{3n-2}$

3) $u_n = \sqrt{-n^2 + 9n - 8}$

4) $u_n = \sqrt{3 - 3(-1)^n}$

Suite définie par une formule de récurrence

Ex 7-9 : Déterminer u_n en fonction de u_{n-1}

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,
$u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 2$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .

3) Faire de même avec la suite (v_n) définie par $v_0=1$ et $v_{n+1}=\frac{2}{v_n+5}$.

Ex 7-10 : Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égale à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n=7^{n-3}$

6) $u_n=2n-5$

7) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

8) $u_n=\frac{1}{n+1}$

9) $u_0=8$, $u_1=10$, $u_2=13$, $u_3=17$, $u_4=22$ …

10) $u_0=1$, $u_1=5$, $u_2=21$, $u_3=85$ ...

Ex 7-11 : Calculs des premiers termes

Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite.

1) $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=3u_n-2n+2$

2) $u_1=4$ et, pour tout entier naturel $n\geqslant2$, $u_n=2u_{n-1}+n$

3) $u_0=1$, $u_1=-1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2}=2u_{n+1}-3u_n+2$

Ex 7-12 : Ensemble de définition

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-5$, et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

1) Déterminer la fonction f telle que, pour tout entier naturel, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Soit $I=[-5;3]$. Montrer que si $x\in I$, alors $f(x)\in I$.

3) Vérifier que $u_0\in I$ et démontrer que, si $u_n\in I$, alors $u_{n+1}\in I$.
En déduire que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

4) Indiquer si les suites ci-dessous sont bien définies sur $\mathbb{N}$.

a) $v_0 = 10$, et pour tout entier naturel n , $v_{n+1}=\dfrac{1}{v_n+5}$

b) $w_0=7,5$, et pour tout entier naturel n , $w_{n+1}=\sqrt{2w_n-6}$

Algorithme, calculatrice, tableur

Ex 7-13 : Avec des listes

python

Algorithme a		Traduction en python
Lire n	1	n=int(input("n="))
Pour i allant de 0 à n	2	u=[ ]
u[i] ← 2*i*i-3*i+1	3	for i in range(0,n+1):
Afficher u[i]	4	u.append(2*i**2-3*i+1)
FinPour	5	print (u[i])
	6	

Algorithme b		
Lire n	1	n=int(input("n="))
Lire u[0]	2	u0=float(input("u0="))
Pour i allant de 1 à n	3	u=[ ]
u[i] ← 2*u[i-1]*u[i-1]-3*u[i-1]+1	4	u.append(u0)
Afficher u[i]	5	for i in range(1,n+1):
FinPour	6	u.append(2*u[i-1]**2-3*u[i-1]+1)
	7	print (u[i])

Déterminer le rôle de ces deux algorithmes.

Ex 7-14 : Calculatrice

À l'aide de la calculatrice, déterminer les dix premiers termes de :

1) La suite u définie pour tout entier naturel n , par $u_n=\sqrt{n^2+\frac{1}{2}n}$.

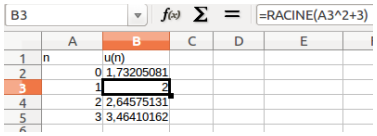
2) La suite v définie pour tout entier naturel n , par

$$\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=\sqrt{v_n^2+\frac{1}{2}v_n} \end{cases}$$

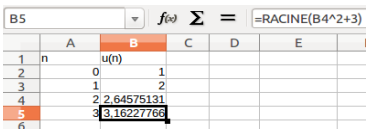
Ex 7-15 : Tableur

Dans chacun des cas ci-dessous, une suite a été définie sur un tableur : indiquer laquelle.

1)



2)



Comportement d'une suite

Ex 7-16 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier nature n , $0<u_n<5$.

1) (u_n) est minorée par 4.

2) (u_n) est minorée par 0.

3) (u_n) est minorée par 1.

4) 6 est un majorant de (u_n) .

5) (u_n) est bornée.

6) (u_n) est nécessairement croissante.

7) (u_n) peut admettre une limite infinie.

8) (u_n) admet nécessairement une limite finie.

9) (u_n) admet une infinité de majorants et de minorants.

Ex 7-17 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

2) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

3) Une suite croissante est toujours majorée.

4) Une suite peut être à la fois croissante et majorée.

5) Une suite décroissante est toujours majorée.

6) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

7) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

8) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n).

Ex 7-18 : Conjecturer avec un tableur ou une calculatrice

Dans chaque cas, utiliser un tableur ou une calculatrice pour conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles)

1) $u_n = 2\sqrt{n+4}$

Déterminer aussi le premier indice n tel que $u_n > 100$

2) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+4} \end{cases}$

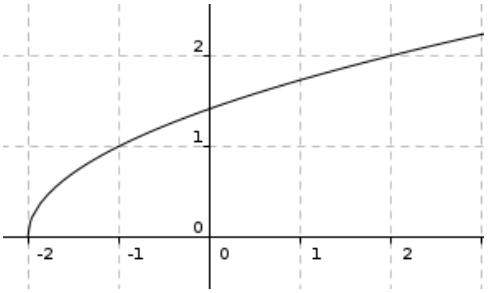
3) $v_n = \dfrac{10n}{n+1}$

4) $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \dfrac{10 v_n}{v_n+1} \end{cases}$

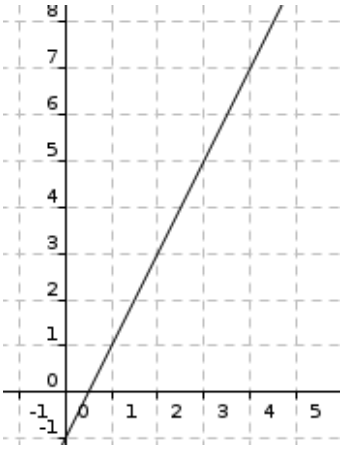
Ex 7-19 : Représenter graphiquement une suite définie par récurrence

Dans chaque cas, on considère la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).

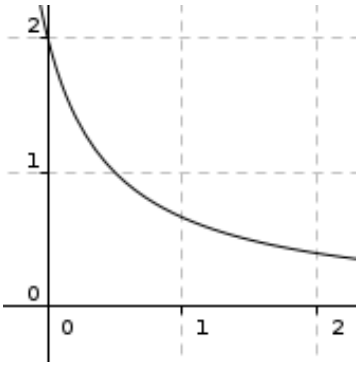
1) $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$



2) $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$



3) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 0,5}$



Ex 7-20 : Conjecturer

Dans chaque cas, utiliser la méthode votre choix pour conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles)

1) $u_n = \dfrac{n^2 - 2n - 5}{n+3}$

2) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{10}{u_n+2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{4u_n} \end{cases}$

<u>Ex 7-21 :</u> Étudier la monotonie

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n).

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$

2) $u_n=n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$

4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$

5) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

6) $u_n=\dfrac{n^2}{3^n}$

7) $u_n=n^3-12n^2+45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n=\dfrac{n^2-4}{n^2+1}$ (Aide : étudier une fonction)

9) (u_n) est la suite des aires d'un rectangle dont les côtés mesurent n et $3,5-n$.

10) (u_n) est la suite des coefficients directeurs des droites d_n d'équation $3x-ny+5n=0$

<u>Ex 7-22 :</u> Suites bornées

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^n-1$

2) $u_n=\frac{(-1)^n}{5}+4$

3) $u_n=\frac{n^2}{n^2+2}$

4) $u_n=3-4\sin(5n)$

5) $u_n=\frac{3^n}{4}-1$

6) $u_n=1-\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}$ (pour $n>1$)

7) $u_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)$ (pour $n>1$)

8) $u_n=\frac{3+\sin n}{2-\sin n}$

Ex 7-23 : Une peu de logique

Soit P la proposition : « la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n , est minorée par 5 »
Laquelle des propositions suivantes est la négation de P ?

Q_1 : « (u_n) est minorée par 4 »

Q_2 : « $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n<5$ »

Q_3 : « (u_n) est majorée par 5 »

Q_4 : « $\exists n\in\mathbb{N}$, tel que $u_n<5$ »

Ex 7-24 : Utilisation d'une autre suite

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1=8$ dont on donne les premiers termes : 8 , 10 , 13 , 17 , 22 , 28 … et dont la formule de récurrence est l'une des quatre suivantes :
$u_{n+1}=u_n+2n-1$, $u_{n+1}=u_n+3n-1$, $u_{n+1}=u_n^2-7u_n+8$,
$u_{n+1}=u_n+n+1$

1) a) Sélectionner la bonne formule de récurrence que l'on notera (R).

b) Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, par $v_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$, vérifie la relation (R) mais que la suite (v_n) n'est pas la suite (u_n) .

2) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $w_n=u_n-v_n$.
a) Démontrer que la suite (w_n) est constante.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

c) Démontrer que (u_n) est croissante.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant 1000$.

Ex 7-25 : Représentation graphique et limite

Donner un exemple de représentation possible d'une suite :

1) Croissante qui a pour limite 5.

2) Croissante qui a pour limite $+\infty$.

3) Décroissante qui a pour limite 5.

4) Décroissante qui a pour limite $-\infty$.

5) Non monotone qui a pour limite 5.

6) Non monotone qui n'a pas de limite.

Ex 7-26 : Algorithme – Python : variations d'une suite

Algorithme a

```
Fonction f(x)
  retourner -x^4+2*x³-x+5

Lire n
u[0]=f(0)
Pour i allant de 0 à n-1
  u[i+1] ← f(i+1)
  Si (u[i]>u[i+1]) alors
    afficher ("non")
  Sinon
    afficher ("oui")
  finSi
FinPour
```

Traduction en python

```
def f(x):
  return -x**4+2*x**3-x+5

n=int(input("n="))
u=[]
u.append(f(0))
for i in range(0,n):
    u.append(f(i+1))
    if (u[i]>u[i+1]):
        print("non")
    else:
        print("oui")
```

Algorithme b

```
Fonction f(x)
  retourner -x^4+2*x³-x+5

Lire n
Lire p
u[0]← p
Pour i allant de 0 à n-1
  u[i+1] ← f(u[i+1])
  Si (u[i]>u[i+1]) alors
    afficher ("non")
  Sinon
    afficher ("oui")
  finSi
FinPour
```

```
def f(x):
  return -x**4+2*x**3-x+5

n=int(input("n="))
u0=float(input("u0="))
u=[]
u.append(u0)
for i in range(0,n):
    u.append(f(u[i]))
    if (u[i]>u[i+1]):
        print("non")
    else:
        print("oui")
```

1) a) Quel est le rôle de chacun des algorithmes a et b ?
Préciser la signification des messages « oui » et « non ».

b) Que doit afficher l'algorithme pour que la suite soit croissante jusqu'au rang n ?

2) Tester l'un des deux algorithmes pour répondre aux questions suivantes :

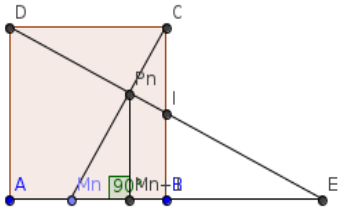
a) Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n=-n^4+2n^3-n+5$ jusqu'au rang :10 ? 20 ? 30 ?

b) Que peut-on dire de la suite définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ jusqu'au rang 8 ? 16 ? 32 ? (On admet que $u_n \in [0;1[$)

c) Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n=\frac{n^8}{2^n}$; jusqu'au rang 8? 12? 16 ?

Ex 7-27 : ***Une conjecture avec GeoGebra***

ABCD est un carré de côté 1 et I est le milieu de [BC].
On considère une suite de points M_n définie de la manière suivante :
$M_0=A$ et pour tout entier naturel n , M_{n+1} est le projeté orthogonal sur $[AB]$ du point d'intersection P_n des droites (CM_n) et (DI) .



1) À l'aide de Geogebra, faire une figure et visualiser la positions des points M_0 , M_1 et M_2 .

2) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=AM_n$.
a) En déplaçant le point M_n ; conjecturer géométriquement la limite de (u_n) .

b) Démontrer que $u_0=0$ et que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}$

c) À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, vérifier (sans démontrer) la conjecture effectuée en 2) a).

Ex 7-28 : Une conjecture avec un tableur

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\frac{-u_n-4}{u_n+3} \end{cases}$.

1) a) À l'aide d'un tableur, donner les 40 premiers termes de la suite.

b) Représenter graphiquement le nuage de points $(n;u_n)$.

c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

2) a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $v_n=\frac{3}{u_n+2}$. Que remarque-t-on ?

b) Conjecturer une expression explicite de u_n en fonction de n .

3) Vérifier qu'avec la formule conjecturée en 2) b) :
a) on a bien $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\frac{-u_n-4}{u_n+3} \end{cases}$

b) on peut justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé dans 1) c)

c) on voit plus facilement la limite de (u_n) conjecturée dans 1) c)

Ex 7-29 : Algortithme – Python : Valeurs approchées de $\sqrt{x}$

On va comparer deux méthodes d'obtention de valeurs approchées de $\sqrt{17}$, puis de manière plus générale de $\sqrt{x}$ où x est un entier naturel.

Question A) Méthode de dichotomie

On construit une suite croissante (a_n) et une suite décroissante (b_n) telles que, pour tout entier naturel n, $a_n<\sqrt{17}<b_n$, en partageant, après chaque étape n, l'intervalle contenant $\sqrt{17}$ en deux intervalles de même amplitude, et en choisissant celui qui contient $\sqrt{17}$.

Étape 0 : On sait que $4<\sqrt{17}<5$, donc on prend $a_0=4$ et $b_0=5$.

Étape 1 : On partage l'intervalle [4;5] en deux intervalles [4;4,5] et [4,5;5]. Comme $4,5^2>17$, on choisit l'intervalle $[4;4,5]$ qui contient $\sqrt{17}$. Ainsi on prend $a_1=4$ et $b_1=4,5$.

On réitère un certain nombre n de fois l'opération jusqu'à obtenir une précision p telle que $b_n-a_n\leq p$.

a) Déterminer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'au rang 3.

b) Compléter l'algorithme ci-dessous

Algorithme a

```
afficher ("Valeur approchée de racine de ")
Lire x
lire a[0]
lire b[0]
n ← ............
lire p
Tant que (b[n]-a[n] ............ ) faire
  m ← (a[n]+b[n])/2
  Si (m*m< ............ ) alors
    a[n+1] ← ............
    b[n+1] ← ............
  FinSi
  Sinon
    a[n+1] ← ............
    b[n+1] ← ............
  FinSinon
  n ←n+1
Fin Tant que
afficher ("a[",n,"]=",a[n])
afficher ("b[",n,"]=",b[n])
```

Traduction en python

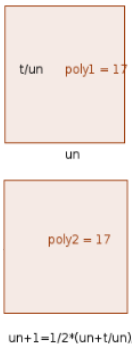
```
x=float(input("Valeur approchée de racine de="))
a0=float(input("a0="))
b0=float(input("b0="))
p=float(input("p="))
n=0
a=[]
b=[]
a.append(a0)
b.append(b0)
while (b[n]-a[n]>p):
    m=(a[n]+b[n])/2
    if (m**2<x):
        a.append(m)
        b.append(b[n])
    else:
        a.append(a[n])
        b.append(m)
    n=n+1

print("a[",n,"]=",a[n])
print("b[",n,"]=",b[n])
```

c) Utiliser le programme pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, et $\sqrt{23}$ avec une précision de 10^{-5} puis de 10^{-8} .

Question B) <u>Méthode de Héron</u>

On considère un rectangle d'aire 17 et dont les côtés mesurent u_0 et $\frac{17}{u_0}$.

On prend ici pour u_0 la partie entière de $\sqrt{17}$. Pour rendre ce rectangle « un peu plus carré », on construit le rectangle de même aire ayant pour longueur d'un côté u_1 , égale à la moyenne des deux mesures du rectangle précédent : $u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{17}{u_0}\right)$



En réitérant indéfiniment l'opération, on construit la suite (u_n) de longueurs de rectangles définie par $u_0=4$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{17}{u_n}\right)$ qui va tendre vers $\sqrt{17}$ c'est à dire vers la longueur du côté du carré d'aire 17.

1) Compléter l'algorithme ci-dessous qui donne une valeur approchée de $\sqrt{x}$ avec une précision p telle que $|u_n-\sqrt{x}|\leq p$.

Algorithme b

afficher ("Valeur approchée de racine de ")
Lire x
u[0] ← .....
n ← .....
lire p
Tant que (..... .....) faire
  u[n+1] ← .....
  n ← .....
afficher ("u[",n,"]=",u[n])

Traduction en python

from math import sqrt,floor
x=float(input("Valeur approchée de racine de="))
p=float(input("p="))
u0=float(input("u0="))
n=0
u=[]
u.append(floor(sqrt(x)))
while (abs(u[n]-sqrt(x))>p):
  u.append(0.5*(u[n]+x/u[n]))
  n=n+1
 	
print("u[",n,"]=",u[n])

c) Utiliser le programme pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, et $\sqrt{23}$ avec une précision de 10^{-5} puis de 10^{-8} .

d) Quelle critique peut-on faire au sujet de cet algorithme ? (Une histoire de poule et d'oeuf !)

Question C) Quelle est la méthode la plus performante ?

<u>Ex 7-30 :</u> Algorithme – Python : Factorielle n ($n!$)

On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^* , w_{n+1}=(n+1)w_n$$

On admet que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n>0$

Écrire en Python une fonction de paramètre n qui renvoie la valeur de w_n .

Chapitre 8 - SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif .

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n=4n+5$.

L'astuce :
calculer $u_{n+1}-u_n$

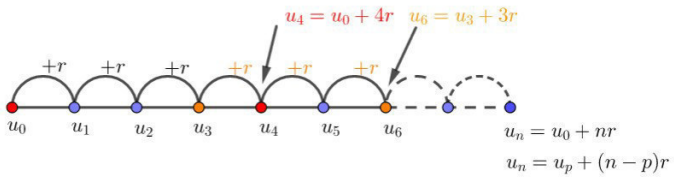
Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n=an+b$ (où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque ! ! !

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0+nr$



Preuve :
Additionnons membre à membre les n égalités ci-dessous:

$$\begin{cases} u_1=u_0+r \\ u_2=u_1+r \\ \dots \\ u_{n-1}=u_{n-2}+r \\ u_n=u_{n-1}+r \end{cases}$$

On obtient :

Et après simplification :

Exemple
Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0=7$ et $r=12$, alors $u_6=$

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels n et p , on a : $u_n=u_p+(n-p)r$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2=4$ et $u_4=10$.

- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10}=30$ et $r=2$.
  On a $u_{20}=$

C) MONOTONIE

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale, $u_1 + u_2 + ... + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts*) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + ... + u_{56}$?

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + ... + u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p \leqslant q$) est $\boldsymbol{q - p + 1}$

Étude d'un exemple fondamental : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.
Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + 2 + ... + n$.

On peut écrire :

En additionnant membre à membre, on obtient :

Cas général : En utilisant la même idée,

a et b sont les termes extrêmes de S, r est la raison de la suite

On en déduit la formule ci-dessous **qui n'est plus au programme, mais qui est encore très utilisée**.

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes** par **la demi-somme des termes extrêmes** .

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Remarques : Moyenne arithmétique

- Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$
- De manière plus générale, si u_p, u_{p+1} , … , u_{p+n} sont $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

q peut-être positif ou négatif *et non nul (sans intérêt)*

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n = 2^n$

- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n \times 5^n$.

- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$

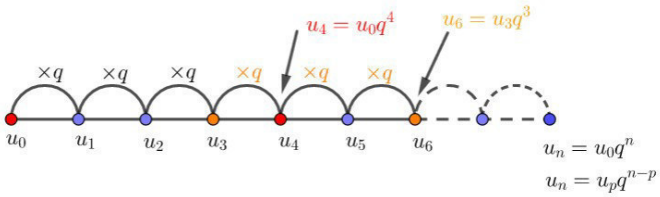
Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Et la réciproque !!!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0\, q^n$



Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0\, q$.
Puis $u_2 = u_1\, q = (u_0\, q)\, q = u_0\, q^2$
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel n , $u_n = u_0\, q^n$, on en déduira que $u_{n+1} = u_0\, q^{n+1}$.
En effet $u_{n+1} = u_n q = u_0\, q^n\, q = u_0\, q^{n+1}$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $q = 12$, alors $u_3 =$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .
Pour tout entier naturel n et p , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$.

  On a $u_{13} =$

- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

Remarque : Moyenne géométrique

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = ac$.
Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

C) MONOTONIE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
  Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
  Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative …

Idée de preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Étude d'un exemple fondamental : SUITE GÉOMÉTRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)
Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$.

On peut écrire :

Par soustraction membre à membre, on obtient :

Cas général : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$, $q \neq 1$) .
Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + ... + u_8$
On a $S = u_4 + qu_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 =$

Ainsi $S =$

On en déduit la formule ci-dessous **qui n'est plus au programme, mais qui est encore très utilisée**.

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$\mathbf{S = premier\ terme \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}}$$

3) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES (évident)

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES (q^n) (admis)

Propriété :

Soit q un réel .

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple :

Remarque :

On en déduit facilement le cas général $u_o q^n$ …

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.

On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$. On en déduit que

Suites arithmétiques :

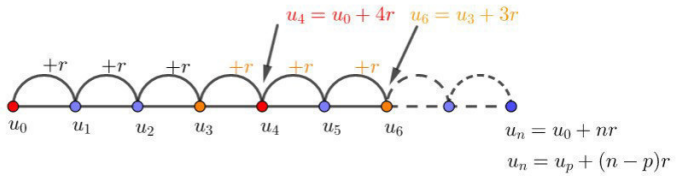
Définition par récurrence :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n). (r peut être positif ou négatif)
Dans la pratique on calcule $u_{n+1}-u_n$.

Définition par une formule explicite :

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0+nr$

Pour tous entiers naturels p et n , on a : $u_n=u_p+(n-p)r$



Monotonie :

- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.

Limites :

- Si $r>0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- Si $r<0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Sommes des termes consécutifs :

Le nombre de termes de la somme $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p\leqslant q$) est $\boldsymbol{q-p+1}$

S = nombre de termes × $\dfrac{\textit{premier terme}+\textit{dernier terme}}{2}$ **exemple important :** $\sum\limits_{i=1}^{n} i=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques :

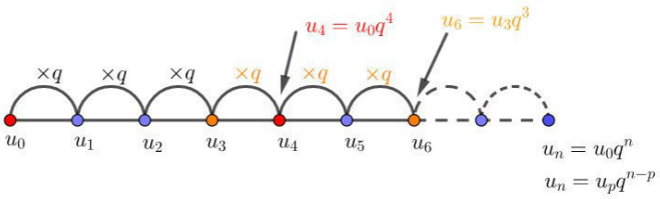
Définition par récurrence :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=qu_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n). (q peut-être positif ou négatif)

Définition par une formule explicite :

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0\,q^n$

Pour tous entiers naturels p et n , on a : $u_n=u_p\times q^{n-p}$



Monotonie :

Il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1}-u_n=u_0\times q^{n+1}-u_0\,q^n=u_0\times(q^{n+1}-q^n)=q^n\times u_0\times(q-1)$

en comparant u_0 à 0 et q à 1.

Par exemple, si $q>1$ et $u_0<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Limites :

- Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$
- Si $q=1$, alors pour tout n , $q^n=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$
- Si $q>1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si $q\leqslant-1$, alors la suite (q^n) est divergente

Sommes des termes consécutifs :

S = premier terme × $\dfrac{1-q^{\textit{nombre de termes}}}{1-q}$ **exemple important :** $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Suites arithmétiques - Définition

Ex 8-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme 3 et de raison 4.

1) $u_9-4=u_8$ 2) $u_{13}-u_{11}=8$ 3) $u_{n+1}=u_n+3$ 4) $u_{n+1}=n+4$

5) $u_n=3n+4$ 6) $u_n=4n+3$ 7) $u_n=u_1+4(n-1)$

Ex 8-2 : QCM : un peu de logique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Parmi les propositions suivantes la ou lesquelles caractérisent-elles la suite (u_n) ?

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}-u_n=r$

b) $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}-u_n=r$

c) $\exists r\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=r$

Ex 8-3 : Reconnaître une suite arithmétique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est arithmétique . Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1er terme.

1) $u_n=4n+8$

2) $u_n=2^n+4$

3) $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=u_n+2n \end{cases}$

4) (u_n) est la suite des nombres entiers naturels multiples de 5.

5) $u_n=f(n)$, où f est une fonction affine

6) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}-u_n=-2 \end{cases}$

7) $u_n=\sqrt{n^2+25}$

8) $u_n=\frac{1}{7}n-\frac{1}{9}$

9) $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2u_n+\frac{3}{7} \end{cases}$

10) $u_n=\frac{n+4}{4}$

Ex 8-4 : Déterminer un terme d'une suite arithmétique

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_7=-5$ et $u_{37}=41$. Déterminer u_0 et u_{10}

2) On considère la suite des nombres entiers naturels pairs ($v_0=0$, $v_1=2$, …) . déterminer v_{41} .

3) Soit (w_n) la suite définie par $w_1=5$ et , pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $w_{n+1}=w_n+3$. Déterminer w_{27} .

Ex 8-5 : Problème : abonnements

Le 01/01/2015, un journal comptait 15000 abonnés.
Une étude a montré que, chaque mois, 850 abonnement arrivent à échéance.
Sur ce 850 abonnements, 90 % sont renouvelés.
De plus 240 nouveaux abonnements sont souscrits.
On note (u_n) le nombre d'abonnements du journal au bout de n mois à partir du 01/01/2015 . On a $u_0=15000$.

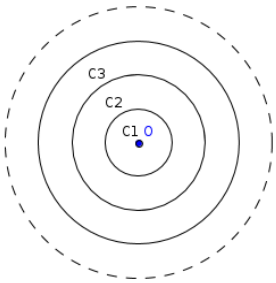
1) Calculer u_1 et u_2 , puis interpréter ces résultats pour le journal.

2) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

3) En estimant que l'évolution des abonnements reste celle montrée par l'étude, prévoir le nombre d'abonnés au journal le 01/01/2025.

Ex 8-6 : Problème : cible

1) Soit O un point du plan et pour chaque entier naturel n non nul, on note C_n le cercle de centre O dont le rayon mesure n cm.
Montrer que les rayons des cercles forment une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.



2) Pour chaque entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en cm^2 du disque de rayon n . La suite (A_n) est-elle arithmétique ?

3) On note S_1 l'aire du disque de rayon 1cm ($S_1=A_1$) et, pour chaque entier naturel $n\geqslant 2$, on note S_n l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_n et C_{n-1} .
a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Déterminer l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{12} et C_{11} .

Étudier le comportement d'une suite arithmétique

Ex 8-7 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

1) $u_n=-\frac{1}{3}n+4$

2) $u_n=5n-\frac{3}{7}$

3) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n-u_{n+1}=\frac{13}{14} \end{cases}$

Ex 8-8 : Utiliser une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1) Conjecturer le sens de variation de (u_n) .

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

On admet, ce que l'on pourra prouver en terminale par récurrence, que la suite prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que la suite est arithmétique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c) Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Ex 8-9 : Quelques calculs

1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite arithmétique de 1er terme 2 et de raison 3.

2) calculer $T=\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}+3+\ldots+\dfrac{19}{3}+7$

3) $R=1+\dfrac{3}{2}+2+\dfrac{5}{2}+\ldots+90$

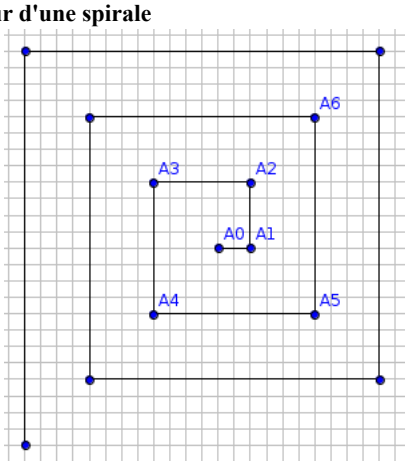
4) $S=10^5\times10^6\times10^7\times\ldots\times10^{15}$

Ex 8-10 : Problème : fréquentation dans un parking

On constate une fréquentation de 350 voitures le premier jour d'exploitation d'un parking . On prévoit une augmentation du passage dans ce parking, de 10 voitures supplémentaires chaque jour.
Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

Ex 8-11 : Problème : longueur d'une spirale

On considère la spirale ci-contre ;
Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = A_n A_{n+1}$



1) On a $u_0 = 2$. Déterminer u_1 et u_2 .

2) Déterminer la nature de la suite (u_n) .

3) Calculer la longueur de la spirale $A_0 \ A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_{12}$

Ex 8-12 : Problème : coût total

On dispose d'un crédit de 414000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1000 euros pour le premier mètre creusé, 1200 pour le deuxième, 1400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.
On pose $u_0 = 1000$, $u_1 = 1200$ …
u_n désigne donc le coût en euros du $(n+1)ième$ mètre creusé.

1) a) Calculer u_5

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déduire du b) la nature de la suite (u_n) .

d) Exprimer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres.
Déterminer le coût total d'un puits de n mètres.

3) Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414000 euros.

Suites géométriques – Définition

Ex 8-13 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme 8 et de raison 3.

1) $3u_8 = u_9$ 2) $\frac{u_{13}}{..} = 9$ 3) $u_{n+1} = 8u_n$ 4) $u_{n+1} = 3u_n$

5) $u_n = 3 \times 8^n$ 6) $u_n = 8 \times 3^n$ 7) $u_n = u_1 + 3^{n-1}$

Ex 8-14 : Géométrique et arithmétique

Existe-t-il une suite qui soit à la fois arithmétique et géométrique ?

Ex 8-15 : Reconnaître une suite géométrique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est géométrique . Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1er terme.

1) $u_n=2\times 5^{n+1}$

2) $\begin{cases} u_0=1 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{3} \end{cases}$

3) $u_n=\dfrac{3}{5^n}$

4) $u_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

5) $u_n=3\times n^7$

6) $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{3} \end{cases}$

7) $u_n=\dfrac{5}{2^n}$

8) $u_n=\dfrac{7^{n+1}}{3^n}$

9) $u_n=11\times 5^{2n+1}$

10) $u_n=n^3$

Ex 8-16 : Déterminer un terme d'une suite géométrique

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=65536$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{4}$. Déterminer u_1 , u_2 et u_6 .

2) Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_7=12$ et $u_8=18$.
déterminer u_0 et u_{15} .

Ex 8-17 : Trois termes consécutifs

1) Les trois nombres -5 , 85 et -1445 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ? Si oui, préciser la raison de la suite.

2) Même question avec :

a) 2,71 , 10,0812 et 37,50206

b) $-\frac{17}{3}$, $-\frac{84}{27}$ et $\frac{215}{147}$

Ex 8-18 : Problème : décote d'une voiture

Supposons que la décote d'une voiture est de 20 % par an.
Neuve, elle vaut 18000 euros. Combien vaudra-t-elle dans 5 ans ?

Ex 8-19 : Problème : population d'une ville

Depuis 30 ans, la population d'une ville diminue de 1 % par an.
Aujourd'hui, il y a 44382 habitants . Combien y en avait-il il y a trente ans ?

Ex 8-20 : Problème : deux possibilités (suites arithmétique et géométrique)

Dans une entreprise, une machine a été achetée 10000 euros.
Deux possibilités ont été envisagées pour prendre en compte l'usure et le vieillissement de la machine.

1) Première possibilité :
On estime que la machine perd 20 % de sa valeur par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

2) Deuxième possibilité :
On estime que la machine perd 2000 euros par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

Ex 8-21 : Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

1) Démontrer que la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à l'un de ces trois termes.

2) On appelle moyenne géométrique de deux nombres réels positifs a et b le nombre $m=\sqrt{ab}$.
Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme $u_0>0$ et de raison $q>0$.
Démontrer que chacun des termes (excepté u_0) est égal à la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Étudier le comportement d'une suite géométrique

Ex 8-22 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

1) $u_n=-\frac{1}{3}\times 4^n$

2) $u_n=-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) $u_n=\frac{5^{n-1}}{7}$

4) $u_n=\left(-\frac{5}{4}\right)^n$

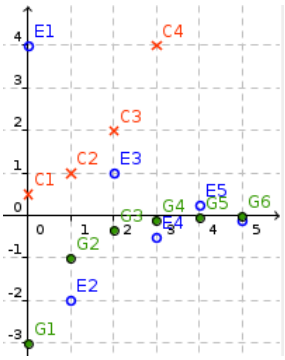
5) $u_n=\frac{13}{8^n}$

6) $\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{13}{12} \end{cases}$

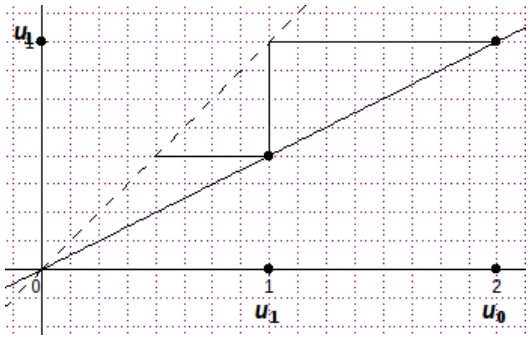
Ex 8-23 : Interpréter une représentation graphique

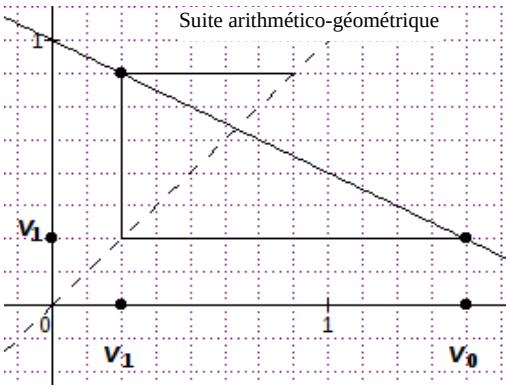
1) Trois suites géométriques ont été représentées ci-contre avec GeoGebra.

Déterminer pour chacune d'elle,
sa raison, son premier terme,
son sens de variation et sa limite.



2) Deux suites ont été représentées ci-dessous avec le logiciel SineQuaNon. La représentation a été interrompue au deuxième terme.
Pour chacune des suites, compléter la représentation, déterminer son sens de variation et sa limite puis la formule de récurrence.





Ex 8-24 : Utiliser une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+7}{4} \end{cases}$.

1) Représenter graphiquement la suite (u_n), puis conjecturer la limite de (u_n) .

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n=u_n-7$.

a) Montrer que la suite est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

d) Peut-on avoir $u_n=7$?

Ex 8-25 : Problème : population de bactéries

Dans un milieu de culture adéquat, le taux de croissance d'une population de bactéries Escherichia coli est de 700 % par heure.

On note p_0 la population initiale de bactérie et p_n la population après n heures de culture.
Expliquer pourquoi le taux de croissance ne peut se maintenir à ce niveau durant une longue période de temps.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

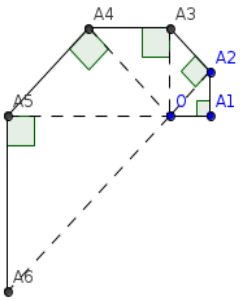
Ex 8-26 : Quelques calculs

1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite géométrique de 1er terme 2 et de raison 3.

2) Calculer $S=9+27+81+\ldots+59049$

3) Calculer $T=-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots-\left(\frac{1}{3}\right)^7+\left(\frac{1}{3}\right)^8$

<u>Ex 8-27 :</u> Problème : longueur d'une spirale



À partir de deux points O et A_1 du plan tel que $OA_1=1$, on construit le triangle OA_1A_2 rectangle et isocèle en A_1 .
Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on construit les points A_n tels que le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle et isocèle en A_n .
Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $u_n=A_nA_{n+1}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Conjecturer la nature de la suite (u_n) .

3) Calculer la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_{15}$

<u>Ex 8-28 :</u> Problème : production totale

En janvier 2009, une firme offrait sur le marché 2000 unités d'un nouveau produit, avec une perspective d'augmentation de cette production de 5 % par an.

On suppose que ces prévisions allaient se poursuivre.
On pose $p_0=2000$.
On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $(2009+n)$.
Pour 2010 , $n=1$; pour 2011 , $n=2$ …

1) Calculer p_1 , p_2 , p_3 .

2) Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la nature de la suite (p_n) .

3) Exprimer p_n en fonction de n .

4) Calculer la production totale prévisible entre janvier 2009 et janvier 2020.

Ex 8-29 : Utilisation d'une suite auxiliaire

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

2) À l'aide de la calculatrice :
a) Déterminer une valeur approchée de u_{15} à 10^{-6} près.

b) Que remarque-t-on lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u ?

3) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-6$.
a) Démontrer que v_n est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver alors u_{15} .

4) Calculer $S=\sum_{i=0}^{20} v_i$ et $T=\sum_{i=0}^{20} u_i$

Algorithme – Python

Ex 8-30 : Somme de termes consécutifs

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3,1 et de premier terme $u_0=2,7$. Pour calculer $S=u_0+u_1+\ldots+u_{21}$, on utilise l'algorithme incomplet ci-dessous :

```
U ← 2,7
S ← U
Pour i allant de 1 à ...
    U ← ......  +  3,1
    S ← ...
Fin Pour
```

a) Compléter cet algorithme.

b) Programmer cet algorithme en Python et donner le contenu de la variable S à la fin de l'exécution du programme.

2) Pour calculer la somme $T=10+13+16+\ldots+145$, on utilise l'algorithme incomplet ci-dessous :

```
T ← 0
U ← 10
Tant que U ⩽ ......
    T ← ......
    U ← ......
Fin Tant que
```

a) Compléter cet algorithme.

b) Programmer cet algorithme en Python et donner le contenu de la variable T à la fin de l'exécution du programme.

3) Écrire un programme en Python qui permet de calculer la somme
$R=6400+3200+1600+\ldots+25$

Ex 8-31 : Algorithme de seuil – proportion de filles

Un concours scientifique est organisé depuis 2015.
Les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants .
Entre 2015 et 2019, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion des filles participant à ce concours de 12 %.
On extrapole que la proportion de filles va continuer de progresser ainsi pendant 10 ans.
1) a) Quelle était la proportion de filles en 2016.

b) Pour tout entier naturel n , on note p_n la proportion de filles de l'année $2015+n$.
Pour $n<10$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

c) En déduire la nature de la suite (p_n) .

2) On considère la fonction Proporfilles écrite en python ci-dessous :

```
def Proporfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2015
```

Quelle est la valeur de Proporfilles(0,5) ? Interpréter ce résultat.

Ex 8-32 : Avec deux suites

Sur un axe orienté $(O;\vec{i})$, on considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante :
- Les points A_0 et B_0 ont pour abscisses respectives $a_0=1$ et $b_0=7$
- Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n vérifiant les relations de récurrence :

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3} \text{ et } b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}$$

1) Placer, sur l'axe, les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 et B_2 .

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=b_n-a_n$.

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

c) Que peut-on dire du signe de u_n ? Interpréter géométriquement.

3) a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante . Interpréter géométriquement.

b) Démontrer que la suite (b_n) est décroissante . Interpréter géométriquement.

4) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = a_n + b_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est constante.

b) Démontrer que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu que l'on déterminera.

c) Que peut-on conjecturer sur la limite de chacune des suites (a_n) et (b_n) ? Interpréter géométriquement.

5) Corriger cet algorithme et expliquer son rôle.

```
a ← 1
b ← 7
i ← 0
lire p
Tant que (b-a>p) faire
    a ← (2*a+b)/3
    b ← (a+2*b)/3
    i ← i+1
FinTant que
afficher i
```

Approfondissement

Ex 8-33 : Somme des n premiers carrés

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les sommes :

$S_n = 1+2+3+\ldots+n$, $D_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ et $T_n = 1^3+2^3+\ldots+n^3$

1) Montrer que $T_{n+1} - T_n = (n+1)^3$

2) Montrer que $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$

On note E_n cette égalité ?

3) En ajoutant membre à membre E_0 , E_1 , E_2 … et E_n , montrer qu'on a :

$$T_{n+1} = T_n + 3D_n + 3S_n + n + 1$$

4) En déduire que $D_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ex 8-34 : Les tours de Hanoï

Les tours de Hanoï sont un jeu constitué de trois piquets et d'un lot de disques de tailles différentes percés au centre.
Au départ, un lot de disque est placé sur un seul piquet .

Les disques sont posés les uns sur les autres du plus grand au plus petit.
Le jeu consiste à déplacer le lot de disques sur un des deux piquets, en déplaçant un seul disque à la fois et en le posant sur un disque de taille plus grande ou sur un piquet vide.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre minimal d'étapes pour déplacer n disques .
On appelle A, B et C les trois piquets.

1) Expliquer pourquoi on a $u_1=1$.

2) Pour $n\geqslant 2$, si on a réussi à déplacer les $n-1$ disques les plus petits (en u_{n-1} étapes) du piquet A au piquet B, on déplace le plus grand disque sur le piquet C et il ne reste plus qu'à déplacer les $n-1$ disques les plus petits vers le piquet C.
Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .

3) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (v_n) par $v_n=u_n+1$.

a) Vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme à déterminer.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

c) En déduire le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer un lot de huit disques.

Chapitre 9 - VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté $\{X=x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y , Z …

Exemple : ***Pour tout le chapitre***

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega =$

On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
- $X=0$ si le nombre est pair
- $X=1$ si le nombre est impair

L'ensemble image de Ω par X est $X(\Omega)=\Omega' =$

On a $\{X=0\}=$ et $\{X=1\}=$

Remarque : On note $\{X\geqslant a\}$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X. On définit de même $\{X\leqslant a\}$, $\{X>a\}$ et $\{X<a\}$.

2) LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition :

Soit $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega'=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i'=P(X=x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)=1$$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i		
$p_i'=P(X=x_i)$		

3) ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres ci-dessous :

Définition :

Soit $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité . On note p_i la probabilité de l'éventualité ω_i.

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre μ défini par : $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i\,\omega_i$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par : $V=\sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i\,\omega_i^2-\mu^2$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma=\sqrt{V}$

Preuve : *formule de la variance*

Définition :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X définie sur Ω'.

Les notations respectives sont $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

Exemple :

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) =$ $\mathrm{V}(\mathrm{X}) =$ et $\sigma(\mathrm{X}) =$

Remarques :

- On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

- Si la variable aléatoire X désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est équitable lorsque E(X)=0.

- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion . Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b \qquad \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Preuve :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

On a alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$

- $$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = \sum_{i=1}^{m} p_i'(a x_i + b) = \sum_{i=1}^{m} (a\, p_i' x_i + b\, p_i') = \sum_{i=1}^{m} a\, p_i' x_i + \sum_{i=1}^{m} b\, p_i' = a \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i + b \sum_{i=1}^{m} p_i'$$

  Or $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i' = 1$. On en déduit que $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$

- $$\begin{aligned}\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{m} p_i'(a x_i + b)^2 - \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i' \times (a^2 x_i^2 + 2ab x_i + b^2) - (a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (p_i' a^2 x_i^2 + p_i' 2ab x_i + p_i' b^2) - (a^2\,\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 + 2ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i + b^2 \sum_{i=1}^{m} p_i' - a^2 E(\mathrm{X})^2 - 2ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2\end{aligned}$$

Or $2ab \sum_{i=1}^{m} p_i' x_i = 2ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $b^2 \sum_{i=1}^{m} p_i' = b^2 \times 1 = b^2$ Ainsi $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2 \left(\sum_{i=1}^{m} p_i' x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 \right) + 2ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2 - 2ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2 = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

Remarque :

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs . On dit que X est **discrète**.

Définition :

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z

Soit $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- **L'événement** de Ω, noté $\{X=x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est parfois noté Ω'.

Notations importantes :

On note $\{X\geqslant a\}$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X.

On définit de même $\{X\leqslant a\}$, $\{X>a\}$ et $\{X<a\}$.

Loi de probabilité :

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)=1$$

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur $X(\Omega)$, qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $P(X=x_i)$

m représente le nombre de valeurs prises par X

Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire :

Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure **la dispersion**. Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance

- **Espérance mathématique** de X : $E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i P(X=x_i)$
- **Variance** de X : $V(X)=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)(x_i-E(X))^2=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)x_i^2-E(X)^2$
- **Écart type** : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Cette deuxième formule est plus simple à utiliser

Interprétation de l'espérance :

On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

Gain :

Si la variable aléatoire X désigne **le gain d'un jeu**, on dit que ce jeu est **équitable** lorsque **E(X)=0**.

Espérance et variance de

aX+b

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. On a :

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad V(aX+b)=a^2V(X)$$

Dans toutes les situations étudiées en première, la variable aléatoire X prend **un nombre fini de valeurs**.

On dit que X est **une variable aléatoire discrète**.

Restituer les notions du cours

Ex 9-1 : Vrai ou faux

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et on note X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.

1) Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

2) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs entières.

3) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1.

4) Les ensembles Ω et $X(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

5) Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes prises par une variable aléatoire X, alors les événements $\{X=x_1\}$ et $\{X=x_2\}$ sont incompatibles.

6) La loi de probabilité de X est une fonction définie sur Ω.

7) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-0,15	0,2	0,3	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,1	0,3

8) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	0,005	0,2	3,7	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,15	0,3

9) On peut définir sur Ω une infinité de variables aléatoires.

10) Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

11) Si on appelle x_i les n valeurs prises par X et y_j les m valeurs prises par Y, alors $\sum_{i=1}^{n} X=x_i = \sum_{j=1}^{m} Y=y_j$

12) $P(X>3)=P(X\geqslant 4)$

13) $P(X\leqslant 3)\leqslant P(X\leqslant 6)$

14) $P(X=-2)=1-P(X=2)$

15) $P(3\leqslant X\leqslant 4)=P(X=3)+P(X=4)$

Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Ex 9-2 : Définir plusieurs variables aléatoires à partir d'une expérience

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie.
Déterminer, à partir de cette expérience aléatoire, deux variables aléatoires ainsi que les ensembles des valeurs prises par ces variables aléatoires.

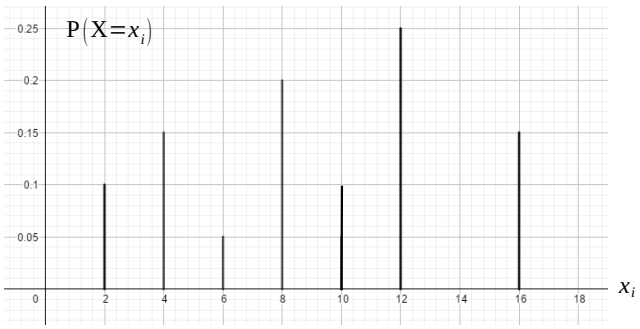
Ex 9-3 : Déterminer la loi d'un variable aléatoire

On choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :
- s'il est premier on gagne 3 euros.
- si c'est un multiple de 4, on gagne un euro.
- sinon, on perd deux euros.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Ex 9-4 : Variable aléatoire à partir d'un graphique

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par la représentation graphique ci-dessous.



2) Calculer $P(X \geqslant 8)$ et $P(\overline{X \geqslant 8})$

<u>Ex 9-5 :</u> Représenter graphiquement une variable aléatoire

Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge.
On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

3) Reprendre les questions dans le cas de tirages sans remise.

<u>Ex 9-6 :</u> Représenter graphiquement une variable aléatoire

On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4.
On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des deux dés.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

3) Calculer $P(X \geqslant 4)$ et $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$

Ex 9-7 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Un élève peu sérieux répond de façon aléatoire « vrai ou faux » à un questionnaire comportant trois questions.
Chaque réponse juste rapporte deux points et chaque réponse fausse fait perdre un point .
Le total des points de l'exercice est ramené à 0 s'il est négatif.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par l'élève peu sérieux.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Ex 9-8 : Simuler une variable aléatoire

Une variable aléatoire X admet la loi de probabilité suivante :

x_i	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X = x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1) Compléter la fonction Simu_X() écrite en Python ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
from random import random

def Simu_X():
    alea=……...
    if alea<……...:
        return(……...)
    if alea<……...:
        return(……...)
    if alea<0.76:
        return(3.4)
    if alea<0.85:
        return(5.7)
    return(……...)
```

2) Calculer $P(X < 0)$

3) a) Écrire un programme simulant 1000 fois cette expérience et calculant la fréquence de simulations donnant un résultat négatif.

b) Tester ce programme.

c) Que penser du résultat obtenu ?

Espérance, variance et écart type

Ex 9-9 : Estimer par simulation l'espérance et l'écart type

On reprend les données de l'exercice 8.

x_i	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X=x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python utilisant la fonction Simu_X() de l'exercice 8, afin qu'il donne une estimation de la moyenne et de l'écart type en simulant 1000 fois l'expérience.

```
from math import sqrt

moy=……..
for i in range(1000):
    moy=……..……..……..
moy=……..……..
print(moy)

s=0
for i in range(1000):
    s=……..……..
s=sqrt(s/1000)
print(s)
```

2) a) L'espérance de X notée μ vaut environ 2,26 (à 0,01 près) et son écart type noté σ vaut environ 3,55 (à 0,01 près).

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin de simuler 200 échantillons de 400 simulations de X.

```
from math import sqrt

def echant(n):
    m=……..……..
    for i in range(n):
        m=m+simu_X()
    return m/n

L=[]
for j in range(200):
    L.append(……..……..)
mu=2.26
si=3.55
c=……..……..

for valeur in L:
    if abs(valeur-mu)<……..……..:
        c=c+1
print(……..……..)
```

b) Estimer avec ce programme la proportion d'échantillons donc la moyenne m vérifie : $|m-\mu| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{400}}$

Ex 9-10 : Définir une variable aléatoire d'espérance donnée

1) a) Définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 2.

b) Peut-on définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 0 ?

2) Définir deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs -3 , 0 , 1 et 2 dont l'espérance est nulle . X et Y ont-elles même variance ?

Ex 9-11 : $E(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$

Soit X une variable aléatoire telle que E(X)=4 et $\sigma(X)=0,124$

1) Calculer E(-4X) et σ (-4X)

2) Calculer E(X+5) et σ (X+5)

3) Calculer E(-4X+5) et σ (-4X+5)

4) On augmente toutes les valeurs de X de 20 %, que peut-on dire de la nouvelle espérance de X et de son nouvel écart type ?

<u>Ex 9-12 :</u> Jeu favorable ou pas, jeu équitable -V(aX+b)

La roue d'une loterie comporte 10 secteurs identiques dont 4 rapportent 1 euro, 5 rapportent 3 euros et 1 rapporte 10 euros.
Le joueur doit miser 3 euros avant de lancer la roue.

1) Le jeu est-il favorable au joueur ?
(On note X la variable aléatoire utilisée)

2) Déterminer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.
(On note Y la variable aléatoire utilisée)

3) Exprimer Y en fonction de X.

4) Avec cette nouvelle mise, les gains du jeu sont-ils plus dispersés qu'avant ou non ?

<u>Exercice 13 :</u> Jeux équitables - V(aX+b)

On joue à « pile ou face » et on considère deux règles de jeu différentes.

- **Règle 1** : si on obtient face on gagne 1 euro sinon on perd 1 euro
- **Règle 2** : si on obtient face on gagne 1000 euros sinon on perd 1000 euros

1) Justifier que ces deux jeux sont équitables.
(On note X et Y les variables aléatoires utilisées)

2) Exprimer Y en fonction de X.

3) Auquel des deux jeux joueriez-vous ?
Quel calcul permet de mesurer le risque ?

<u>Exercice 14 :</u> Roulette

Au jeu de la roulette comportant 37 cases numérotées de 0 à 36, on peut jouer selon la règle du « plein » :

- on mise x euros sur un numéro compris entre 0 et 36.

- si le joueur a deviné le bon numéro, il gagne 35 fois sa mise.

1) On note G la variable aléatoire donnant le gain du casino .
Calculer l'espérance de G (avantage du casino) et interpréter le résultat.

2) Le casino envisage une seconde règle selon laquelle un joueur peut aussi choisir de miser sur quatre numéros.
Par combien le casino doit-il multiplier la mise du joueur en cas de gain de celui-ci pour que l' avantage du casino soit le même avec les deux règles ?

3) L'écart type des gains est-il encore le même ?

Variable aléatoire définie par répétition

Ex 9-15 : Tirages avec et sans remise

Une urne contient deux boules bleues et trois boules vertes . On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale à 5 si les deux boules sont de la même couleur et égale à -3 si les boules sont de couleurs différentes.

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la loi de probabilité de X .

3) Calculer l'espérance X.

4) Reprendre les questions précédentes en considérant des tirages sans remise . On note Y la nouvelle variable aléatoire.

Ex 9-16 : Des glaces et des beignets

Un marchand ambulant vend des glaces à 3 euros et des beignets à 2 euros.
Le marchand sert trois clients qui achètent chacun un produit.
On note G_i l'événement « le ième client achète une glace » et
B_i l'événement « le ième client achète un beignet » .
On a $P(G_i)=0,6$.

1) Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité de l'événement C « le marchand vend deux glaces et un beignet »

3) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de glaces vendues.
Déterminer la loi de probabilité de X.

4) Déterminer la probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues.

Ex 9-17 : Urne et variable aléatoire de gain

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : trois rouges, quatre bleues et trois vertes.
Un joueur tire une boule au hasard :
- si elle est rouge, il gagne 10 euros
- si elle est bleue, il perd 8 euros
- si elle est verte, il remet la boule et rejoue.
- si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 8 euros, sinon il perd 6 euros.

1) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer l'ensemble des issues possibles.

2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G égale au gain du joueur.

3) Calculer l'espérance de G et interpréter le résultat.

Algorithmes - Python

Ex 9-18 : Simuler une expérience aléatoire

1) Quelle expérience aléatoire est simulée par la fonction écrite en Python ci-dessous et comment est définie la variable aléatoire X ?

```
from random import randint

def nb_jets():
    x=0
    s=0
    while (s<10) :
        t=randint(1,6)
        s=s+t
        x=x+1
    return(x)
```

2) Compléter le programme ci-dessous utilisant la fonction nb_jets() pour qu'il simule n fois l'expérience précédente et permette de compléter le tableau suivant :

```
c=[]
f= ……
n=int(input("Nombre de simulations :"))
for i in range(0,11):
    c.append(0)
    f.append(0)

for i in range (……):
    x=……
    c[x]=……

for i in range(2,11):
    f[i]=……
    print("P(X=",i,")=",f[i])
E=0

for i in range(2,11):
    E=……
print ("L'espérance est environ",E)
```

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=i)$ n=100									
$P(X=i)$ n=1000									
$P(X=i)$ n=10000									

Les fréquences ont tendance à se stabiliser pour n suffisamment grand . Comment se nomme ce phénomène ?

Que calcule aussi ce programme ?

Ex 9-19 : Un paradoxe historique

À la cours de Florence au XVIe siècle, le Duc de Toscane fin observateur remarque que lorsque l'on lance trois dés et que l'on fait la somme des 3 résultats, la somme 10 apparaît plus fréquemment que la somme 9, alors que 9 et 10 se décomposent tous deux en six sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.

1) Vérifier les dires du Duc de Toscane sur la décomposition de 9 et 10.

2) A l'aide d'un algorithme ou d'un tableur, calculer les fréquences d'apparition des sommes 9 et 10 sur un grand nombre de lancers de trois dés.

3) Expliquer le paradoxe.

Chapitre 10 - FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :
$$f'=f \text{ et } f(0)=1$$
Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : l'existence est admise – l'unicité est faculative mais très intéressante

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f'=f$ et $f(0)=1$ est admise. On la note $\exp$.
Démontrons son unicité.
Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x, on a : $\boxed{\exp(x)\neq 0 \quad \text{et} \quad \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}}$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$
Montrons que $g(x)=1$:

$x \longmapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $[\exp(-x)]'=-1\times\exp'(-x)=-\exp(-x)$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$g'(x)=[\exp(x)]'\times[\exp(-x)]+[\exp(x)]\times[\exp(-x)]'=\exp(x)\times\exp(-x)+\exp(x)\times[-\exp(-x)]=0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
On a $g(0)=\exp(0)\times\exp(-0)=\exp(0)\times\exp(0)=1\times 1=1$.
Puisque g est constante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $g(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
c'est-à-dire que $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Ainsi $\exp(x)\neq 0$ et $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'=f$ et $f(0)=1$
$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x, on peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{f(x)}{\exp(x)}$
Montrons que $h(x)=1$:

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$h'(x)=\frac{f'(x)\times\exp(x)-f(x)\times(\exp(x))'}{(\exp(x))^2}=\frac{f(x)\times\exp(x)-f(x)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0$$

h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, on a $h(0)=\dfrac{f(0)}{\exp(0)}=\dfrac{1}{1}=1$
Donc pour tout réel x on a :
$$h(x)=1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=\exp(x)$$
On en déduit alors l'unicité de la fonction $\exp$.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y, on a :
$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve : faculative

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y)\neq 0$
Considérons la fonction g de la variable réelle x, définie par $g(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$
Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $[\exp(x+y)]'=(x+y)'\times\exp'(x+y)=1\times\exp(x+y)=\exp(x+y)$
D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :
$$g'(x)=\frac{(\exp(x+y))'}{\exp(y)}=\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=g(x)$$
De plus on a $g(0)=\dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)}=1$
g est donc une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g'=g$ et $g(0)=1$
g est donc la fonction exponentielle (puisqu'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)
On en déduit que pour tout réel x, $g(x)=\exp(x)$ c'est-à-dire $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=\exp(x)$
Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y, on a justifié que :
Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

Remarque :
La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(0)=f'(0)=1$
- pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

Remarque :
En appliquant la relation précédente avec $y=x$, on obtient : $\exp(2x)=[\exp(x)]^2$
En appliquant de nouveau la relation avec $y=2x$, on obtient : $\exp(3x)=\exp(2x)\times\exp(x)=[\exp(x)]^3$
On peut alors démontrer (*par récurrence en terminale*) que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$
On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$
Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=e^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x)=e^x$ où $e=\exp(1)$
La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Remarque :
Le nombre $e=\exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.
La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)
Par contre la notation e^{π} ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b, on a :
- $e^{a+b}=e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b\neq 0$ et $e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na}=(e^a)^n$ (admise)

Preuve du troisième point :

Propriété : lien avec les suites géométriques

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique

Preuve :

Remarque :
Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

Pour tout réel x, $e^x>0$. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

La fonction exponentielle croît très vite
(par exemple : $e^{50}\approx 5\times 10^{21}$)

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

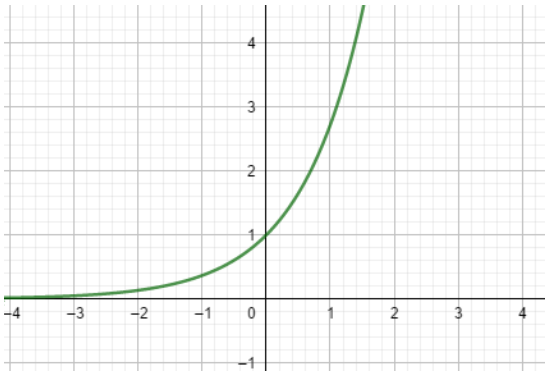
Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)

- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto e^{ax+b}$

Propriété :

Soit a et b deux réels.
La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = a\,e^{ax+b}$$

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

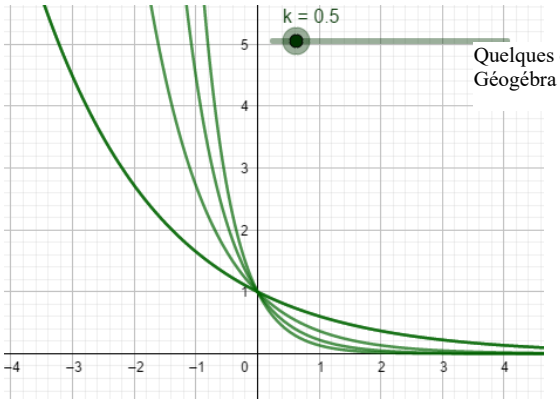
Étude d'exemples importants : Soit k un réel strictement positif .

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$			
f_k			

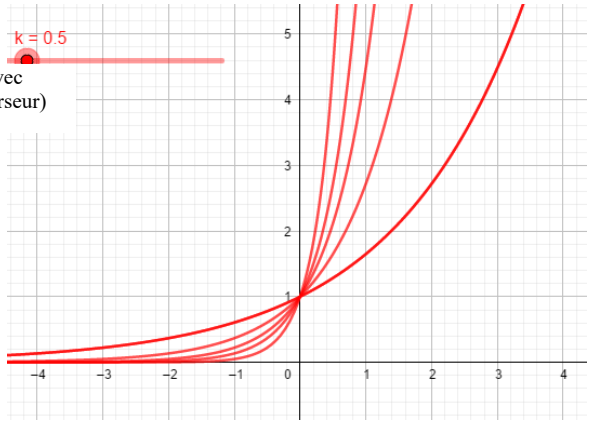
$g_k : x \longmapsto e^{kx}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_k(x)$			
g_k			



Décroissance exponentielle

Quelques exemples générés avec Géogébra (en modifiant le curseur)



Croissance exponentielle

Il existe d'autres propriétés qui seront étudiées en terminale.

Définition et notation :

Il existe **une unique** fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**

Attention : il y a deux conditions

Notation e^x :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2{,}718$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

Lien avec les suites géométriques :

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

Étude de la fonction exponentielle :

Pour tout réel x, $e^x > 0$. La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

*Dans le langage courant, on parle souvent De phénomènes à "**croissance exponentielle**", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide. C'est le cas en ce moment avec la covid-19.*

Conséquences :

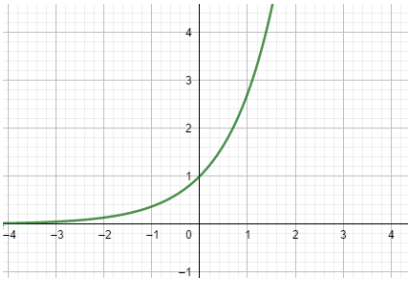
Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)

- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



Fonction du type :

$x \longmapsto e^{ax+b}$

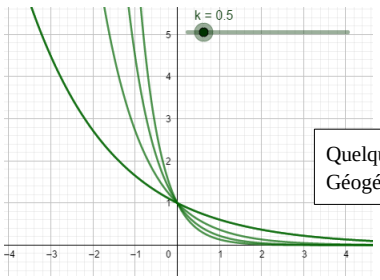
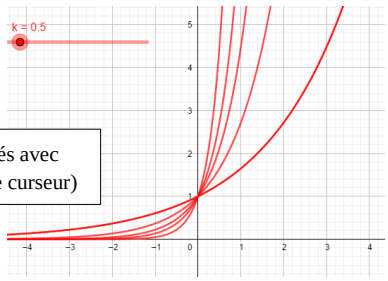
Soit a et b deux réels.

La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemples importants :

Soit k un réel strictement positif.

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$	$g_k : x \longmapsto e^{kx}$
	
Décroissance exponentielle	**Croissance exponentielle**

Quelques exemples générés avec Géogébra (en modifiant le curseur)

Définition - propriétés algébriques

Ex 10-1 : QCM

Plusieurs réponses sont possibles.

1) La fonction exp :

a) s'annule en 0

b) s'annule en 1

c) est égale à sa dérivée

d) est l'unique fonction f telle que $f'=f$

2)

a) $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

b) $\exp\left(\frac{1}{a}\right)=-\exp(a)$

c) $\exp\left(\frac{a}{b}\right)=\exp(a)-\exp(b)$

d) $\exp(a)^4=\exp(4a)$

3) Le nombre $\exp\left(5+\frac{1}{5}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\exp(26)}{\exp(5)}$

b) $\exp(26)-\exp(5)$

c) $-\exp(5^2)$

d) $\exp(5)\times\exp\left(\frac{1}{5}\right)$

Ex 10-2 : Vrai ou faux - Logique

1) (P1) : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)>0$

2) (P2) : $\exists x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)=0$

3) (P3) : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\neq 0$

4) (P4) : $\exists x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\neq 0$

5) (P3) est la négation de (P4)

6) (P3) est la négation de (P2)

Ex 10-3 : Les deux conditions : (P1) : $f'=f$ et (P2) : $f(0)=1$

1) Dans chaque cas, indiquer si la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie les propriétés (P1) : $f'=f$ et (P2) : $f(0)=1$

a) $f(x)=x+1$

b) $f(x)=1$

c) $f(x)=0$

d) $f(x)=2\exp(x)$

2) Donner toutes les fonctions f qui vérifient (P1).

3) Donner une fonction f qui vérifie (P1) et (P2).

4) En existe-t-il d'autres ?

La notation e^x

Ex 10-4 : Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^4\times e^7\times e^{-2}$

2) $e\times(e^2)^5$

3) $\frac{e^{-0,5}\times e^3}{e^{-1,7}}$

4) $\frac{e^3\times e^{-1}}{e^{-3}}\times\frac{1}{e^{-4}}$

5) $e^{-x}(e^x)^5$

6) $\frac{e^{3x}e^{2x}}{2e^x}$

7) $\frac{e^{3x}+e^x}{e^x}$

8) $(e^{-3x}-1)^2-(e^{-3x}+1)^2$

Ex 10-5 : Cosinus hyperbolique – sinus hyperbolique

Soit les fonctions ch et sh définies par :

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Montrer que pour tout réel x :

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$ et $\mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$

Ex 10-6 : Suites géométriques

Dans chaque cas, montrer que (u_n) est une suite géométrique.
Préciser la raison et le 1er terme.

1) $u_n = e^{4n}$

2) $u_n = 3e^{\frac{n}{2}}$

3) $u_n = \frac{e^{n+3}}{5}$

4) $u_n = \frac{3e}{e^{n+1}}$

Ex 10-7 : Fonction impaire

Soit $f : x \longmapsto \frac{(2x-1)e^x - 2x - 1}{e^x - 1}$ et C_f la courbe représentative de f .

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque : On dit que f est une fonction impaire.

Ex 10-8 : Vrai ou faux : justifier

1) Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$

2) Pour tous réels a et b , $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$

3) Il existe un réel a et un réel b , tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$

4) Il existe un réel a et un réel b , tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$

Ex 10-9 : Dérivées

Dans chacun des cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 4x^3 - 2e^x$

2) $f(x) = -xe^x$

3) $f(x) = (4x-1)e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^x}$

5) $f(x)=\frac{2}{3e^x+2}$

6) $f(x)=\frac{2-3e^x}{1+e^x}$

Étude de fonctions comportant la fonction exponentielle

Ex 10-10 : Variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

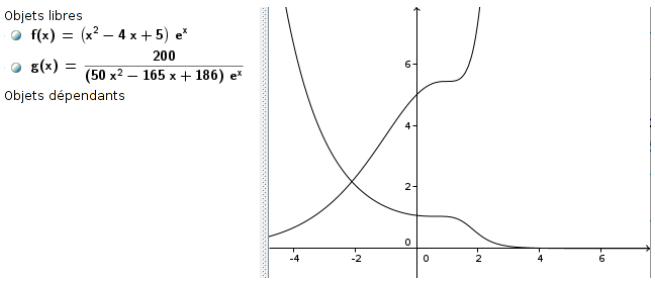
1) $f:x \longmapsto 4-3x-4e^x$

2) $f:x \longmapsto (x^2-x+1)e^x$

3) $f:x \longmapsto 2-x+\frac{4}{e^x+1}$

4) $f:x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

Ex 10-11 : Attention aux apparences



1) Associer chaque fonction à sa représentation graphique.

2) f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

3) g est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$?

Résoudre des équation et des inéquations

Ex 10-12 : Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $e^x+e=0$

2) $(e-e^x)^2=0$

3) $e^3-e^x\leqslant 0$

4) $(e^x-e^2)(e^x-e)>0$

Ex 10-13 : Ensembles de définition

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x)=e^{x^2-2x+1}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$

3) $f(x)=\dfrac{5e^x-1}{e^x-e^{-x}}$

4) $f(x)=\sqrt{1-e^{3x}}$

Étude de fonctions comportant une fonction du type $x\longmapsto e^{ax+b}$

Ex 10-14 : Dérivées

Dans chacun des cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=3e^{2x}+x$

2) $f(x)=(3x+1)e^{-0,1x}$

3) $f(x)=-\frac{3}{7}e^{-\frac{1}{3}x}$

4) $f(x)=\frac{2+e^{3x+1}}{e^{-2x}}$

Ex 10-15 : Variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

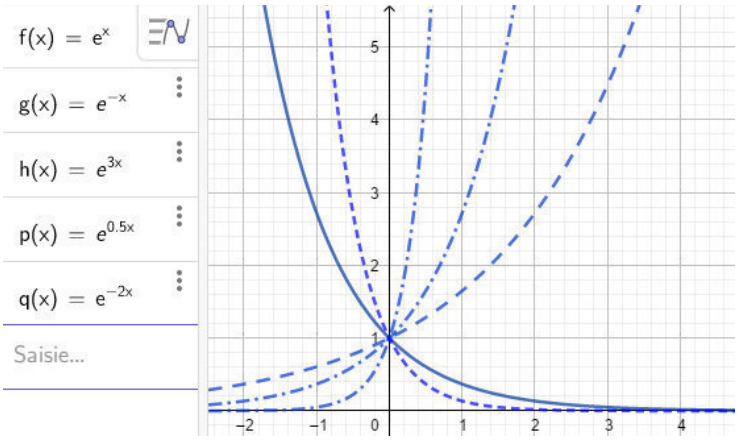
1) $f:x\longmapsto 5e^{-2x}+5$

2) $f:x\longmapsto (3x-1)e^{3x+1}$

3) $f:x\longmapsto (x^2-4)e^{x+1}$

Représentations graphiques

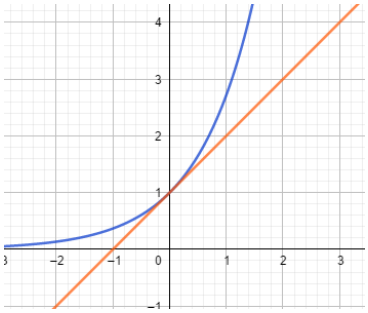
Ex 10-16 : Associer chaque fonction avec sa représentation graphique



Ex 10-17 : Tangente en zéro et positions relatives

On considère la fonction exponentielle .

On note C sa courbe représentative et T la tangente à C au point d'abscisse 0.



1) Déterminer l'équation réduite de T.

2) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x-1$

a) Déterminer le tableau de variations de f .

b) Quel est le minimum de f ?

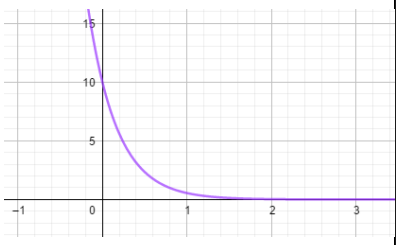
c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que pour tout réel x , on a $1+x\leqslant e^x$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

Ex 10-18 : Bien utiliser la calculatrice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x+10}{e^{3x}}$



Un élève s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction obtenue sur sa calculatrice, affirme que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

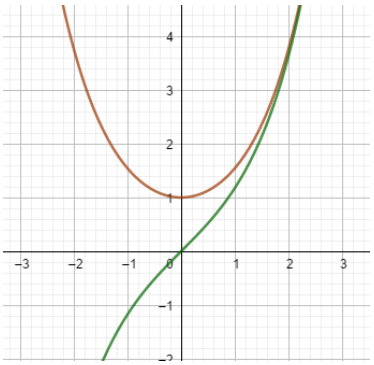
Démontrer ou infirmer cette conjecture.

Ex 10-19 : Cosinus hyperbolique – sinus hyperbolique

Soit les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1) a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.



b) Associer chacune des fonctions à la courbe qui lui correspond.

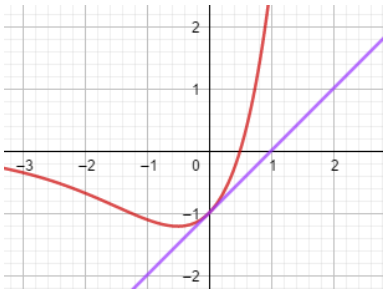
2) a) Démontrer que pour tout réel x :

$$\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$$

b) Construire les tableaux de variations de ces deux fonctions

Ex 10-20 : Déterminer a et b

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)e^x$ où a et b sont deux réels . On note C sa courbe représentative et T la tangente au point d'abscisse 0.



1) Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.

2) En déduire la valeur de b .

3) Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.

4) Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de a .

Ex 10-21 : Méthode d'Euler

L'approximation par la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe d'une fonction f par ses tangentes.

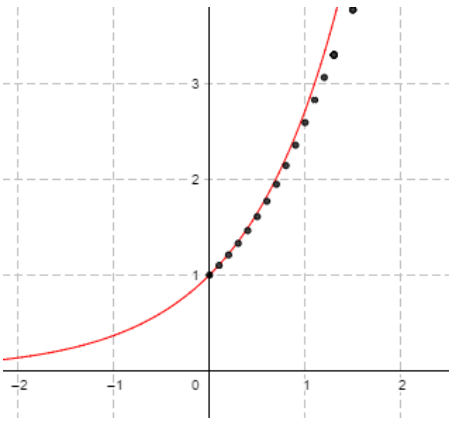
1) Montrer que l'ordonnée du point d'abscisse $a+h$ de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est $f'(a)h+f(a)$

2) Quand h devient très petit, la courbe de la fonction f est très proche de sa tangente : elle semble presque se confondre.
Euler dit alors : $f(a+h)\approx f'(a)h+f(a)$
Appliquer cette approximation à la fonction exponentielle exp.

3) Déterminer une approximation de $\exp(a+2h)$, puis deviner une approximation de $\exp(a+3h)$.

4) Le raisonnement par récurrence, qui sera vu en terminale, permet à Euler de démontrer que $\exp(a+nh)\approx\exp(a)(1+h)^n$ pour de très petites valeurs de h et pour n entier naturel non nul.

On obtient ainsi une bonne approximation de la représentation graphique de la fonction exponentielle.



Pour $a=0$ et $h=\frac{1}{n}$, en déduire que $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

5) En utilisant la fonction exp du module math, compléter l'algorithme ci-dessous écrit en python donnant le premier entier naturel n fournissant une valeur approchée de e avec une précision de 10^{-p} .

```
from math import exp
p=int(input("p="))
n=1
a=2
while abs((a-exp(1)))> … … …:
    n= … … …
    a= … … …
print(n)
print(a)
```

Tester cet algorithme et donner une expression sous la forme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ fournissant une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Ex 10-22 : Évolution d'un population : croissance exponentielle

Au 1er janvier 2018, un village comptait 1000 habitants . Pour tout entier naturel n , le nombre d'habitants u_n , en millier, n années après le 1er janvier 2018 vérifie la relation : $u_{n+1}=u_n e^{0,02}$

1) a) Déterminer la nature de la suite (u_n) .

b) Donner l'expression explicite de (u_n) .

2) a) Que peut-on dire de la croissance de la population ?

b) Déterminer le nombre approximatif d'habitants au 1er janvier 2028.

Ex 10-23 : Médicament dans le sang – Python

On injecte 4 mg d'un médicament dans le sang d'un patient, à l'instant $t=0$. On note $Q(t)$ la quantité en mg de médicament présente dans le sang du patient à l'instant t exprimé en heure.
La vitesse d'élimination du médicament étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang, on admet que la fonction Q vérifie la relation :

$$(E): Q'(t)=-0,248\,Q(t)$$

1) Montrer que $Q(t)=4e^{-0,248t}$ vérifie la relation (E) ainsi que la condition initiale $Q(0)=4$.

2) Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de deux heures.

3) Montrer que la quantité de médicament décroît au cours du temps.

4) Avec la calculatrice, tracer la courbe de la fonction Q .

5) On considère que le médicament est éliminé quand sa quantité dans le sang est inférieure à 0,001mg.
Avec la calculatrice déterminer au bout de combien de temps (arrondi au dixième d'heure) ce médicament est éliminé.

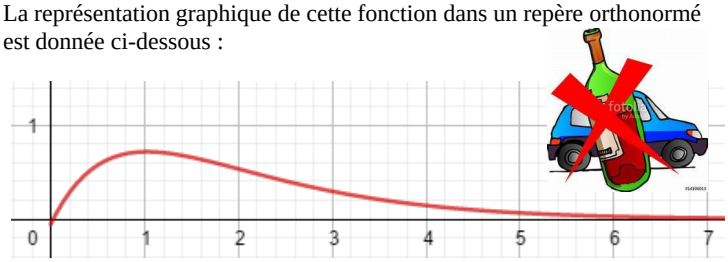
6) Écrire un programme en Python qui permet de retrouver le résultat de la question 5.

Ex 10-24 : Taux d'alcoolémie

Un étude sur un jeune homme de 64kg ayant ingéré une dose de 33g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans le sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=(2t-0,05)e^{-t}$$

La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1) Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de $0,25\ g.L^{-1}$

2) Un taux d'alcool dans le sang inférieur à $0,001\ g.L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
En utilisant la calculatrice ou un programme écrit en python, déterminer à partir de combien de temps (à 10^{-2} près) le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est négligeable ?

3) Déterminer le tableau de variation de f .

4) En déduire une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang du jeune homme.

Ex 10-25 : Décroissance radioactive

On étudie une population de noyaux radioactifs de carbone 14 au cours du temps.
À l'instant $t=0$, la population est composée de N_0 noyaux radioactifs de carbone 14.
On modélise le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant t , exprimé en milliers d'années, par la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par :
$N(t)=N_0 e^{-0,121t}$

1) Étudier les variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.

2) a) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps T au bout duquel la population de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
Justifier que $e^{-0,121T}=\frac{1}{2}$

b) Déterminer avec un programme écrit en python une valeur approchée au millième de la demi-vie T du carbone 14.

3) a) Démontrer que $N(2T)=\frac{N_0}{4}$

b) En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.

Chapitre 11 - DROITES ET CERCLES DANS UN REPÈRE

1) DROITES

A) RAPPELS DE SECONDE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. (On note $(a\,;b)\neq(0\,;0)$)

  Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

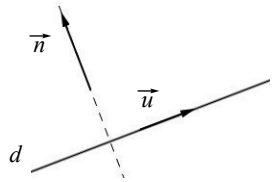
Remarque : Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $2x-y-1=0$ est une équation de la droite d, $2y=4x-2$ en est une autre, ainsi que $y=2x-1$ (qui est l'**équation réduite**)

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

B) VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

Définition :

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.



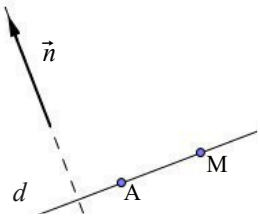
Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et un $\vec{n}$ vecteur normal à d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
C'est à dire

$$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux …



Remarque : Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs normaux.

C) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Propriété :

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où $(a\,;b)\neq(0\,;0)$) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0 ; y_0)$ un point de d et $M(x ; y)$ un point du plan , alors :

- Si la droite d a pour équation $ax+by+c=0$, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

  Or $\vec{n}\cdot\vec{u}=a(-b)+b\,a=0$

  Ainsi $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et $\vec{n}$ est normal à d .

2) CERCLES

A) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.
Le cercle C de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2=r^2$

Preuve :
Soit M un point du plan .

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.
Soit $A(x_0 ; y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r.

Pour tout point $M(x ; y)$ du plan,
On a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $AM^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

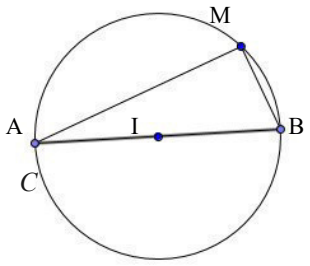
Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

B) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Propriété : Déjà vue dans le chapitre sur le produit scalaire

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle C de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$



APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Étude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.
Déterminons une équation du cercle C de diamètre [AB] avec $A(-1 ; 3)$ et $B(2 ; 2)$.

Remarque :

En développant $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ on obtient une équation de la forme $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ (où a , b et c sont des réels) , mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

Exemple :

Rappels de seconde :

Vecteur directeur :

Soit d une droite du plan. On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

- Un vecteur directeur indique l**a direction** de d . On dit aussi que le vecteur directeur **dirige** la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous **colinéaires** entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Équation cartésienne :

- $x=4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (une droite dont tous les points ont même abscisse)
- $y=3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (une droite dont tous les points ont même ordonnée)

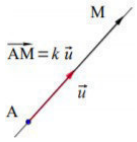
- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation d'une droite de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Caractérisation de l'ensemble des points d'une droite avec un vecteur directeur :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d.
La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires



Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, mais une seule **équation réduite**, de la forme :

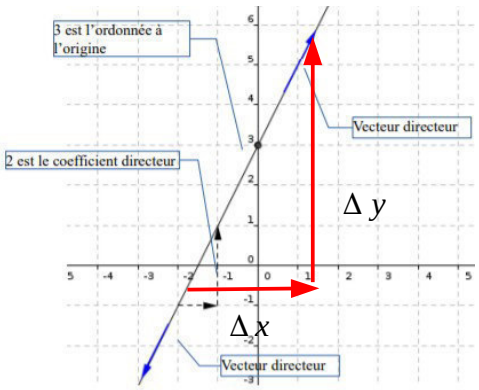
- $y=mx+p$
- ou $x=k$ si elle est parallèle à (Oy)

Étude d'un exemple :

Représentation de la droite d'équation $y=2x+3$

$2x-y+3=0$, $-2x+y-3=0$

sont d'autres équations cartésiennes de la droite.



La méthode de l'escalier :

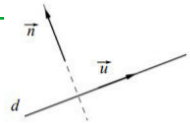
La différence en y sur la différence en x est constante et est égale au coefficient directeur : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2$

- Si le coefficient directeur est **entier**, on avance de 1 puis on monte ou on descend du coefficient directeur.

- si le coefficient directeur est une **fraction**, on avance du dénominateur , puis on monte ou on descend du numérateur.

Vecteur normal à une droite :

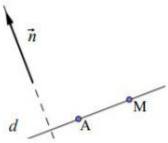
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.



Caractérisation de l'ensemble des points d'une droite avec un vecteur normal :

Soit d une droite, A un point de d et un $\vec{n}$ vecteur normal à d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.



Équation d'une droite dont on connaît un vecteur normal :
On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$.
- **Réciproquement**, toute droite ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où $(a\,;b)\neq(0\,;0)$) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Caractérisation d'un cercle de centre et de rayon donné :

Soit A et M deux points du plan et r un réel positif.

$$M\in C \Leftrightarrow AM=r \Leftrightarrow AM^2=r^2$$

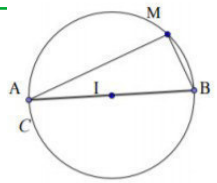
Équation d'un cercle :
On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit $A(x_0\,;y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r.

Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Caractérisation d'un cercle de diamètre donné :

Soit A et B deux points distincts du plan.
La cercle C de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$



Équation d'un cercle :
On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Étude d'un exemple :

Déterminons une équation du cercle C de diamètre [AB] avec $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;2)$.

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan .

On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$

Ainsi : $M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (-1-x)(2-x)+(3-y)(2-y)=0 \Leftrightarrow x^2-x+y^2-5y+4=0$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Droites

Ex 11-1 : Restituer les notions du cours

1) Donner un vecteur orthogonal au vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2) Donner un vecteur directeur de la droite d'équation $y=-3x+2$.

3) Donner un vecteur normal à la droite d'équation $2x-5y+3=0$.

4) $\vec{j}$ est-il un vecteur directeur de la droite d'équation $y=4$?

5) La droite d'équation $4x-3y+2=0$ est perpendiculaire à une certaine droite d. Donner un vecteur directeur de d.

6) Dire à chaque fois, s'il s'agit d'un vecteur directeur, d'un vecteur normal, ou d'un vecteur qui n'est ni directeur, ni normal à la droite d'équation $5x-3y+7=0$.

$u_1\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ $u_2\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$

$u_3\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ $u_4\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

$u_5\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$ $u_6\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

Ex 11-2 : Déterminer des équations de droites perpendiculaires

1) Écrire une équation de la droite d_1 passant par $A(-3;2)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

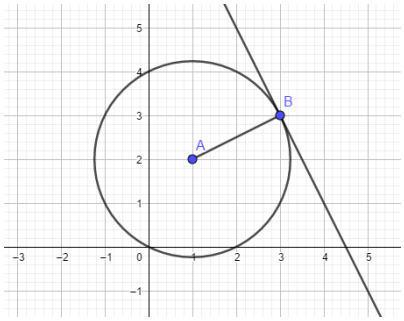
2) Écrire une équation de la droite d_2 passant par $B(5;-6)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta_1 : 3x+5y-7=0$.

3) Écrire une équation de la droite d_3 passant par $C(2;7)$ et perpendiculaire à la droite $(O;\vec{i})$.

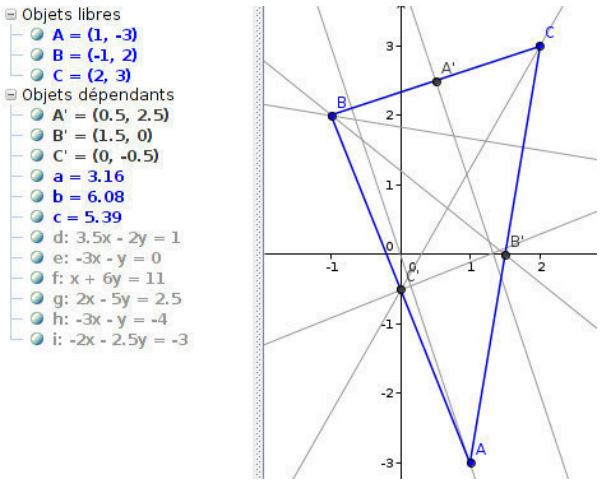
Ex 11-3 : Tangente à un cercle

Le cercle C a pour centre A(1;2) et passe par le point B(3;3).

Déterminer une équation de la droite d tangente au cercle C au point B.



Ex 11-4 : Droite d'Euler



1) a) Tracer en rouge les deux médianes du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médianes leur équation.

b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiane issue de C.

c) En déduire les coordonnées du point G, centre de gravité de ABC et placer G sur la figure.

2) a) Tracer en bleu les deux médiatrices du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médiatrices leur équation.

b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiatrice relative au côté [BC].

c) En déduire les coordonnées du point Ω , centre du cercle circonscrit de ABC et placer Ω sur la figure.

3) a) Tracer en vert les deux hauteurs du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces hauteurs leur équation.

b) En déduire les coordonnées du point H, orthocentre de ABC et placer H sur la figure.

4) Démontrer que G, H et Ω sont alignés.

Coordonnées du projeté orthogonal d'un point

Ex 11-5 : Méthode

On considère la droite d d'équation $-x+y+9=0$ et le point A(0;9).

1) Le point A appartient-il à la droite d ?

2) Donner un vecteur normal à la droite d .

3) Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à la droite d et passant par A.

4) En résolvant un système, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d .

Ex 11-6 : Sans aide

On considère les points A(-2;2) , B(4;1) et C(-6;3).
Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de C sur (AB).

Ex 11-7 : Coordonnées d'un point de projeté orthogonal connu

1) On considère la droite d_1 d'équation $x-7=0$.
Donner les coordonnées d'un point A n'appartenant pas à d_1 dont le projeté orthogonal de A sur d_1 est le point H(7;2).

2) On considère la droite d_2 d'équation $x-y+1=0$.
Donner les coordonnées d'un point B n'appartenant pas à d_2 dont le projeté orthogonal de B sur d_2 est le point H(2;3).

Ex 11-8 : Distance d'un point à une droite

Soit A(9;2) un point du plan et d la droite d'équation $-x+3y+13=0$.

1) a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite d .

b) En déduire la longueur AH

2) a) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il calcule la distance entre un point de coordonnées $(u;v)$ et une droite d'équation $ax+by+c=0$.

Pour cette question, on pourra utiliser les formules suivantes.

Si $ad-bc\neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{ed-bf}{ad-bc},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{af-ec}{ad-bc}.$$

On notera $mx+ny+p=0$ l'équation de la droite (AH).

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
u=float(input("u="))
v=float(input("v="))
if (……................. ):
    print("AH=0")
else:
    m=…..
    n= ….
    p=…..
    xH=(b*p-c*n)/(a*n-m*b)
    yH=(m*c-a*p)/(a*n-m*b)
    AH=…...
    print(AH)
```

b) Tester ce programme avec le point A et la droite d .

Cercles

Ex 11-9 : Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

1) Donner une équation du cercle de centre (4;7) et de rayon 3.

2) Donner une équation du cercle de centre (-2;0) et de rayon 5.

Ex 11-10 : Équation d'un cercle défini par son diamètre

Donner une équation du cercle C de diamètre [EF] où E(3;5) et F(-4;2).

Ex 11-11 : Reconnaître l'équation d'un cercle.

1) Dire à chaque fois si l'équation donnée est l'équation d'un cercle . Dans l'affirmative, préciser son centre et son rayon.

a) $x^2+y^2-5x+3y=-1$

b) $x^2+6x+y^2-4y+15=0$

c) $x^2+8x+y^2-4y+20=0$

d) $x^2+y^2-8x+y=-20$

e) $3x^2-4x+3y^2-6y-15=0$

f) $2x^2+4x+y^2-3y-8=0$

2) Déterminer les valeurs du réel k telles que l'équation $x^2+y^2-2x+6y=k$ soit l'équation d'un cercle.

3) Existe-t-il un réel a tel que l'équation $x^2+y^2-2ax+4y=20$ soit celle d'un cercle de rayon 7 ?
Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de son centre.

4) Montrer que l'équation $x^2+y^2-2ax-2by=0$ (où $a\neq 0$ et $b\neq 0$) est toujours celle d'un cercle . Préciser son centre et son rayon.

<u>Ex 11-12 :</u> Déterminer l'équation d'un cercle tangent à une droite

Soit A(2;3) un point du plan et d la droite d'équation $x+y+1=0$.

1) En modifiant le programme de l'Ex 11-8 conjecturer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur d . Vérifier que le point obtenu est bien le projeté orthogonal.

2) Déterminer une équation du cercle de centre A tangent à la droite d .

Ex 11-13 : Cercle circonscrit

Soit A(-1;3), B(-2;5) et C(3;5).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
(c'est à dire passant par A, B et C)

Ex 11-14 : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit C le cercle d'équation $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ et d_m la droite d'équation $mx-y+5=0$ (où m est un réel)

1) Déterminer le centre A et le rayon du cercle C.

2) Exprimer en fonction de m les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite .

3) a) Montrer que $\mathrm{AH}^2=\frac{(m+2)^2}{m^2+1}$

b) En déduite la position relative de la droite d_m et du cercle C selon les valeurs de m .

Ensemble de points

Ex 11-15 : Ensemble de points : $MA^2+MB^2=k$

Soit les points A(-2 ;-5) et B(2 ;-1).

1) Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

2) a) Prouver que le point O n'appartient pas à C .

b) Déterminer les coordonnées exactes des points d'intersection de C et de l'axe des ordonnées.

c) Démontrer que C ne coupe pas l'axe des abscisses.

3) On considère l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=32$.
On considère $M(x;y)$. Exprimer MA^2+MB^2 en fonction de x et y , puis en déduire la nature de l'ensemble E.

Ex 11-16 : Ensemble de points : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).
On veut déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

1) On pose $M(x;y)$. démontrer que E est une droite dont on donnera une équation.

2) On veut déterminer l'ensemble F des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$
Démontrer que $M(x;y)$ appartient à F si et seulement si
$x^2+y^2-2x-y-4=0$.

En déduire que F est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Ex 11-17 : Ensemble de points : $\frac{MA}{MB}=k$

Soit A(1;2) et B(2 ;-1) deux points du plan. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M du plan vérifiant $\frac{MA}{MB}=2$

1) Montrer que M $\in$ E si et seulement si $MA^2-4MB^2=0$

2) Démontrer que les coordonnées de $M(x;y)$ vérifient l'équation :
$x^2+y^2-\frac{14}{3}x+4y+5=0$

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble E.

Ex 11-18 : Ensemble de points équidistants d'un point et de (Ox)

Soit le point F(0;4) . Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ équidistants du point F et de l'axe des abscisses.

1) Exprimer le carré de la distance *d* du point M à l'axe des abscisses.

2) Exprimer le carré de la distance MF.

3) En déduire l'équation de l'ensemble des points M du plan équidistants de l'axe des abscisses et du point F.

L’alphabet grec en sciences

http://pierrelux.net

majuscules	minuscules	
	α	alpha
	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
	ε	epsilon
	ζ	zêta
	η	êta
Θ	θ	thêta
	ι	iota
	κ	kappa
Λ	λ	lambda
	μ	mu
	ν	nu
X	χ	xi ou ksi
	ο	omicron
Π	π	pi
	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
	τ	tau
	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
	ξ	chi ou khi
	ψ	psi
Ω	ω	omega

Ne sont indiquées que les capitales utilisées en sciences . Les autres, identiques à des lettres de l’alphabet latin, ne sont pas utilisées.

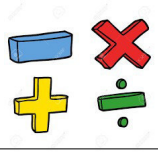
La lettre omicron, identique à notre lettre o, n’est pas utilisée en sciences.

PYTHON - les instructions de base utilisées au lycée

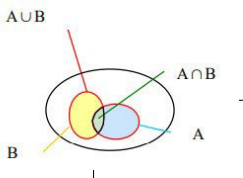
http://pierrelux.net

Créer un programme	- On va à la ligne après chaque instruction. - On peut séparer plusieurs instructions sur la même ligne en les séparant par « **;** »
Saisir une variable Il existe aussi d'autres types numériques : **type long** : Entier compris entre et – inf et 2 147 483 647 ou entre 2 147 483 648 et + inf **type complex** : Nombre complexe Pour connaître tous les types … https://fr.wikiversity.org/wiki/Python/Les_types_de_base	- **A=input("A=")** si A est une chaîne de caractère (c'est le type par défaut) **type str** : *Chaîne de caractères* - **A=float(input("A="))** si A est un flottant **type float** : *Valeur spécifiée avec un point dans le programme (exemple : a=2.0) permettant une approximation de nombre réel* - **A=int(input("A="))** si A est un entier **type int** : *Entier compris entre -2 147 483 648 et 2 147 483 647 (codage sur 32 bits soit 4 octets)*
Afficher	- **print(A)** affiche la valeur de la variable A - **print("Vive les maths")** affiche le texte Vive les maths - On peut aussi mélanger texte et variable : **print("la valeur de A est ",A)**
Affecter	**B=A** affecte la valeur A ou le contenu de la variable A à la variable B
Écrire un commentaire	Les commentaires s'écrivent après le signe **#**
Opérations élémentaires	addition **+** soustraction **-** multiplication ***** puissance ****** division **/** reste de division entière **%** (9%2 donne 1) quotient de division entière **//** (9//2 donne 4)
Tester ...	**A==B** (égal) **A!=B** (différent) **A>B** (supérieur) **A<B** (inférieur) **A>=B** (supérieur ou égal) **A<=B** (inférieur ou égal)
Et / Ou	A **and** B / A **or** B
Si … Sinon Si … Sinon	**if** *condition C1* **:** *instruction A1* **elif** *condition C2* **:** *instruction A2* **else :** *instruction A3* C'est **le décalage** vers la droite qui indique les instructions faisant partie de la structure conditionnelle. Il n'y a pas d'instruction de fin. Il en est de même pour **for** , **while** et **def**.
Boucle Pour	**for i in range(1,n+1) :** *instruction A* la variable i parcourt tous les entiers de 1 à n - **for i in range(n):** la variable i parcourt tous les entiers de 0 à n-1 - **for i in range(m,n):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 - **for i in range(m,n,p):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 avec un **pas** de p.
Boucle Tant que	**while** *condition* **:** *instruction A*
Fonctions	**Def exemple(a,b …):** *instruction … y=…* **return(y)** a,b,… sont **les arguments** de la fonction exemple On peut aussi retourner plusieurs valeurs : return(x,y,z,...)
Insérer un **module**	Un module est une bibliothèque comportant un ensemble de fonctions. Je présente ci-dessous les modules utilisés au lycée.
Opérations mathématiques : math **Toutes les fonctions du module math** **https://www.afpy.org/doc/python/3.5/library/math.html**	**from math import *** On peut aussi importer uniquement la fonction souhaitée : **from math import sqrt** Le module math, contient les définitions de nombreuses fonctions mathématiques telles que **sin**, **cos** , **tan** ,**sqrt** , **pi** …
Nombres aléatoires : random **Toutes les fonctions du module random** **https://docs.python.org/fr/3.5/library/random.html**	**from random import *** Le module random contient les définitions de nombreuses fonctions faisant référence au hasard telles que : - **uniform(a,b)** qui retourne un nombre aléatoire compris entre a et b - **randint(a,b)** qui retourne un entier aléatoire compris entre a et b
Graphiques : pylab Bases du module **pylab** **http://matplotlib.free.fr/bases.html**	**from pylab import *** Le module pylab contient de nombreuses fonctions graphiques, ce qui en fait un outil très puissant pour créer des graphiques scientifiques. Ce module possède aussi les fonctions usuelles du module math , il n'est donc pas utile d'importer aussi celle-ci lorsqu'on utilise pylab. On peut aussi utiliser une version plus légère : **matplotlib.pyplot**. Mais celui-ci ne possède pas les fonctions du module math.
Listes et chaînes de caractères	**A=[]** permet de définir la liste vide A **A.append(x)** ajoute la valeur x à la liste (Si la liste était définie jusqu'au 10 ème terme, x sera le 11ème terme)
Longueur	**len(A)** renvoie la longueur de la liste ou de la chaîne de caractères A
Extraire	**A[k]** renvoie le k+1 ème élément de la liste ou de la chaîne de caractères A. Attention A[0] est le premier terme de la liste.
Concaténer	"mathé "**+**"matiques" donne la chaîne de caractères "mathématiques" [1,2,3,4]**+**[5,6,7,8] donne la liste [1,2,3,4,5,6,7,8]

Quelques symboles mathématiques à connaître



http://pierrelux.net

				Exemples
Symbole d'implication	$A \Rightarrow B$	A **implique** B **Si** A **alors** B B est **nécessaire** à A A est **suffisant** pour B	Ce symbole est censé exprimer l'idée que A est vraie entraîne que B aussi.	$x=2 \Rightarrow x^2=4$
Symbole d'équivalence	$A \Leftrightarrow B$ A ssi B	A **équivaut à** B A **si et seulement si** B	Il s'agit d'une implication dans les deux sens : A implique B et B implique A	$x=2$ ou $x=-2$ $\Leftrightarrow x^2=4$
Quantificateur universel	$\forall x \ , \ P(x)$	**Quel que soit** x ; **pour tout** x	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour tout x	$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ x^2+\frac{1}{x+1}>0$
Quantificateur existentiel	$\exists x \ , \ P(x)$	**Il existe** x tel que...	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un x .	$\exists x \in \mathbb{R} \ , \ (x-2)(x-3)>0$
Symbole d'appartenance	$x \in E$	x **appartient à** E x **est élément de** E E **contient** x	Pour un ensemble E donné, ce symbole signifie qu'il contient l'élément x .	$A \in d$ $2 \in]-3;5[$
Symbole de non-appartenance	$x \notin E$	x **n'appartient pas à** E	Négation de l'appartenance de x à E .	$-5 \notin \mathbb{N}$
Symbole d'inclusion	$A \subset B$	A est **inclus** dans B A est **un sous-ensemble** de B A est **une partie** de B B **contient** A	Pour deux ensembles A et B donnés, ce symbole signifie que tous les éléments de A sont éléments de B .	$]-2;5[\subset]-3;8[$
Symbole de non-inclusion	$A \not\subset B$	A n'est **pas inclus** dans B	Négation de l'inclusion de A dans B , c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B .	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$
Ensemble vide	$\emptyset$	**Ensemble vide**	Ensemble qui ne comporte aucun élément	$]3,1;5[\cap [5,2;+\infty[= \emptyset$
Singleton, paire, ensembles finis Accolades { … }	$\{x\}$ $\{x,y\}$ $\{x_1,x_2 \ldots x_n\}$	**Singleton** x **Paire** $x \quad y$ **Ensemble** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Ensemble dont l'unique élément est x Ensemble dont les seuls éléments sont x et y Ensemble dont les n éléments sont $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$.	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=4$ est $S=\{-2;2\}$ L'ordre n'est pas important. On aurait pu écrire $\{2;-2\}$
Couple, Triplet, n-uplet Parenthèses (...)	(x,y) (x,y,z) $(x_1,x_2 \ldots x_n)$	**Couple** $x \quad y$ **Triplet** $x \quad y \quad z$ **n-uplet** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Représentation d'une collection d'objets occupant chacun **une place précise**, au sens où contrairement à un ensemble finis, l'ordre et la répétition des objets n'est pas anodine.	Le point de coordonnées $(5;7)$ n'est pas le point de coordonnées $(7;5)$.
Réunion $A \cup B$		A **union** B **Réunion** de A et B	Ensemble contenant les éléments de A **ou** B et seulement ceux-là. Les éléments en commun à A et B sont dans la réunion. On dit que le ou mathématique est **inclusif**.	$]-7;8] \cup [-3;10[=]-7;10[$
Intersection $A \cap B$		A **inter** B **Intersection** de A et B	Ensemble contenant les éléments en communs de A et B et seulement ceux-là.	$]-7;8] \cap [-3;10[= [-3;8]$
Somme	$\sum_{i=1}^{n}$	**Somme** de $i=1$ à $i=n$	On avance de 1 en 1, c'est à dire : 1,2,3,4,5 $\ldots, n$	$\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$
Association	$f : x \longmapsto f(x)$	fonction f **qui à** x associe le nombre $f(x)$	Attention, il ne faut pas utiliser la flèche $\rightarrow$	$f : x \longmapsto x^2$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels**. $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;\ldots\}$

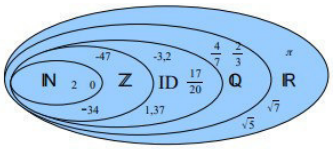
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou ***nombres entiers***) $\mathbb{Z}=\{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels privé de 0.
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0. $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs. $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs.
$\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des réels strictement positifs. $\mathbb{R}^{-*}$ est l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R}-\{2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2

$\mathbb{R}-\{2;5,2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2;5,2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2 et 5,2