Seconde

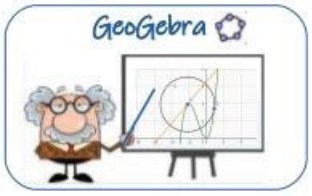
Mathématiques - Programme 2019

Fiches d'exercices et de cours à compléter

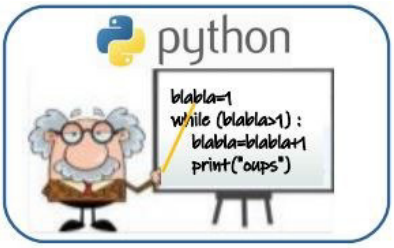
Auteur : Pierre Lux – version 2023

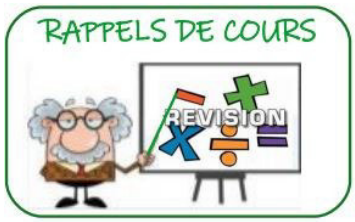
Toutes les corrections sont consultables en ligne

http://pierrelux.net



1 : Ensembles de nombres pages 1 à 10
2 : Calcul littéral pages 11 à 18
3 : Vecteurs pages 19 à 30
4 : Fonctions de référence pages 31 à 40
5 : Arithmétique pages 41 à 50
6 : Pourcentages pages 51 à 59
7 : Configurations planes pages 60 à 70
8 : Équations pages 71 à 82
9 : Courbes représentatives de fonctions pages 83 à 90
10 : Statistiques pages 91 à 100
11 : Droites pages 101 à 115
12 : Probabilités pages 116 à 124
13 : Variations de fonctions pages 125 à 137
14 : Fluctuation d'échantillonnage pages 138 à 143
Algorithmes et Python pages 144 à 154





Chapitre 1 - ENSEMBLES DE NOMBRES

1) LES PRINCIPAUX ENSEMBLES DE NOMBRES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$

  L'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0 se note $\mathbb{N}^*$.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs (ou nombres entiers)** $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

  L'ensemble des nombres entiers différents de 0 se note $\mathbb{Z}^*$.

Exemples : ;

- ID est l'ensemble des **nombres décimaux** . (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

Exemples : ;

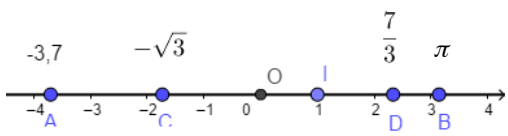
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** . (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

Exemples : ; ;

- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul

Exemples :
- La longueur d'un carré d'aire 2 cm^2 , noté $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel . (Démonstration en exercice)
- π et un nombre irrationnel

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** , c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.
  $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée munie d'un repère (O,I).



Exemples :

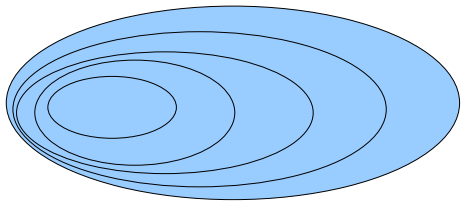
B) SYMBOLE D'INCLUSION

Définition :

Soit A et B deux ensembles :

$A \subset B$ se lit : " A est **inclus** dans B " , " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "
$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.
Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset$ ID $\subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2) INTERVALLES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Remarque préliminaire :
On a vu que sur une droite munie d'un repère (O,I) , à tout point M de cette droite, on peut associer un réel, appelé abscisse de M dans le repère (O,I).
Dans la suite, pour représenter les réels, on se contentera d'utiliser cette droite sans marquer le nom des points.
Cette droite est appelée **droite des réels**.

Définition :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des nombres réels vérifiant la double inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé **intervalle fermé** a , b de $\mathbb{R}$ noté $[a\,;b]$.
Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a\,;b]$.
$b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle $[a\,;b]$. (c'est à dire sa " largeur ")

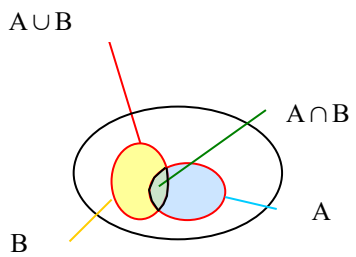
Les différents cas sont représentés dans le tableau ci-dessous.

REPRÉSENTATION	INÉGALITÉ *ensemble des réels x vérifiant :*	INTERVALLE	
a b --[----------]-->		$[a\,;b]$	Intervalle fermé
a b --]----------[-->	$a < x < b$		Intervalle ouvert
a b --[----------[-->		$[a\,;b[$	Intervalle semi fermé à gauche (ou semi ouvert à droite)
a b --]----------]-->	$a < x \leqslant b$	$]a\,;b]$	Intervalle semi fermé à droite (ou semi ouvert à gauche)
a --[---------->	$x \geqslant a$		Intervalle fermé ($+\infty$, *plus l'infini,* n'est pas un nombre)
a --]---------->	$x > a$	$]a\,;+\infty[$	Intervalle ouvert
a ----------]---->		$]-\infty\,;a]$	Intervalle fermé ($-\infty$, *moins l'infini,* n'est pas un nombre)
a ----------[---->	$x < a$	$]-\infty\,;a[$	Intervalle ouvert

Remarques :

- L'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ n'est rien d'autre que $\mathbb{R}$
- Notation : $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$, $\mathbb{R}^-=]-\infty;0]$, $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^*=]-\infty;0[$

B) INTERSECTION ET RÉUNION



Définition :

Soit A et B deux ensembles.
- **L'intersection** de ces deux ensembles, noté $A \cap B$ (A inter B) , est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B .
- **La réunion** de ces deux ensembles , noté $A \cup B$ (A union B) , est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B .

Remarque :

- Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, alors on dit que leur intersection est vide . On note : $A \cap B = \emptyset$
- Notation : $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Exemples :

- $[-5\,;3]\cap]1\,;5]=$ _____
- $]-3\,;2[\cup[1\,;3{,}5]=$
- $[-5\,;2]\cap[3\,;7{,}5[=$

3) ENCADRER ET ARRONDIR UN RÉEL

Définitions :

- Donner un **encadrement** décimal d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
$b-a$ est appelée **amplitude** de l'encadrement.
On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près (où $n \in \mathbb{N}$) si son amplitude est égale à 10^{-n} .

- **Arrondir** un nombre, c'est lui trouver la valeur la plus proche à une précision donnée.

Exemple :

$3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}

est une valeur approchée par défaut de π .

est une valeur approchée par excès de π .

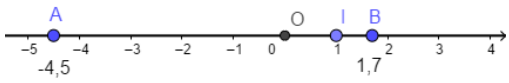
est l'arrondi de π à 10^{-1} près. (On regarde le chiffre situé juste après la valeur approchée par défaut : si ce chiffre est 0,1,2,3 ou 4, on choisit comme arrondi, la valeur approchée par défaut, sinon on choisit la valeur approchée par excès)

4) VALEUR ABSOLUE

Définition :

La distance entre deux points de la droite des réels est la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite.

Exemple :



AB =

Définition :

Pour tout nombre réel x, **la valeur absolue** de x (notée $|x|$) est la distance entre x et 0.
On a :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geqslant 0$.

Remarques :
Pour tout réel x , on a :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow$
- $|-x| =$
- $\sqrt{x^2} =$

Propriété :

La distance entre deux réels a et b est égale à $|b-a|$

La distance entre a et b est la même que la distance entre b et a . On a donc $|b-a| = |a-b|$

Exemple : La distance entre -4 et -7 est

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
On dit que les intervalles $[a-r;a+r]$ et $]a-r;a+r[$ ont pour **centre** a et pour **rayon** r .
On a :

- $x \in [a-r;a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leqslant r$
- $x \in]a-r;a+r[\Leftrightarrow |x-a| < r$

Exemple :

L'intervalle $[-2;5]$ a pour amplitude , pour rayon et pour centre

On a : $x \in [-2;5] \Leftrightarrow$

Les principaux ensembles de nombres

Ex 1-1 : Compléter par $\in$ ou $\notin$

1) 5 … $\mathbb{N}$; 5 … $\mathbb{Z}$; 5 … ID ; 5 … $\mathbb{Q}$; 5 … $\mathbb{R}$

2) $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{N}$; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{Z}$; $-\frac{45}{9}$ … ID ; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{Q}$; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{R}$

3) $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{N}$; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{Z}$; $\frac{7}{8}$ … ID ; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{Q}$; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{R}$

Ex 1-2 : Vrai ou faux

	$\in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{Z}$	$\in$ ID	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{R}$
$\frac{5}{3}-\frac{7}{3}$					
$\sqrt{7}$					
$2,8\times10^5$					
3×10^{-7}					
$\frac{\pi}{5}$					
$3-\sqrt{5\times8-4}$					
$\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\times24$					

Ex 1-3 : Nombres décimaux

Entourer les nombres rationnels qui appartiennent à ID :

$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{10}{26}$ $-\frac{45}{25}$ $\frac{47}{20}$ $-\frac{12}{5}$ $-\frac{28}{3}$

Ex 1-4 : Nombres rationnels

Entourer les réels qui appartiennent à $\mathbb{Q}$:

8^{456} $\frac{\sqrt{3}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{7}$ $\sqrt{7}+2$ $\frac{5\pi}{7\pi}$ $\frac{\pi}{1000}$ $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{121}}$ $\frac{3}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ 7,5

Ex 1-5 : Nombres rationnels et développement décimal périodique

1) Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Par exemple : $\frac{13193}{49950}$ =0,264124124 12…

Mettre en évidence cette propriété avec les nombres rationnels ci-dessous : (utiliser XCAS)

$\frac{45}{17}$ = $\frac{458}{784}$ =

2) Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique correspond à l'écriture d'un rationnel.

a) Compléter : y =0,00723723723...

$\Rightarrow$ $1000y = 7,23723723723...$

$\Rightarrow$ $1000y = 7,23 + y$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

b) En déduire l'écriture fractionnaire de 4,24723723723...

Ex 1-6 : Démonstration par l'absurde : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel

Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\sqrt{2}>0$, il existe donc $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On a alors :

$$\frac{p^2}{q^2}=2 \quad\Rightarrow\quad p^2=2q^2 \quad (1)$$

On en déduit que p^2 est un nombre ……

Le carré d'un nombre impair étant impair, p est donc nécessairement pair.

(En effet : $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$)

Comme p est pair, il existe $n\in\mathbb{N}$, tel que :

……

En égalisant (1) et (2), on obtient :

……

Comme $n^2\in\mathbb{N}$, on en déduit que q^2 est pair, et donc que q est pair.

……

Ex 1-7 : Démonstration par l'absurde : $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal

Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\frac{1}{3}\notin$ ID

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Comme $0<\frac{1}{3}<1$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$, tels que :

……

……

Or 10^p n'est pas divisible par 3 .

(En effet, les seuls diviseurs premiers de 10^p sont 2 et 5)

.....

Ex 1-8 :

Soit A= $5-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ et B= $\sqrt{y}-\frac{2}{4}+2,7$

1) Trouver $x\in\mathbb{Z}$, tel que $A\in\mathbb{N}$

2) Trouver $x\in\mathbb{Z}$, tel que A $\in$ ID\ $\mathbb{Z}$

3) Trouver $y\in\mathbb{R}$, tel que $B\in\mathbb{N}$

4) Trouver $y\in\mathbb{N}$, tel que B $\in$ ID\ $\mathbb{N}$

Ex 1-9 : Logique : Vrai ou faux

Justifier par une démonstration si la réponse est « vrai » ou par un contre exemple si la réponse est « faux ».

1) L'inverse d'un nombre décimal non nul est toujours un nombre décimal.

2) L'inverse d'un nombre rationnel non nul est toujours un nombre rationnel.

3) La somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal.

4) Le produit de deux nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

Intervalles

Pour tous les exercices sur les intervalles, il ne faut pas hésiter à utiliser la droite des réels pour représenter les intervalles, ce qui peut être très pratique pour les intersections et les réunions d'intervalles.

4 7

--[----------]--> représentation de $[4;7]$

Ex 1-10 : QCM

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.

1) L'intervalle $]1;3]$:

a) est borné	b) est ouvert en 1	c) est ouvert en 3	d) contient une infinité de nombres réels

2) L'intervalle $]-\infty;5[$:

a) est borné	b) contient le nombre 5	c) est ouvert en 5	d) s'écrit avec le nombre réel $-\infty$

3) L'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$

a) contient 0	b) contient 1	c) est un intervalle	d) est l'intersection des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

Ex 1-11 : Compléter par $\in$ ou $\notin$

$-\frac{1}{5}$ ... $]-5;0[$	-4 ... $]-\infty;-4[$	10^{-7} ... $]-\infty;0[$
$\frac{1}{3}$ ... $[0;0,33]$	5^0 ... $\left]\frac{1}{5};1\right]$	$-3,14$ ... $]-5;-\pi]$
2 ... $\{1;3\}$	4 ... $\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$	$\pi-3$ ... $\mathbb{R}^+$
3 ... $]-\infty;3[\cup]3;5[$	-7 ... $\mathbb{N}$	1 ... $[1;5]\cup[3;7]$

Ex 1-12 : Intervalles vers inégalités

Compléter avec des inégalités :

$x\in[-7;3]\Leftrightarrow$ ...	$x\in]-\infty;4[\Leftrightarrow$ ...
$x\in]-\infty;7[\Leftrightarrow$ ...	$x\in[-2;+\infty[\Leftrightarrow$ ...
$x\in]0;3[\Leftrightarrow$ ...	$x\in[2;13[\Leftrightarrow$ ...

Ex 1-13 : Inégalités vers intervalles

Compléter avec des intervalles :

$-2<x\leqslant 7 \Leftrightarrow \ldots$	$x\geqslant -4 \Leftrightarrow \ldots$
$12>x \Leftrightarrow \ldots$	$5\geqslant x>1 \Leftrightarrow \ldots$
$x\geqslant 1$ et $x\leqslant 4 \Leftrightarrow \ldots$	$x<0 \Leftrightarrow \ldots$

Ex 1-14 :

Compléter les phrases suivantes :

1) L'ensemble de tous les nombres réels négatifs s'écrit ……

2) L'ensemble de tous les nombres réels strictement positif s'écrit ……

3) L'ensemble de tous les nombres réels strictement compris entre 7 et 9 s'écrit ……

4) L'ensemble vide s'écrit ……

5) L'ensemble ne contenant que -2 et 2 s'écrit ……

Ex 1-15 : Inégalités vers intervalles

Compléter avec des intervalles :

$-1<x<7 \Leftrightarrow \ldots$
$x\leqslant 7 \Leftrightarrow \ldots$
$6x+4\leqslant 0 \Leftrightarrow \ldots$
$-6x+9>0 \Leftrightarrow \ldots$
$\frac{x}{3}>0 \Leftrightarrow \ldots$

Ex 1-16 : Réunion et intersection

Compléter les égalités suivantes :

$]-\infty;2]\cap[1;6[=\ldots$
$]-\infty;2]\cup[1;6[=\ldots$
$]-5;0]\cap]-1;1[=\ldots$
$]-5;0]\cup]-1;1[=\ldots$
$[-5;2]\cap]2;+\infty[=\ldots$
$[-5;2]\cup]2;+\infty[=\ldots$
$]0;4]\cap[4;7[=\ldots$
$]0;4]\cup[4;7[=\ldots$
$]-\infty;5]\cap[-3;0[=\ldots$
$]-\infty;5]\cup[-3;0[=\ldots$

Ex 1-17 : « ou » et « et »

Compléter les phrases suivantes :

1) L'ensemble des réels x tels que $x\geqslant 3$ et $x\leqslant 8$ s'écrit …

2) L'ensemble des réels x tels que $x\geqslant 3$ ou $x\leqslant 8$ s'écrit …

3) L'ensemble des réels x tels que $x<6$ et $x\leqslant 9$ s'écrit …

4) L'ensemble des réels x tels que $x<6$ ou $x\leqslant 9$ s'écrit …

5) L'ensemble des réels x tels que $x>3$ et $x\leqslant 0$ s'écrit …

6) L'ensemble des réels x tels que $x>3$ ou $x\leqslant 0$ s'écrit …

7) L'ensemble de tous les nombres réels sauf -2 s'écrit …

8) L'ensemble de tous les nombres réels non nuls s'écrit …

Encadrer et arrondir un réel

Ex 1-18 : Attention à la calculatrice

1) A l'aide de la calculatrice donner l'arrondi de $\frac{946}{34621}$, à :

l'unité	10^{-1} près	10^{-2} près	10^{-4} près	10^{-5} près	10^{-11} près
…	…	…	…	…	…

2) a) A l'aide de la calculatrice, donner les arrondis à 10^{-10} près de $\frac{8712870}{48506557}$ et $\frac{505149}{2812281}$

b) Peut-on conclure que ces deux nombres sont égaux ?

3) Peut-on dire que les nombres π et $\frac{1980127}{630294}$ sont égaux ?

Ex 1-19 : Encadrement décimal

Pour chaque nombre, donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-3}, puis donner l'arrondi au millième :

1) $\sqrt{5}$:

2) $-\frac{8}{3}$:

3) π^2 :

Ex 1-20 : Encadrements décimaux de π

1) Vers 250 avant J.-C., Archimède démontre que $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$.

a) Est-ce un encadrement décimal de π ?

b) Déterminer l'amplitude (arrondi au millième) de cet encadrement.

2) En Inde, vers 380 avant J.-C. , $3+\frac{177}{1250}$ est utilisé comme valeur approchée de π . Est-ce une bonne valeur approchée de π ? Si, oui à combien près ?

3) En Chine, au 5ème siècle , $\frac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de π . Est-ce une bonne valeur approchée de π ? Si, oui à combien près ?

Valeur absolue d'un réel

Ex 1-21 : QCM – restituer les notions du cours

Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

a) $|\sqrt{3}-1|=1-\sqrt{3}$ b) $|\pi-3|=\pi-3$ c) $|10^{-5}|=10^5$

d) $|\sqrt{2}-1,5|=1,5-\sqrt{2}$ e) $\left|-\frac{4}{7}\right|=\frac{4}{7}$ f) $\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

g) $|10^3-10^4|=10^3-10^4$ h) $|10^{-3}-10^{-4}|=10^{-3}-10^{-4}$

Ex 1-22 :

Compléter les pointillés par $\leqslant$ ou $\geqslant$:

a) $|2,7|$ … $|3,8|$ b) $|-2,7|$ … $|-2,4|$

c) $|-\pi|$ … $|3,14|$ d) $|-1,41|$ … $|-\sqrt{2}|$

Ex 1-23 : Inégalité concernant $|x|$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une inégalité concernant $|x|$.

a) $x<-7$

b) $x\geqslant 3$

c) $x\leqslant -4$

d) $-3\leqslant x\leqslant 8$

e) $-4<x\leqslant 4$

f) $-4<x<2$

Ex 1-24 : Simplifications

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$. Simplifier :

a) $|ab|$

b) $|a+3|$

c) $|4-b|$

d) $|b-a|$

e) $\left|\frac{b}{a}\right|$

f) $|a| \times |b|$

Ex 1-25 : Valeur absolue d'un produit et d'un quotient

1) Compléter le tableau ci-dessous :

x	3	-2	3	-4	5	-4
y	4	3	-5	-3	-7	0,1
$\|x\| \times \|y\|$						
xy						
$\|xy\|$						

2) Que peut-on conjecturer concernant la valeur absolue d'un produit de deux réels ?

3) Démontrer ce résultat dans les cas ci-dessous :

- $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

- $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

- $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$

- $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$

Conclure.

4) Quel résultat analogue peut-on imaginer concernant la valeur absolue d'un quotient ? Démontrer-le.

Ex 1-26 : $|x|$ et $\sqrt{x^2}$

1) Calculer $\sqrt{3^2}$ $\sqrt{7^2}$

$\sqrt{(-11)^2}$ $\sqrt{(-7)^2}$

2) Conjecturer une formule permettant de simplifier l'écriture de $\sqrt{x^2}$.

3) Simplifier :

$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$B = \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}$

Ex 1-27 : Équation de la forme $|x| = k$

1) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $|x| = k$?

2) Résoudre l'équation $|x| = 0$.

3) Soit $k \in \mathbb{R}_-^*$.

Déterminer le (ou les) réel(s) positif(s) solution(s) de l'équation $|x| = k$.

Déterminer le (ou les) réel(s) négatif(s) solution(s) de l'équation $|x| = k$.

Conclure.

4) Résoudre par le calcul les équations suivantes :

a) $|x|=3,5$

b) $|x|=-2$

c) $|x|=1-\sqrt{2}$

Ex 1-28 : Distance entre deux nombres réels

1) Dans chacun des cas, calculer la distance entre les réels :

a) -4 et 8

b) $-3\sqrt{2}$ et $-5\sqrt{2}$

c) π et 3π

2) Dans chacun des cas, donner une interprétation en terme de distance :

a) $\left|\frac{1}{3}-\sqrt{2}\right|$

b) $\left|\sqrt{3}+\frac{1}{7}\right|$

c) $|x+2|$

d) $|\sqrt{3}-x|$

Ex 1-29 : Représenter un ensemble

1) Sur la droite des réels, représenter :

a) en bleu l'ensemble des réels x , tels que $|x+2|<8$

b) en vert l'ensemble des réels x , tels que $|x-1|<3$

2) Donner tous les entiers appartenant en même temps aux deux ensembles précédents.

Ex 1-30 : Valeur absolue vers intervalle

Compléter :

1) $|x|\leqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\ \dots\ ;\ \dots\ ]$

2) $|x-7|<5 \quad \Leftrightarrow \quad \dots$

3) $|x|<\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \dots$

4) $|x-\sqrt{3}|\leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad \dots$

5) $|x+2|<5 \quad \dots$

6) $|x|\geqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad \dots$

7) $|x-2|\geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dots$

Ex 1-31 : Intervalle vers valeur absolue

Compléter :

1) $x\in[-8;8] \quad \Leftrightarrow \quad |x| \ \dots$

2) $x\in[-7;3] \Leftrightarrow \quad \dots$

3) $x\in]2;13[\quad \Leftrightarrow \quad \dots$

4) $x \in]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \dots$

5) $x \in]-\infty;-7[\cup]7;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \dots$

6) $x \in]-\infty;3]\cup[7;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \dots$

Ex 1-32 : Représenter un ensemble

1) Dans un repère représenter :

a) en vert l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|x|=3$

b) en rouge l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|y|=2$

2) Où sont situés les points tels que $|x|=3$ et $|y|=2$?

3) Dans ce même repère, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|x|\leqslant 3$ et $|y|\leqslant 2$

Ex 1-33 : Représenter un ensemble

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$

vérifiant : $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{N} \\ |x-1|\leqslant 4 \\ |y+1,5|>2 \end{cases}$

Algorithme

Ex 1-34 : Algorithme de Héron

L'algorithme de Héron d'Alexandrie (mathématicien grec du 1er siècle) permet de calculer des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ ($a\geqslant 0$).

L'idée est la suivante :

On considère un rectangle d'aire a et dont les côtés mesurent u et $\frac{a}{u}$ où u est un nombre positif, si possible proche de $\sqrt{a}$.
Pour rendre ce rectangle « un peu plus carré », on construit le rectangle de même aire ayant pour longueur d'un côté la moyenne des deux mesures du rectangle précédent : $\frac{u+\frac{a}{u}}{2}$

En réitérant indéfiniment l'opération, on construit une suite de longueurs de rectangles qui va tendre vers $\sqrt{a}$ c'est à dire vers la longueur du côté du carré d'aire a .

Pour résumer :
- étape 1 : on choisit un nombre u strictement positif..
- étape 2 : on calcule $\frac{u+\frac{a}{u}}{2}$
- étape 3 : on applique à nouveau cette formule en remplaçant u par la valeur trouvée à l'étape précédente.

1) Expliquer ce que fait l'algorithme ci-dessous écrit en python :

```
1  def Racine(a,n) :
2      u=1
3      for i in range (1,n+1) :
4          u=(u+a/u)/2
5      return u
```

2) Exécuter

Racine(5,3)

Racine(5,7)

Racine (5,10)

Que peut-on reprocher à cette fonction Racine ?

3) On souhaite calculer les termes de l'algorithme tant que la distance entre deux termes successifs est supérieure ou égale à un nombre p donné .
Écrire une nouvelle fonction Racine de paramètres a et p qui renvoie la valeur de $\sqrt{a}$ ainsi calculée.

Chapitre 2 - CALCUL LITTERAL

1) LES DIFFÉRENTES FORMES D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE

	Forme	Exemple	Remarque
Somme	A+B	$3x^2+5x$	A et B sont l La différence A-B est la somme A+(-B)
Produit	A × B	$(3x-5)(2x-4)$	A et B sont
Carré	A^2	$(3x+2)^2$	
Quotient	$\frac{A}{B}$	$\frac{5x-2}{3x-5}$	

Définition :

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Exemple : Développer, puis réduire et ordonner $A=(3x-5)(2x-4)$

A =

Définition :

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

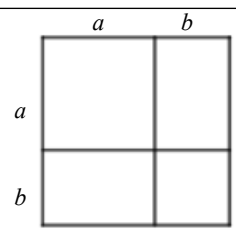
Exemple : B=

Développement →	
$k(a+b)=ka+kb$ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition
← **Factorisation**	

2) PRODUITS

Soit a , b , c et d des réels :

RÈGLE DES SIGNES	• $a\times(-b)=$ • $(-a)\times(-b)=$
PRODUIT NUL	Dire qu'un produit est nul signifie que l'un des facteurs au moins est nul
SIMPLIFICATION	$ac=bc$ et $c\neq 0$ $\Rightarrow$
DISTRIBUTIVITÉ	• $c(a+b)=$ • $(a+b)(c+d)=$
PRODUITS REMARQUABLES	• $(a+b)^2=$ • $(a-b)^2=$ • $(a+b)(a-b)=$



3) ÉCRITURES FRACTIONNAIRES

Soit a , b , c et d des réels avec c et d non nuls :

GÉNÉRALITÉS	$\frac{a}{1}=$; $\frac{0}{c}=$; $\frac{a}{0}$
RÈGLE DES SIGNES	$\frac{-a}{c}=$; $\frac{-a}{-c}=$
SIMPLIFICATION	$\frac{ad}{cd}=$ **Attention :** $\frac{a+d}{c+d}\neq\frac{a}{c}$

ÉGALITÉ	$\frac{a}{c}=0 \Leftrightarrow$
PRODUIT EN CROIX	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow ad=$ $\Leftrightarrow \frac{a}{b}=$ $\Leftrightarrow \frac{d}{c}=$ $\Leftrightarrow a=$ $\Leftrightarrow b=$ $\Leftrightarrow d=$ $\Leftrightarrow c=\frac{ad}{b}$
ADDITION	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=$; $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=$
MULTIPLICATION	$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=$
DIVISION **Diviser, c'est multiplier par l'inverse**	$\frac{1}{\frac{c}{d}}=$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=$ avec $b\neq 0)$; $\frac{a}{\frac{c}{d}}=$; $\frac{\frac{a}{c}}{d}=$

4) PUISSANCES

Soit a et b des réels et p et q des entiers :

DÉFINITION	$a^0=$ $(a>0)$; $a^p=$ (p facteurs , $p\geq 1$) ; $a^1=$ $a^{-p}=$; $a^{-1}=$ $(a\neq 0)$
SIGNE	Pour p pair $(-a)^p=$ et pour p impair $(-a)^p=$
RÈGLES DE CALCUL	Pour a et b non nuls : $a^p\times a^q=$; $\frac{a^p}{a^q}=$; $(a^p)^q=$ $(ab)^p=$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p=$
NOTATION SCIENTIFIQUE	La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a\times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un entier.

5) RACINES CARRÉES

DÉFINITION	Lorsque a est un nombre positif , $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est égal à a . **Attention:** un nombre négatif n'a pas de racine carrée.
RÈGLES DE CALCUL	Pour a et b positif : $\sqrt{a^2}=($; $\sqrt{a^p}=$ (p entier naturel) $\sqrt{ab}=$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=$ ($b\neq 0$)
MISE EN GARDE	• Il n'existe pas de relation simple entre $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ • Si $a<0$ alors $\sqrt{a^2}=$
INÉGALITÉ	Si a et b sont des réels strictement positifs, on a :

Les différentes formes d'une expression algébrique

Ex 2-1 : Somme ou produit

Indiquer pour chaque expression s'il s'agit d'une somme ou d'un produit :

1) $(x-2)(x-3)$

2) $(x-3)^2$

3) $x(x+2)$

4) $2x^2-5$

5) $(x-2)(x-3)+8$

6) $2x^2-5x+6$

Ex 2-2 : Forme développée ou factorisée

Parmi les expressions suivantes, reconnaître les formes développées et les formes factorisées :

1) $(x-7)(x+6)$

2) $(x-2)(x-3)+8$

3) $2x^2-5x+6$

4) $x^3(2-x)$

5) $(x-7)^4$

6) $4x-5$

Ex 2-3 : Développement

Développer, puis réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A=3x(x-5)$

$B=3(2x+2)^2$

$C=(4x-4)(3x-8)$

$D=(x-2)(x+2)$

$E=x(x+5)+8(x-3)$

$F=a+2(a-5)+5(3-2a)$

Ex 2-4 : Factorisation

Factoriser les expressions suivantes :

$A=x(x-1)+2x(x-3)$

$B=x^3-12x^2$

$C=(5x+1)(-2x+3)+x(10x+2)$

$D=3a^3b^2-27a^5b^7$

$E=(x-5)(x+2)-3x(x-5)$

$F=(4x-3)(x+2)+(3-4x)x$

$G=105x^3y^7+45x^3y^6$

Identités remarquables

Ex 2-5 : Développement

Développer et réduire les expressions ci-dessous :

1) $(x-2y)^2$

2) $(2x+y)^2$

3) $(a-b)^2+(2a-5b)^2$

4) $(3x-4y)(3x+4y)$

5) $(\sqrt{2}-\sqrt{7x})(\sqrt{2}+\sqrt{7x})$

6) $\left(\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}\right)^2$

Ex 2-6 : Factorisation

Factoriser les expressions ci-dessous :

1) x^2-4x+4

2) $4y^2-12y+9$

3) $16a^2-80a+100$

4) $5x^2-7y^2$

5) $(x-y)^2-(2x-4y)^2$

6) $x^2-\frac{17}{2}x+\frac{289}{16}$

7) $\left(\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}\right)^2$

Ex 2-7 : Calcul mental

Calculer mentalement :

99^2

102^2

11^2-10^2

38^2-37^2

Ex 2-8 : Défi

Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 8x-16$

Ex 2-9 : Pour aller plus loin

1) Développer $(a+b+c)^2$

2) Développer $(a+b)^3$

Écriture fractionnaire

Ex 2-10 : Forme irréductible

Écrire sous forme irréductible le nombre suivant : $A=\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{7}}$

Ex 2-11 : Quotient unique

Écrire chacune des expressions ci-dessous sous la forme d'un quotient unique :

1) $\frac{4x}{9}+\frac{2x+3}{7}$

2) $\frac{3}{x}+\frac{2x-5}{2}$ ($x\neq 0$)

3) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ ($x\neq 0$)

4) $\frac{4}{x}+\frac{x-2}{3x}$ ($x\neq 0$)

5) $\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+1}$ ($x\neq -1$ et $x\neq 1$)

6) $\frac{2}{x-4}-\frac{x}{2x-8}$ ($x\neq 4$)

7) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x>0$)

8) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (x , y et z non nuls)

Ex 2-12 : Simplification

Simplifier au maximum chaque expression :

1) $\frac{x(2x+1)}{2x(4x+8)}$ ($x\neq 0$ et $x\neq -2$)

2) $\frac{(x-3)^2(4x-5)}{x-3}$ ($x\neq 3$)

3) $\frac{5x^2+9x}{x^2+3x}$ ($x\neq 0$ et $x\neq -3$)

4) $\left(\frac{x(x-1)}{x^2+3x}\right)^2\frac{x+3}{x-1}$ ($x\neq 0$ et $x\neq -3$ et $x\neq 1$)

5) $\frac{\frac{(x+2)^2}{(x-3)^3}}{\frac{(x+2)^3}{x-3}}$ ($x\neq 3$ et $x\neq -2$)

Ex 2-13 : Simplification

Pour tout $x\neq 2$, on pose $A(x)=\frac{3x^3-5x^2-x-2}{x-2}$

1) Développer $(x-2)(3x^2+x+1)$

2) Simplifier $A(x)$

3) Calculer mentalement $A(-3)$

Puissances

Ex 2-14 : Puissance de 2

Écrire les nombres ci-dessous sous la forme 2^k ($k\in\mathbb{Z}$)

1) $\frac{2^7 2^{-3}}{2^8}$

2) $\left(\frac{2^7}{2^{-3}}\right)^4$

3) 1024^{45}

4) $\frac{2^{-8}}{64}$

Ex 2-15 : Puissance de 3

Écrire les nombres ci-dessous sous la forme 3^k ($k\in\mathbb{Z}$)

1) $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

2) $\frac{27^8\times 3^8}{9^5}$

3) $10\times 3^{12}-3^{14}$

Ex 2-16 : Puissance de *a*

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{Z}$.
Écrire les nombres ci-dessous sous la forme a^k ($k\in\mathbb{Z}$)

1) $\left(a^{n+2}\right)^3$

2) $\dfrac{a^5}{\left(a^3\right)^n}$

3) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2n}\times a^2$

4) $\dfrac{\left(a\times a^n\right)^2}{a^{3n}}$

Ex 2-17 : Écriture scientifique

Écrire les nombres ci-dessous sous forme scientifique :

A=0,0452

B=12478

C= $\dfrac{\left(\left(-7\right)^3\times\left(-10\right)^{-8}\right)^5}{\left(-7^2\times 10^4\right)^7}$

Ex 2-18 : Algorithme - Python

Soit $a\in\left]1;+\infty\right[$ et $c\in\mathbb{R}$.

1) Compléter la fonction PuisMin suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie le plus petit entier naturel n vérifiant $a^n>c$.

```
def PuisMin(a,c) :
    n=0
    while ...                :
        n= ...
    return ...
```

2) Quelle est la valeur renvoyée pour $a=3,7$ et $c=30000$

Racines carrées

Ex 2-19 : Simplification

Écrire les nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit entier possible.

1) $\sqrt{32}$

2) $\sqrt{72}$

3) $\sqrt{500}$

4) $\sqrt{147}$

5) $\sqrt{\dfrac{48}{121}}$

6) $\sqrt{\dfrac{99}{25}}$

7) $\sqrt{\dfrac{5}{36}}+3\sqrt{\dfrac{20}{9}}$

8) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\times\sqrt{\dfrac{14}{3}}$

9) $5\sqrt{63}-\sqrt{28}+\sqrt{7}$

10) $3\sqrt{18}+2\sqrt{16}-5\sqrt{81}$

Ex 2-20 : Racine carrée au dénominateur

Écrire les nombres ci-dessous sans racine carrée au dénominateur :

1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$

3) $\frac{3}{5-\sqrt{3}}$

4) $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+1}$

Ex 2-21 : Simplification

Développer et simplifier les expressions ci-dessous :

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $7\sqrt{2}(5\sqrt{2}-9\sqrt{18})$

3) $\sqrt{2}(\sqrt{6}-2)$

4) $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2-10\sqrt{6}}$

5) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$

Ex 2-22 : Démonstration : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Soit $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$.

1) Calculer $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$ et en déduire que $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ (1)

2) En utilisant l'égalité (1), montrer que si $a\neq 0$, $\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ (2)

3) En utilisant les égalités (1) et (2) , montrer que si $b\neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Ex 2-23 : Démonstration : $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$.

En calculant $\left(\sqrt{a+b}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$, montrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Ex 2-24 : Moyenne géométrique et moyenne arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\sqrt{a \times b} \leqslant \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{a \times b}$ et $\frac{a+b}{2}$ sont appelés respectivement moyenne géométrique et moyenne arithmétique de a et b.

Ex 2-25 : Nombres égaux ?

Les nombres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ sont-ils égaux ?

Ex 2-26 : Volume d'un cylindre

Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est donné par $V = \pi r^2 h$.

1) Exprimer h en fonction de V et r.

2) Exprimer r en fonction de V et h.

3) Déterminer le rayon d'un cylindre de hauteur 5 cm et de volume 50 cm^3

Ex 2-27 : Solide lâché

Un solide lâché à une altitude h (en mètres) atteint le sol au bout d'une durée t (en secondes).

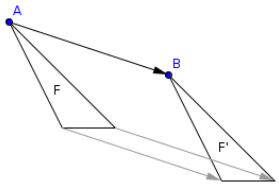
Si on néglige les frottements de l'air, on a $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ où $g \approx 9{,}81 \text{m } s^{-2}$.

1) Exprimer h en fonction de t et g.

2) Le solide a mis 10 s pour toucher le sol . À quelle altitude a-t-il été lâché ?

Chapitre 3 - VECTEURS

1) TRANSLATION



Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B.
La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition :

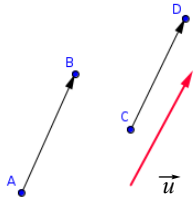
Soit A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant de A vers B .

2) VECTEURS

Définition :

Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B.
Les points A et B, pris dans cet ordre et les points C et D, pris dans cet ordre. représentent le même **vecteur** $\vec{u}$.

Cas particulier : $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul** . On écrit

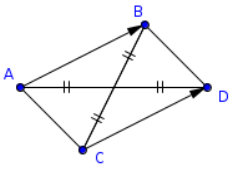


Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur $\vec{u}$ car on peu le tracer en chaque point du plan.

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

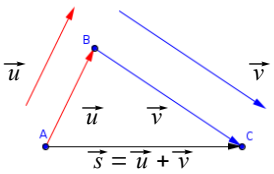
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont
  On note $\|\overrightarrow{AB}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{s}$ résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur $\vec{u}$ et t' de vecteur $\vec{v}$. On écrit :

$$\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$$



Remarque :
La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

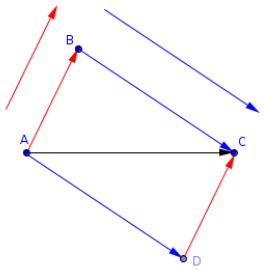
Propriété (relation de Chasles) :

Soit A, B et C trois points du plan . On a :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} .$$

Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B , C et D quatre points du plan.
Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



Preuve :

Remarque :
Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs . On a :

- $\vec{u}+\vec{v}=$
- $\vec{u}+\vec{0}=$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=$
- si $\vec{u}=\vec{v}$ et $\vec{w}=\vec{t}$ alors

Définition :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Application :
Soit trois points A, B et I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment [AB].
-
-
-
-
-

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

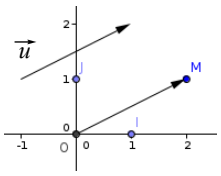
Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J) , pas nécessairement orthonormé.

Définition :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont

Remarque :
Puisque l'origine O a pour coordonnées $(0;0)$, alors pour tout point M du plan de coordonnées $(x;y)$,
Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple :

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur . Pour tous les points A et B tels que $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égales.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}$ = $\vec{u}$

Définition et propriété :

Une base des vecteurs du plan est un couple ($\vec{i}$, $\vec{j}$) formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction.
Une base est **orthonormée** dans le cas où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1 unité de longueur.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $(x;y)$ tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$)

Remarque : En notant $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$:

- ($\vec{i}$, $\vec{j}$) est une base des vecteurs du plan.
- On parle alors de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, plutôt que de repère (O,I,J)

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

- $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées
- $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$. $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A-x_B \\ y_A-y_B \end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de $\vec{u}$.
- Soit A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
  Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}$
  On a bien $(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_C-x_A$ et $(y_B-y_A)+(y_C-y_B)=y_C-y_A$.
- Puisque $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$, alors $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+(-x') \\ y+(-y') \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormée.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est

Immédiat en introduisant les points A et B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et en utilisant la formule permettant de calculer la longueur AB.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) et k un réel .
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

-
-

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x'=kx$ et $y'=ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

Propriété : Norme du vecteur $k\vec{u}$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, on a :

Preuve :

On se place dans une base orthonormée. On a $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans une base orthonormée.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $xy'-x'y$.
Ce nombre se note det($\vec{u}$, $\vec{v}$)= $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$

Propriété : Condition analytique de colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si det($\vec{u}$, $\vec{v}$)=0.

Preuve :

- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le résultat est immédiat.
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

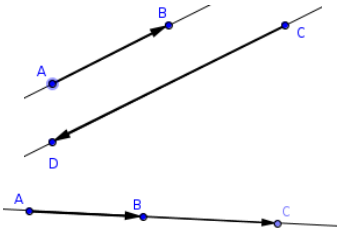
- **Réciproquement**, on suppose que det($\vec{u}$, $\vec{v}$)=0.
  - Si $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{v}\neq 0$, alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple $x'\neq 0$.

  On a alors $y=\frac{x}{x'}y'$, c'est à dire $y=ky'$ où $k=\frac{x}{x'}$.
  Ainsi $\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx';ky')$ et $\vec{u}=k\vec{v}$.
  La démonstration est identique si $y'\neq 0$.

Propriétés :

Soit A , B , C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Trois points A,B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

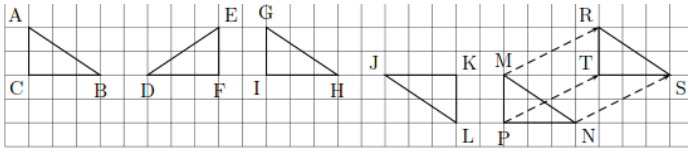


Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si

Translations et vecteurs

Ex 3-1 : Reconnaître une transformation



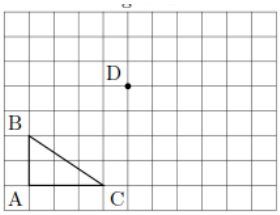
1) Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une transformation. Laquelle?

2) Le triangle JKL est l'image du triangle GIH par une transformation. Laquelle?

3) Le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation. Laquelle? Caractériser cette transformation.

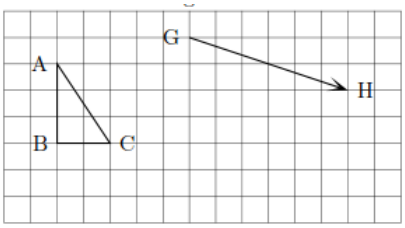
Ex 3-2 : Image d'un triangle

On translate le triangle ABC de façon à amener le point A sur le point D.
Tracer DEF l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

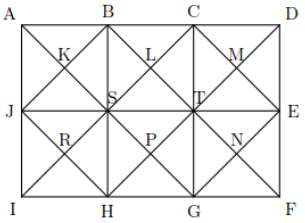


Ex 3-3 : Image d'un triangle

Tracer le triangle DEF, image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$.



Ex 3-4 : Image d'une figure



1) Quelle est l'image du triangle AJS par la translation de vecteur $\overrightarrow{AT}$?

2) Quelle est l'image du triangle STG par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$?

3) Quelle est l'image du rectangle BDES par la translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$?

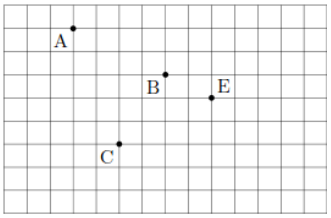
4) Quelle est l'image du triangle TNG par la translation de $\overrightarrow{SB}$?

Égalité de deux vecteurs

Ex 3-5 : Caractériser l'égalité de deux vecteurs

1) Tracer le point D image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC (le tracer) ?



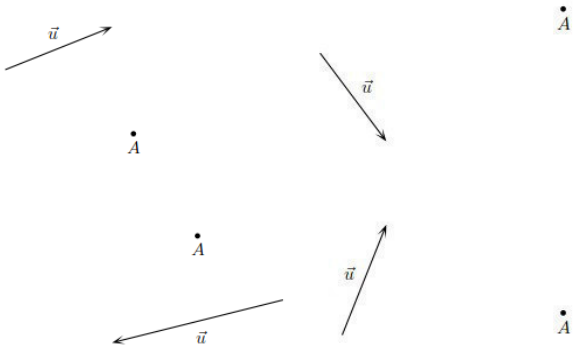
3) Que sait-on alors pour les segments [AD] et [BC] ?

4) Tracer le point F image du point E par la même translation.

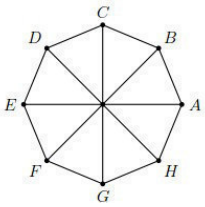
5) Que constate-t-on pour le milieu du segment [AF] et le milieu du segment [BE] ?

Ex 3-6 : Construction à la règle et au compas

Construire chaque fois, au compas, le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$



Ex 3-7 : Vecteurs égaux et opposés



ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O.

1) Compléter le tableau suivant par oui ou par non.

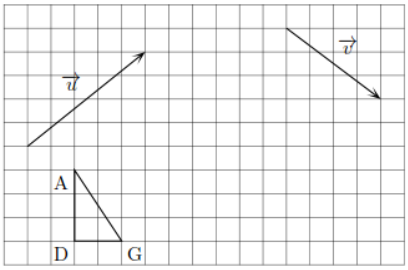
Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même longueur				
sont égaux				

2) Indiquer chaque fois si l'affirmation est vraie ou fausse.

- $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux :
- $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés :
- $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés :
- $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés :

Somme de vecteurs

Ex 3-8 : Découvrir la somme de vecteurs et la relation de Chasles



1) L'image du triangle ADG par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le triangle BEH. Le tracer

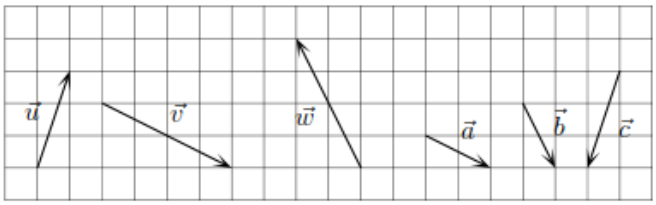
2) L'image du triangle BEH par la translation de vecteur $\vec{v}$ est le triangle CFI. Le tracer.

3) Tracer le vecteur $\vec{w}$ de la translation qui transforme directement ADG en CFI.
Ce vecteur $\vec{w}$ est **la somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

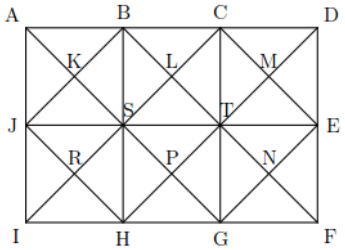
4) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On constate alors ce qu'on appelle **la relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ex 3-9 : Construire le vecteur somme

Placer un point sur le quadrillage, et à partir de ce point , construire les sommes : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{a}$, $\vec{w}+\vec{b}$, $\vec{u}+\vec{c}$
(Prendre un nouveau point à chaque fois)



Ex 3-10 : Compléter



$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BH}=$ … $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=$ …

$\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HT}=$ …

$\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{S...}=\overrightarrow{H...}$

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{C...}=\overrightarrow{D...}$

$\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{S...}=\overrightarrow{J...}$ $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{G...}=\overrightarrow{F...}$

Ex 3-11 : Découvrir la construction du parallélogramme

1) Tracer un parallélogramme ABCD.

2) Compléter :

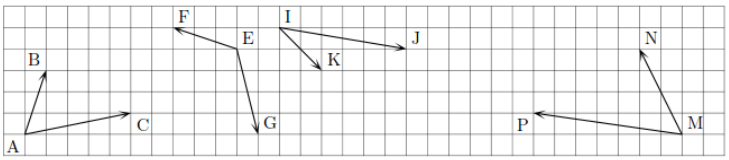
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B...}=\overrightarrow{A...}$$

Cette construction est une deuxième méthode de construction de la somme de deux vecteurs, c'est la construction du parallélogramme.

Ex 3-12 : Construction du parallélogramme

En utilisant la construction du parallélogramme, construire les points D, H, L et R tels que :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MR}$

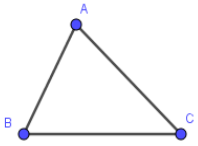


Ex 3-13 : Construction à la règle et au compas

Construire à la règle et au compas
les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$



Ex 3-14 : Démonstration

1) Sur une feuille non quadrillée, tracer un parallélogramme ABCD de centre O.

2) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}$

3) Quelle est la nature des quadrilatères OBEC et OCFD ? Justifier.

4) Que peut-on dire du point C par rapport au segment [EF] ?
Le démontrer.

Ex 3-15 : Manipuler des expressions de vecteurs

Soit A, B , C , D , E , F et G six points du plan.
1) Simplifier les expressions :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=$ … $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=$ …

$\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{BF}=$ …

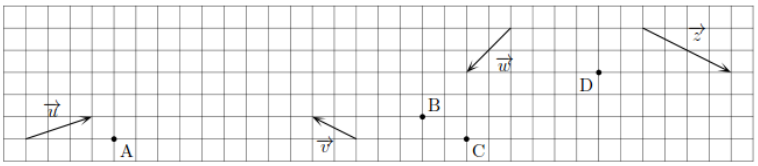
2) En choisissant des points judicieux, compléter :

$\overrightarrow{BE}$ + … = $\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{BE}$ + $\overrightarrow{...F}$ = $\overrightarrow{B...}$

$\overrightarrow{B...}$ + $\overrightarrow{...A}$ = $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BE}$ - $\overrightarrow{G...}$ = $\overrightarrow{B...}$

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Ex 3-16 : Construction



1) À partir du point A, tracer le vecteur $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$

2) Tracer chaque fois le vecteur indiqué à partir du point indiqué.
a) Le vecteur $3\vec{v}$ à partir du point B
b) Le vecteur $-2\vec{w}$ à partir du point C
c) Le vecteur $1,5\vec{z}$ à partir du point D

Ex 3-17 :

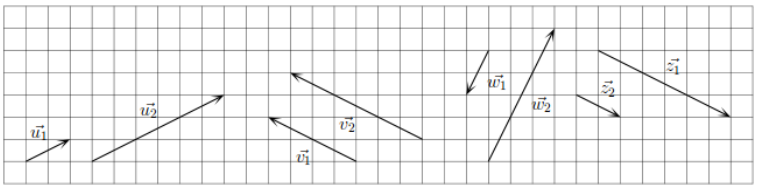
Déterminer chaque fois le nombre indiqué.

1) le nombre a tel que $a\vec{u}_1=\vec{u}_2$

2) le nombre b tel que $b\vec{v}_1=\vec{v}_2$

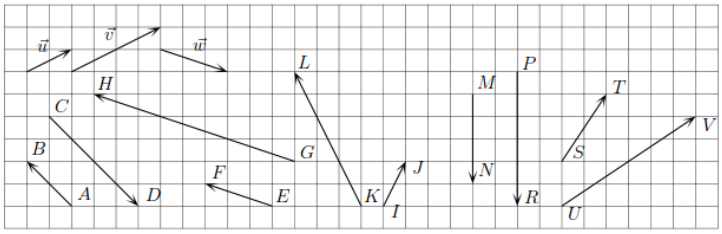
3) le nombre c tel que $c\vec{w}_1=\vec{w}_2$

4) le nombre d tel que $d\vec{z}_1=\vec{z}_2$



Vecteurs colinéaires

Ex 3-18 : Colinéaires ou non ?



1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Si la réponse est oui, donner le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ou le nombre k' tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

2) Même question pour les vecteurs :

a) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$

b) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$

c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PR}$

d) $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UV}$

Ex 3-19 : Droites parallèles ?

1) Tracer un triangle ABC.
Placer le milieu I de [AB] et le point D vérifiant $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $\overrightarrow{IC}=-0,5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

4) Que peut-on dire des droites (IC) et (BD) ?

Ex 3-20 : Droites parallèles ?

Soit un parallélogramme ABCD et les points E et F définis par
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
1) Faire une figure.

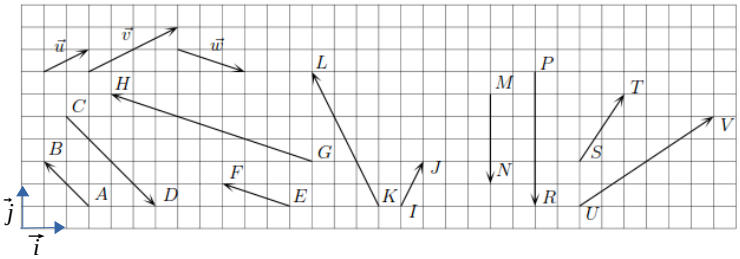
2) Montrer que $\overrightarrow{FC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

3) Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ?

Coordonnées de vecteurs

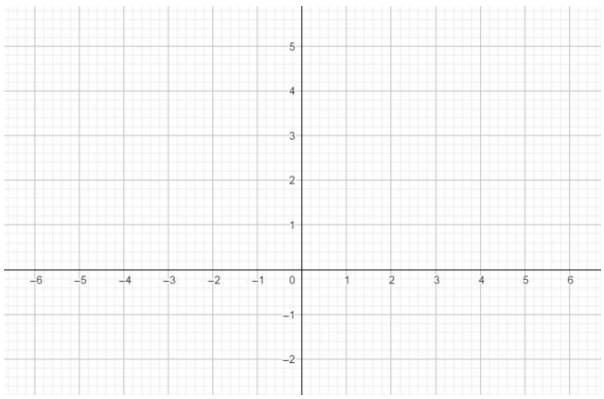
Ex 3-21 : Déterminer les coordonnées

Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), indiquer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PR}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{MN}$.



Ex 3-22 : Tracer un vecteur connaissant ses coordonnées
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix},\ \vec{t}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{s}=3\vec{i}-5\vec{j}$$

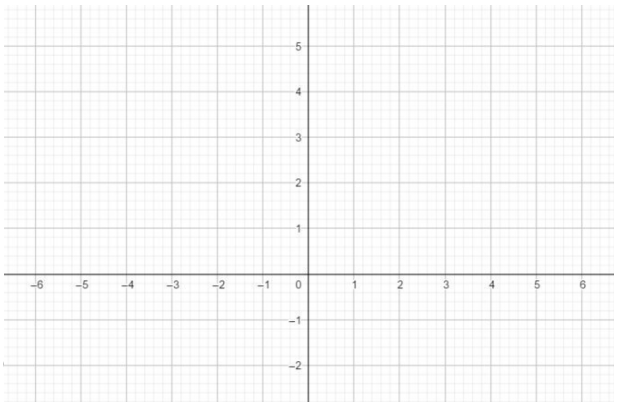


Coordonnées de vecteurs et coordonnées de points

Ex 3-23 : Nature d'un quadrilatère

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, placer les points A(−3;2), B(7;0), C(5;−4), D(−5;−2), puis tracer le quadrilatère ABCD.

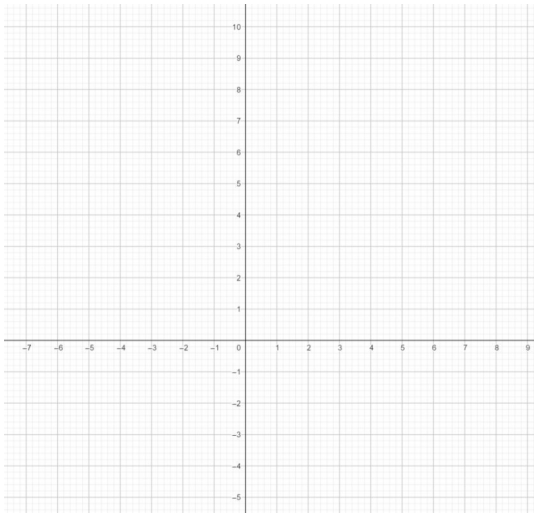
2)



3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

Ex 3-24 : Déterminer les coordonnées d'un point

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et placer les points A(6;2), B(8;−4), C(−4;3).

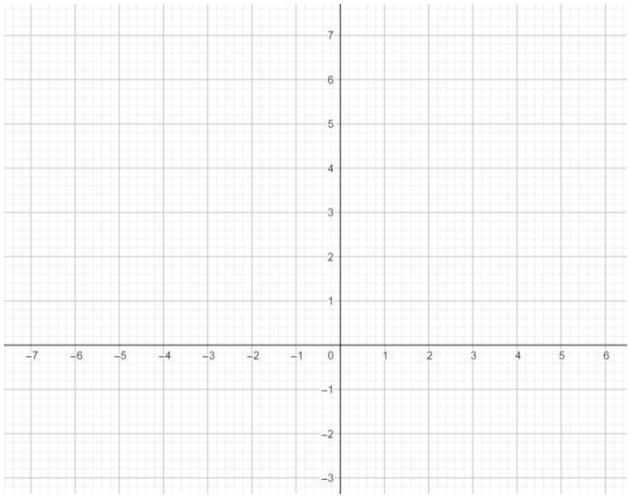


2) Placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Tracer ce parallélogramme.
3) Calculer les coordonnées du point D.

Ex 3-25 : Déterminer les coordonnées d'un point

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(−6;2), C(3;6) et E(2;−3), et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$.

1) Tracer un repère, et placer les points A, C, E.



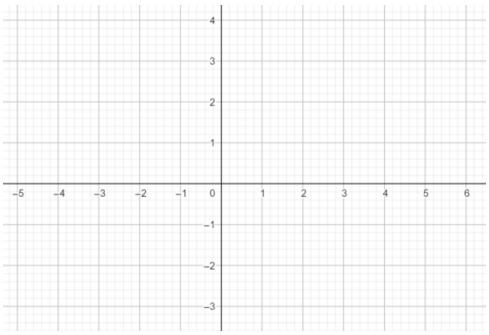
2) Placer les points B, D, F tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{w}$.

3) Calculer les coordonnées des points B, D, F .

Coordonnées de la somme de vecteurs

Ex 3-26 : Déterminer des coordonnées

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points A(−2;−1), B(−4;3), C(1;−3), D(6;−2), E(3;−1)



2) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. Tracer ces deux vecteurs.

3) Construire le point F tel que $\overrightarrow{EF}=\vec{u}+\vec{v}$

4) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$.

5) Calculer les coordonnées du point F.

Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre

Ex 3-27 : Calculs et coordonnées

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

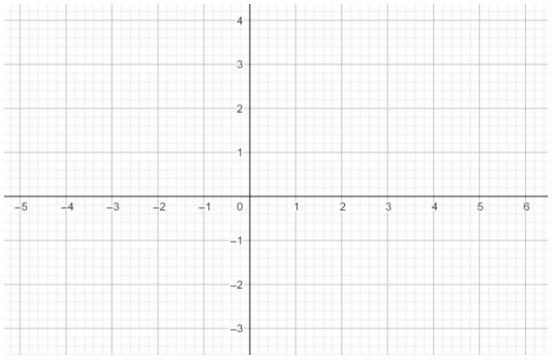
$2\vec{u}$ $3\vec{v}$ $-2\vec{w}$

$\vec{u}+\vec{v}$ $\vec{v}-\vec{w}$ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

$-3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}$ $5\vec{v}-3\vec{w}$

Ex 3-28 : Vecteurs colinéaires

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points A(1;2), B(5;1), C(6;−3), D(−2;−1).



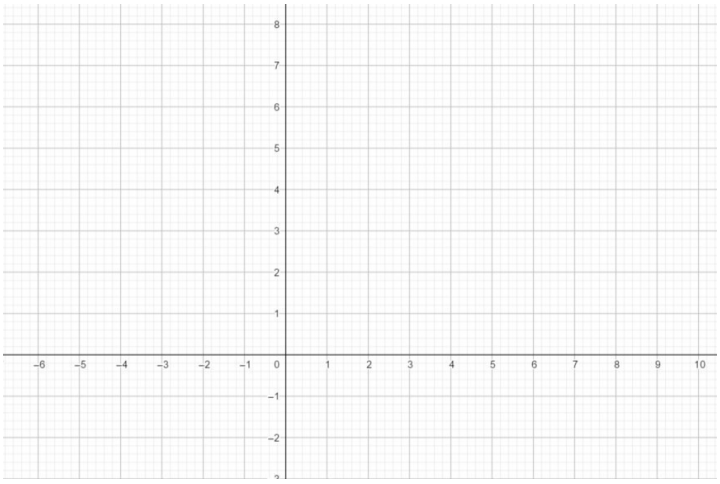
2) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils colinéaires ? Justifier par un calcul.

4) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

Ex 3-29 : Points alignés

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points A(1;2), B(4;4), C(10;8), D(−4;−1).



2) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

4) Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

Ex 3-30 : Position relative de deux droites

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points A(2,-8), B(-5,6), C(-16,23), D(5,-19), E(-4;4), F(52;12), G(26;19), H(13;20,5) et I(0;5)

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

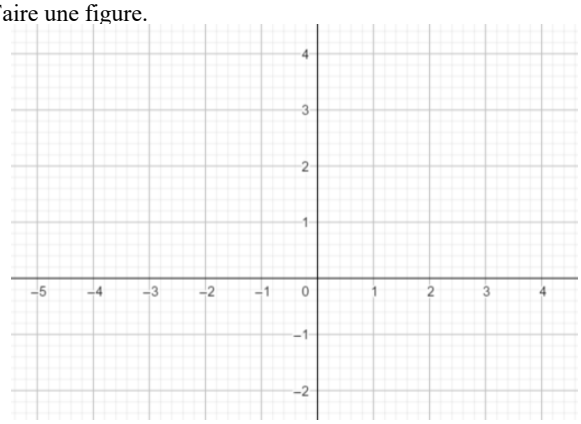
2) Les points A, B et E sont-ils alignés ?

3) Les droites (FG) et (HI) sont-elles parallèles ?

Sur l'ensemble du chapitre

Ex 3-31 : Symétrie centrale

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points , A(2;3), B(3;-1) et C(-1;1) .
La symétrie centrale de centre C transforme A en A' et B en B'.
1) Faire une figure.



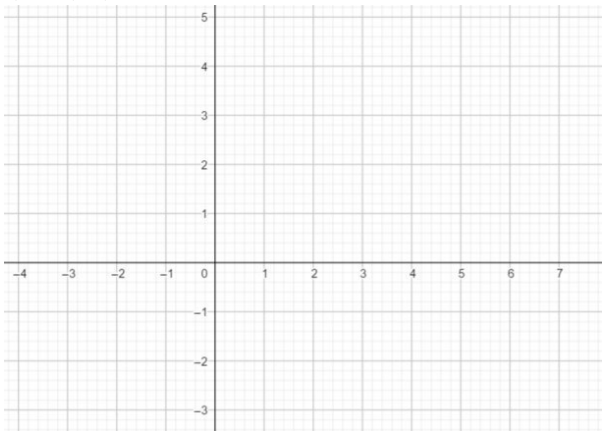
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Calculer les coordonnées des points A' et B'.

4) Que peut-on dire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$

Ex 3-32 : Homothétie

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points , A(4;3), B(6;1), C(3;-1), D(1;1) et F(4;2).



Les points A', B', C' et D' sont les images respectives des points A, B, C et D par l'homothétie de centre F et de rapport $\lambda = 1,5$.
1) Faire une figure.
2) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{D'C'}$.

4) En déduire la nature du quadrilatère A'B'C'D'

Ex 3-33 : Vecteurs colinéaires et déterminant

Soit un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Dire dans chaque cas si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$

2) Déterminer k pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}k-1\\k^2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\k+1\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}k+1\\k\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k-1\\-k\end{pmatrix}$

Ex 3-34 : Quelques équations

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2+x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4+y\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-4-x\end{pmatrix}$ où x et y sont des réels.

1) Déterminer x et y pour que :

a) $\vec{u}=\vec{v}$

b) $3\vec{u}-5\vec{v}=\vec{0}$

2) Pour quelle valeur de x , $\vec{w}$ est-il colinéaire avec $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$?

3) On considère les points A(-3;3), B(1;-2+x) et C(5;4)
Déterminer le réel x pour que les points A, B et C soient alignés.

Algorithme – Python

Ex 3-35 : Comprendre un programme

On considère le programme écrit en Python ci-dessous.

```
def coord(xM,yM,xN,yN):
    x=xM-xN
    y=yM-yN
    return(x,y)

AB=[coord(1,-3,3,4)]
CD=[coord(-1,3,-3,5)]
if (AB==CD):
    print('les vecteurs sont égaux')
else:
    print('les vecteurs ne sont pas égaux')
```

1) De quel type sont les variables AB et CD ?

2) Qu'affiche ce programme ?

3) Modifier la ligne AB=[coord(....,....,3,4)] pour que le programme affiche 'les vecteurs sont égaux'.

Ex 3-36 : Vecteurs colinéaires – droites sécantes

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

1) Rappeler la condition analytique de colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vue dans le cours.

2) Écrire un algorithme déterminant la colinéarité ou non de deux vecteurs . Les données seront les coordonnées de chacun des deux vecteurs.

3) Soit deux droites (AB) et (CD) , toutes deux déterminées par deux points distincts. Compléter le programme ci-dessous pour déterminer si ces deux droites sont sécantes.
Les données seront les coordonnées de quatre points.

```
def paralleles(xu,yu,xv,yv):
    if (xu*yv-xv*yu==0):
        print("les droites ........................ ")
    else:
        print("les droites ........................ ")

xA,yA=float(input("xA=")),float(input("yA="))
xB,yB=float(input("xB=")),float(input("yB="))
xC,yC=float(input("xC=")),float(input("yC="))
xD,yD=float(input("xD=")),float(input("yD="))
    paralleles(........, ........, ........, ........)
```

Chapitre 4 - FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1) VOCABULAIRE DES FONCTIONS

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombre.
On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.
On note $f : x \longmapsto f(x)$(lire : « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »)

Vocabulaire :
- $f(x)$ est l'**image** de x **(lire : " f *de* x ").**
- x est un **antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :
- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable.
  (On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple : Sur l'intervalle [-2 ; 2], on considère la fonction $f : x \longmapsto 3x-1$

Remarques :
- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
- Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) FONCTIONS AFFINES

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 5x-2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si on dit que la fonction est **linéaire.**
- Si la fonction est du type $f : x \longmapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

Propriété :

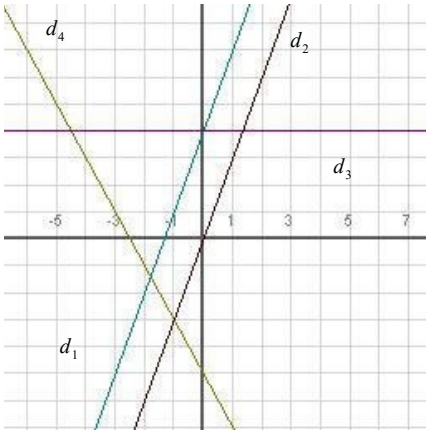
La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

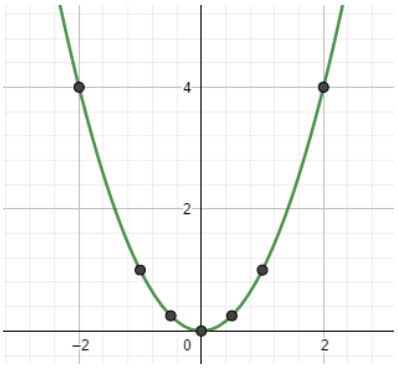


Exemples :
- La fonction $x \longmapsto 3x+4$ est représentée par la droite
- La fonction $x \longmapsto 3x$ est représentée par la droite
- La fonction $x \longmapsto -2x-5$ est représentée par la droite
- La fonction $x \longmapsto 4$ est représentée par la droite

3) LA FONCTION CARRÉ

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carré.**



Pour tracer la courbe représentative d'une fonction de référence, on établit un tableau de valeurs, puis on place les points correspondant s dans un repère orthogonal (orthonormé de préférence)

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y=x^2$.

Le point $O(0;0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Remarque :
Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. La parabole est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

4) LA FONCTION INVERSE

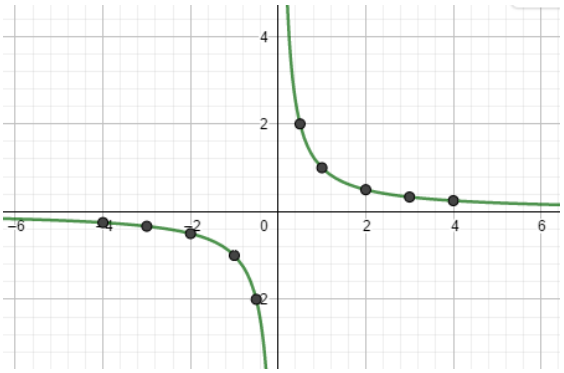
Définition :

La fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x)=\frac{1}{x}$	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y=\frac{1}{x}$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Remarques :

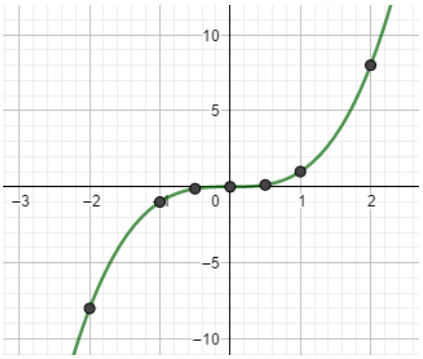
- La fonction inverse n'est pas définie en 0 . Ce qui explique que l'hyperbole est composée de deux branches distinctes.
- Les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe . Ce qui explique que l'hyperbole est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$ et au-dessus sur $]0;+\infty[$

5) LA FONCTION CUBE

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son cube x^3 , est appelée **fonction cube.**

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^3$	-64	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27	64



Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentant la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Remarque : Les nombres x et x^3 sont de même signe . Ce qui explique que la courbe représentant la fonction cube au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$ et au-dessus sur $]0;+\infty[$

6) LA FONCTION RACINE CARRÉE

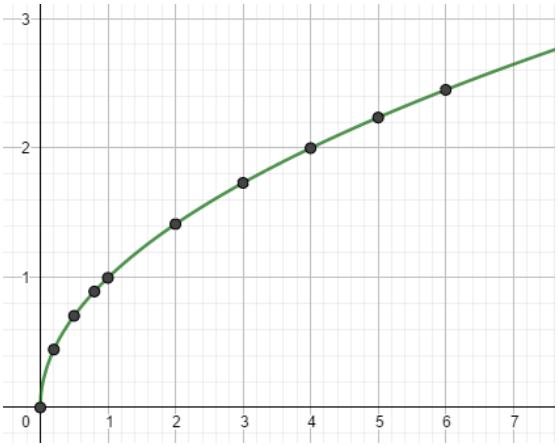
Définition :

La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée.**

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

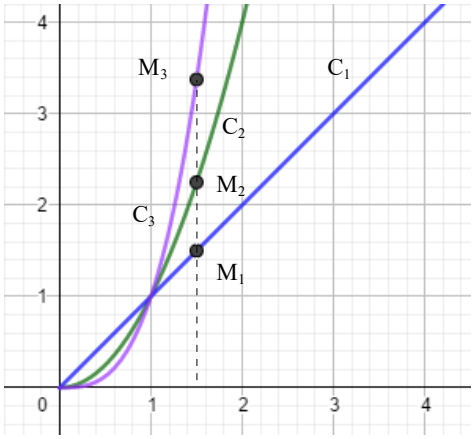
Remarque : Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Ce qui explique que la courbe représentant la fonction racine carrée est dans la partie du repère où abscisses et ordonnées sont positives.



7) POSITIONS RELATIVES

On note respectivement C_1 , C_2 et C_3 les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \longmapsto x$, $f_2 : x \longmapsto x^2$ et $f_3 : x \longmapsto x^3$.



Les points de cordonnées (0;0) et (1;1) sont communs aux trois courbes

Propriété :

- Pour tout $x \in [0;1]$, on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
Conséquence graphique sur [0;1] : C_1 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_3

- Pour tout $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$
Conséquence graphique sur [1;+ ∞ [: C_3 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_1

Preuve :
Soit un réel $x \geqslant 0$.
On considère les points $M_1(x;x)$, $M_2(x;x^2)$ et $M_3(x;x^3)$

- Sur [0;1] , on a :

- Sur $[1;+\infty[$ **, on a :**

Vocabulaire des fonctions

Ex 4-1 : Restituer les notions du cours

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Traduire chaque égalité par une phrase utilisant le mot indiqué entre parenthèse.

1) $f(3)=4$ (image)

2) $f(-5)=4$ (antécédent)

3) $f(2)=0$ et $f(7)=0$ (antécédent)

Ex 4-2 : Restituer les notions du cours

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x , associe la somme de son carré et de son triple.

1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

2) Calculer l'image de -1 .

3) Déterminer les antécédents de 0.

Ex 4-3 : Algorithme – Python

Compléter en dessous de chaque programme par une formule en fonction de x .

1 2 3 4	x=float(input("x= ")) x=-5*x x=x+2/7 print(x)	1 2 3 4	x=float(input("x= ")) x=x-3 x=x**3 print(x)
	$f(x)=$ . . .		$f(x)=$ . . .

Ex 4-4 : Ensemble de définition

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{5}{2-x}$

1) Compléter le tableau de valeurs . Si c'est nécessaire, arrondir les résultats au dixième près.

x	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7
$f(x)$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

2) Quelle image ne peut-on pas calculer ? Pourquoi ?

3) Parmi les ensembles suivants, lesquels conviennent comme ensemble de définition de la fonction f ?

$[0;5]$, $[2;10]$, $]2;10]$, $\mathbb{R}$, $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

Ex 4-5 : Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer le plus grand ensemble de définition de f :

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

c) $f(x)=-\dfrac{1}{3}(x-5)^2$

d) $f(x)=\sqrt{x-3}$

e) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

f) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x-3}$

g) $f(x)=\dfrac{x}{5}-\sqrt{x+2}$

Fonctions affines

Ex 4-6 : Affines ou non ?

Des fonctions sont définies par les égalités ci-dessous :

$$f_1(x)=7x-5 \;;\; f_2(x)=2x^2-5 \;;\; f_3(x)=-7x \;;\; f_4(x)=\frac{2}{x-5}$$

$$f_5(x)=8-2x \;;\; f_6(x)=0,001x \;;\; f_7(x)=-\pi+\pi x$$

Compléter le tableau :
- pour les deux premières questions, indiquer O (oui) ou N (non);
- pour les trois questions suivantes, cocher la case concernée

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
La fonction est affine.							
La fonction est linéaire.							
Sa représentation graphique est une droite.							
Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.							
Sa représentation graphique n'est pas une droite.							

Ex 4-7 : Coefficient directeur positif

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$.

1) Calculer l'image de -2 par la fonction f .

2) Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f .

3) Tracer la représentation graphique de f dans un repère.
Quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite d ?

Ex 4-8 : Coefficient directeur sous forme de fraction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

1) Calculer l'image de -3 par la fonction f .

2) Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f .

3) Tracer la représentation graphique de f dans un repère.
Quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite d ?

Ex 4-9 : Coefficient directeur négatif et ordonnées à l'origine sous forme de fraction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x+\frac{2}{5}$.

1) Calculer l'image de 1 par la fonction f .

2) Déterminer l'antécédent de 0 par la fonction f .

3) Tracer la représentation graphique de f dans un repère.
Quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite d ?

La fonction carré

Ex 4-10 : Vrai ou faux

1) La fonction carré n'est définie que sur $]-\infty;0]$.

2) L'image par la fonction carré de 1 est -1.

3) La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}^+$.

4) La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ex 4-11 : Quelques calculs

1) Calculer l'image par la fonction carré de chacun des nombres suivants :

a) $1+\sqrt{2}$ b) 1,1

c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ d) $1-\sqrt{5}$

e) $(-\sqrt{5})^2$

2) Parmi les nombres suivants, lesquels sont des antécédents de 5 par la fonction carré ?

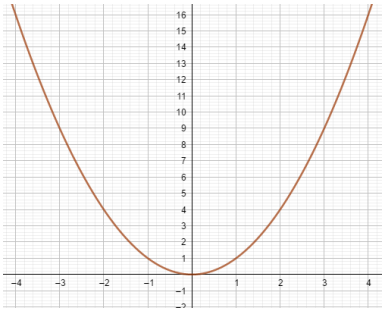
a) $\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $\sqrt{25}$ d) $\sqrt{5}^2$ e) $\sqrt{(-5)^2}$ f) $(-\sqrt{5})^2$

3) Dire si les points suivants appartiennent à la courbe représentative de la fonction carré :

A(-1;1) B(0;0) C(1;1) D($\sqrt{3}$;3) E(- $\sqrt{3}$;3) F(3 ; $\sqrt{3}$)

Ex 4-12 : Utiliser la courbe de la fonction carré

Utiliser la parabole représentant la fonction carrée pour répondre aux questions ci-dessous :



1) Comparer :

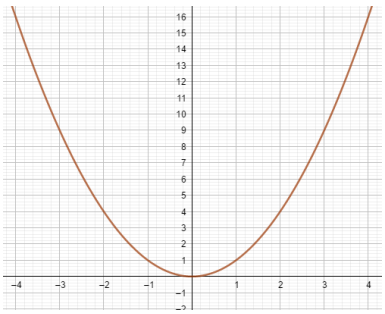
a) $(-2)^2$ 3^2

b) $2,5^2$ $3,2^2$

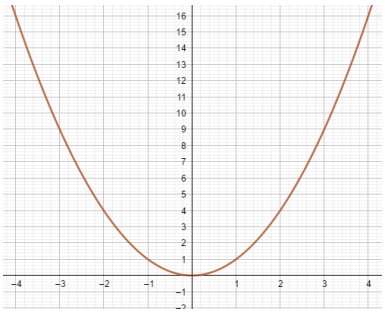
c) $(-1,5)^2$ $(-3)^2$

2) Quel renseignement sur x^2 peut-on déduire de l'information suivante ?

a) $x \leqslant -2$



b) $x>3$



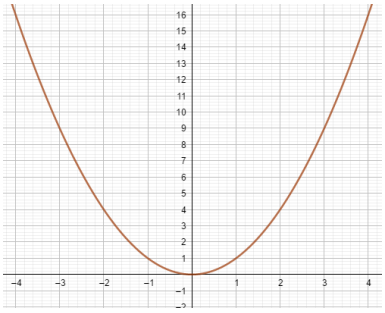
c) $-4<x<2$

d) $0,1<x<0,2$

3) Soit x , y et z trois réels vérifiant $x<y<z<0$.

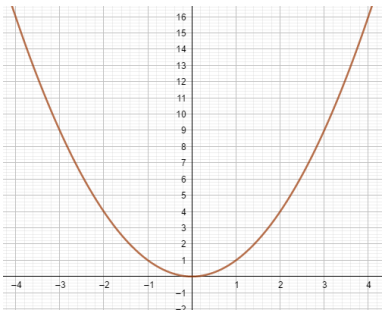
Classer x^2 , y^2 et z^2 .

4) Déterminer les réels x vérifiant :



a) $x^2<3$

b) $x^2 \leqslant -1$



c) $x^2>16$

d) $2<x^2 \leqslant 16$

La fonction inverse

Ex 4-13 : Images, antécédents

Répondre aux questions ci-dessous en donnant les valeurs exactes.
1) Par la fonction inverse, quelle est l'image de :

a) 3 b) $\frac{3}{4}$ c) -10 d) $-0,5$

e) 10^7 f) 10^{-3} g) 5^{-2}

2) Par la fonction inverse, un seul nombre n'a pas d'image . Le quel ?

3) Par la fonction inverse, quel est l'antécédent de :

a) 3 b) $\frac{3}{4}$ c) -10 d) $-0,5$

e) 10^7 f) 10^{-3} g) 5^{-2}

4) Par la fonction inverse, un seul nombre n'a pas d'antécédent. Lequel ?

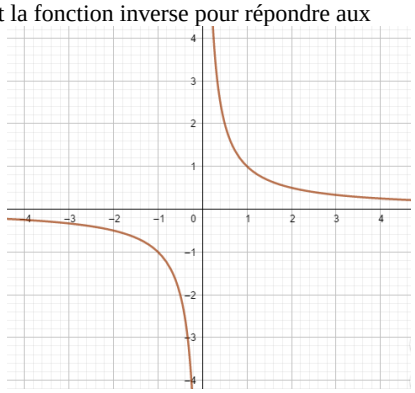
Ex 4-14 : Points sur courbe

Dire si les points suivants appartiennent à la courbe représentative de la fonction inverse :

$A(-1;-1)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$ $D(2;0,2)$ $E\left(-6;-\frac{1}{6}\right)$ $F(0,1;10)$

Ex 4-15 : Utiliser la courbe de la fonction inverse

Utiliser l'hyperbole représentant la fonction inverse pour répondre aux questions ci-dessous :



1) Comparer :

a) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{-4}$ $\frac{1}{-3}$

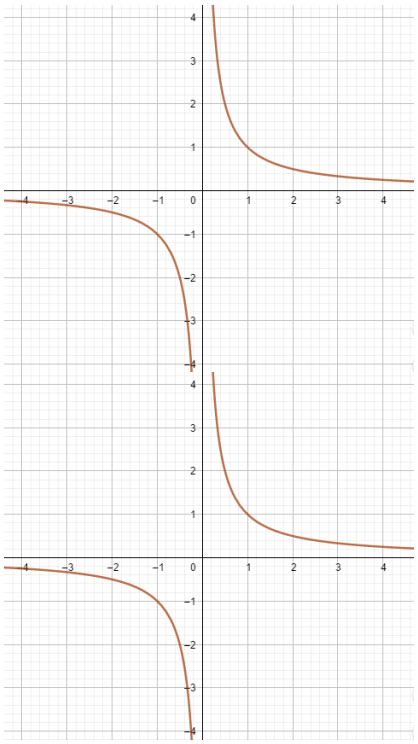
c) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{-3}$

2) Indiquer le nombre de solutions de chacune des équations ci-dessous :

a) $\frac{1}{x}=5$ b) $\frac{1}{x}=-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{x}=2,7$ d) $\frac{1}{x}=0$

Résoudre par le calcul chacune des équations précédentes.

3) Déterminer les réels x vérifiant :



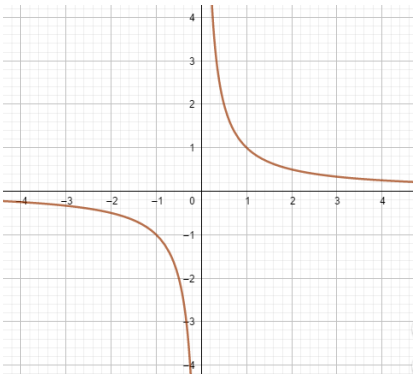
a) $1<\frac{1}{x}<4$

b) $5\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 3$

c) $\frac{1}{x}\leqslant 3$

d) $\frac{1}{x}>1$

e) $\frac{1}{x}\leqslant -4$



La fonction cube

Ex 4-16 : Quelques calculs

1) Calculer l'image par la fonction cube de chacun des nombres suivants :

a) -1 b) -10 c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{3}{2}$

2) Déterminer les antécédents des nombres ci-dessous par la fonction cube :

a) -1 b) 8 c) 125 d) 27

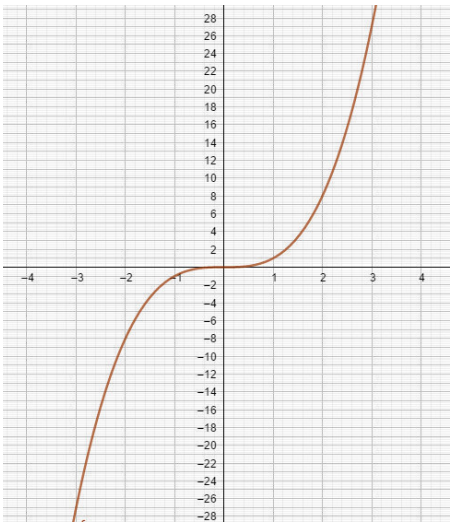
e) 1000 f) 10^9 g) 10^{-9}

3) Dire si les points suivants appartiennent à la courbe représentative de la fonction cube :

A(-1;1) B(0;0) C(-2;8) D($\sqrt{3}$;3$\sqrt{3}$) E(-1;-1) F$\left(10^2;10^6\right)$

Ex 4-17 : Utiliser la courbe de la fonction cube

Utiliser la courbe représentant la fonction cube pour répondre aux questions ci-dessous :



1) Comparer :

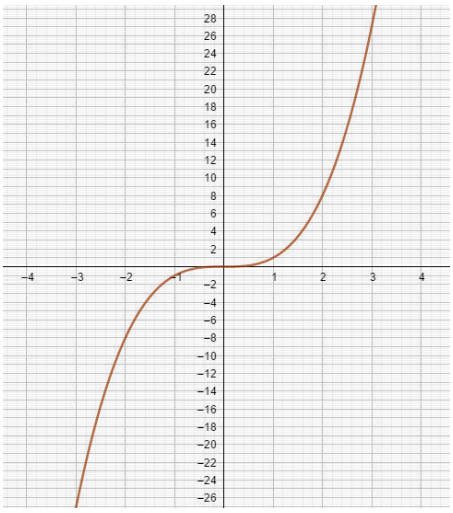
a) $(-3)^3$ $(-4)^3$

b) 2^3 $0,5^3$

c) $(-2)^3$ 3^3

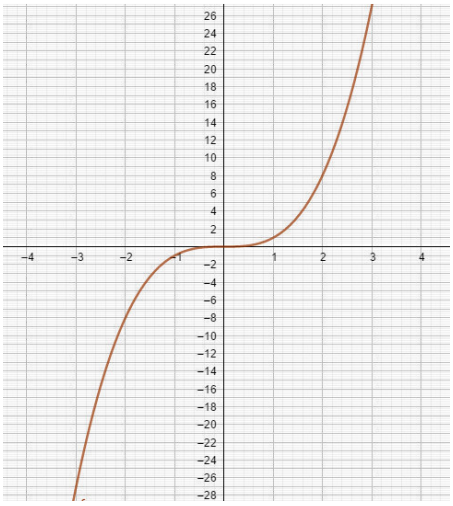
2) Quel renseignement sur x^3 peut-on déduire de l'information suivante ?

a) $x \leqslant -2$



b) $x > 3$

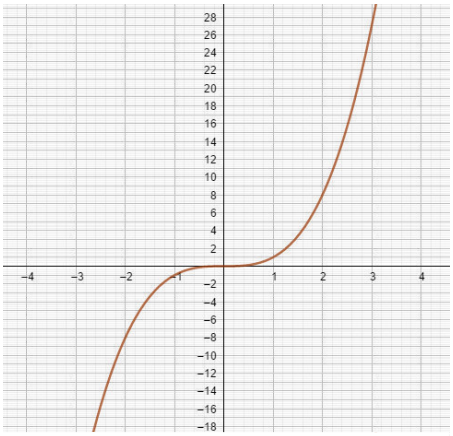
c) $-4 < x < 2$



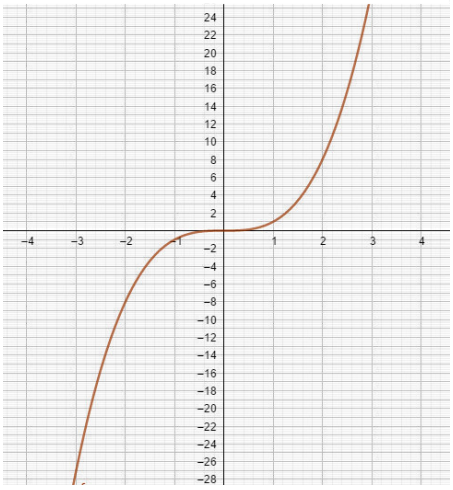
d) $1 \leqslant x \leqslant 3$

3) Déterminer les réels x tels que :

a) $-1 \leqslant x^3 \leqslant 27$



b) $-8 < x^3 < 0,125$



Ex 4-18 : Calculatrice : tabulation

Un artiste souhaite réaliser une boule en alliage métallique . Il a pour cela acheté 5 m^3 de métal qu'il fera fondre puis mouler par un métallurgiste. On se propose de déterminer le rayon maximum r de la boule.

Rappel du volume d'une boule de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

1) Justifier que l'équation à résoudre équivaut à $r^3 = \frac{15}{4\pi}$

2) Donner l'arrondi au millième de $\frac{15}{4\pi}$

3) Avec la calculatrice, tabuler la fonction cube de 0 à 2 avec un pas de 0,1.

4) En modifiant l'intervalle et le pas, donner l'arrondi au centième de r .

La fonction racine carrée

Ex 4-19 : Vrai ou faux – restituer les notions du cours

1) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) L'image du réel -3 par la fonction racine carrée est 3.

4) L'image du réel -3^2 par la fonction racine carrée est 3.

5) La courbe représentative C_f de la fonction racine carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

6) A(4;2) appartient à C_f .

7) B(-1;1) appartient à C_f .

8) C(2;1,4) appartient à C_f .

9) Tout réel k admet un unique antécédent par la fonction racine carrée.

Ex 4-20 : QCM – restituer les notions du cours

Parmi les réels ci-dessous lesquels sont des antécédents de 9 par la fonction racine carrée ?

a) -81 b) $\sqrt{9}$ c) 9 d) 81 e) $\sqrt{81}$ f) -9 g) 3 h) -3

Ex 4-21 : Images

Calculer l'image de chaque nombre par la fonction racine carrée :

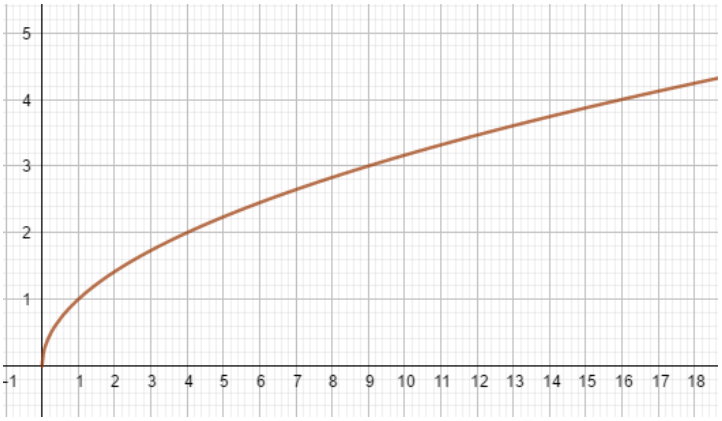
a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{121}{81}$

e) $\frac{10^8}{4}$

Ex 4-22 : Utiliser la courbe de la fonction racine carrée

Utiliser la courbe représentant la fonction racine carrée pour répondre aux questions ci-dessous :



1) Comparer :

a) $\sqrt{12}$ $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$

2) Quel renseignement sur $\sqrt{x}$ peut-on déduire de l'information suivante ?

a) $x<1$ b) $x>9$

c) $1\leqslant x\leqslant 9$ d) $x\leqslant 16$

3) Déterminer les réels x tels que :

a) $2<\sqrt{x}<3$

b) $\sqrt{x}\leqslant 16$

c) $\sqrt{x}>1$

Ex 4-23 : Algorithme – principe de dichotomie

1) Déterminer deux nombres entiers consécutifs a et b tels que $a<\sqrt{3}<b$

2) Déterminer si on a $\sqrt{3}\in\left[a\,;\frac{a+b}{2}\right]$ ou $\sqrt{3}\in\left[\frac{a+b}{2}\,;b\right]$.

3) On considère l'algorithme ci-dessous où p désigne la précision.

```
1  a=float(input("a="))
2  b=float(input("b="))
3  p=float(input("p="))
4  while(b-a>p):
5      m=(a+b)/2
6      if(m**2<3):
7          a=m
8      else:
9          b=m
10 print("a=",a," b=",b)
```

Quelle valeur cet algorithme permet-il d'estimer ?

4) a) Déterminer ce qu'il renvoie lorsque :

p=0,1 | p=0,001

5) Modifier seulement quelques lignes du programme, afin d'obtenir un algorithme qui calcule une valeur approchée de la racine carrée d'un entier naturel non nul n donné.

Chapitre 5 - ARITHMÉTIQUE

1) LES ENTIERS NATURELS ET LES ENTIERS

Définitions :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers** **(ou nombres entiers relatifs)** $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

Remarque : La somme, la différence et le produit de deux entiers sont des entiers.

Pour la division dans $\mathbb{Z}$, on utilise la division euclidienne (avec reste).

Définition : division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit deux entiers a et b (avec $b\neq 0$).
On peut écrire a de façon unique sous la forme :
$a=b\times q+r$ (où $q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}$, tel que $0\leqslant r<|b|$)

q est appelé **quotient** .

r est appelé **reste** .

Exemples :

- $29=7\times 3+8$ n'est pas la division euclidienne de 29 par 3 car
- La division euclidienne de 29 par 3 est

2) MULTIPLES ET DIVISEURS

Définitions :

Soit deux entiers n et p .
Si le reste de la divison euclidienne de n par p est égal à 0, on dit que :

- p est un **diviseur** de n ou que n est **divisible** par p .
- n est un **multiple** de p .

Il existe un entier q tel que $n=p\times q$

Exemple : $45=9\times 5$.

Remarques :

- Tout nombre entier est un multiple de 1 et de lui-même (par exemple : 3 = 1 × 3 ou 5 = 5 × 1).

- L'entier 0 est un multiple de tout nombre entier n, car 0 = 0 × n .

- 0 n'admet qu'un seul multiple :

- Tout nombre entier n non nul admet une infinité de multiples: 0, n , $2n$, $3n$ …

Propriété :

Soit a , n et m trois entiers, tels que n et m sont des multiples de a .

La somme $n+m$, la différence $m-n$ et le produit $n\times m$ sont aussi des multiples de a .

Preuve (pour la somme) :

n et m sont des multiples de a . Il existe donc deux entiers k et k' tels que $n=k\times a$ et $m=k'\times a$
On a alors :

Exemple :

324 et 111 sont des multiples de 3 .
324+111, 324-111 et 324 × 111 sont donc aussi des multiples de 3.

3) NOMBRES PAIRS ET NOMBRES IMPAIRS

Propriété et définition :

Soit un entier n .

- Si n est divisible par 2 (c'est à dire un multiple de 2), on dit que n est **pair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k$

- Si n n'est pas pair, il est **impair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k+1$

Critère de parité :

Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Propriété :

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Preuve (pour la somme de deux nombres impairs) :

Soit n et n' deux nombres impairs.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, tels que $n=2k+1$ et $n'=2k'+1$.
On a alors :

Propriété :

Soit un entier n .
- Si n est pair, alors n^2 est pair.
- Si n est impair alors n^2 est impair.

Preuve :

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k$.
On a alors :

$n^2=(2k)^2=2k \times 2k=2 \times (2k^2)=2\mathrm{K}$ où $\mathrm{K}=2k^2$

Comme $\mathrm{K} \in \mathbb{Z}$, n^2 est pair.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k+1$.
On a alors :

Exemples :
- 24 est pair donc 24^2 =576 est pair .
- 781^8 est un nombre impair.

En effet, 781 est impair, donc 781^2 est impair, donc $(781^2)^2$ est impair et enfin $(((781^2))^2)^2=781^8$ est impair.

Remarque :

Les réciproques sont aussi vraies :
- si n^2 est pair, alors n est pair.
- si n^2 est impair, alors n est impair.

4) NOMBRES PREMIERS

Définition :

Un entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Un nombre qui n'est pas premier est **composé**.

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier.
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par tout entier non nul.

Exemple :

- 2,3,5,7,11,13,17 sont des nombres premiers.
- 45 n'est pas un nombre premier car $45=9 \times 5$.

Propriété : (admise)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

Exemple :

450 225	2 3

On obtient :

450=

17787	

On obtient :

17787=

On cherche les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

5) FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

Définition :

On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple : En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

$\frac{450}{17787} =$

Les entiers naturels et les entiers

Ex 5-1 : Vrai ou faux (justifier ou donner un contre-exemple)

1) $-4a$ où $a \in \mathbb{R}$ est un entier.

2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

3) Si $a=5b$ (où $b \in \mathbb{Z}$), alors a est un entier naturel.

4) La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.

5) Le quotient de deux entiers est un entier.

6) Tout entier naturel est un entier.

7) Tout entier relatif est un entier.

Ex 5-2 :

Parmi les nombres ci-dessous indiquer ceux qui sont des entiers naturels :

a) 4 b) $\frac{48}{4}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{11}$ e) $-\frac{12}{5}$ f) -10^7 g) 10^5

Division euclidienne

Ex 5-3 :

Dans chacun des cas ci-dessous, effectuer la division euclidienne de a par b :

1) $a=1257$ et $b=13$

2) $a=489$ et $b=48$

3) $a=45$ et $b=456$

4) $a=4522$ et $b=2$

Ex 5-4 : QCM

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).
Le reste de la division d'un entier par 4 peut être :

a) 5 b) 1 c) -2 d) 2,5 e) 4

Ex 5-5 :

1) Soit $a=4k+5$ ($k \in \mathbb{N}^*$).
Quel est le reste de la division euclidienne de a par 4 ?

2) On sait que le reste de la division euclidienne d'un entier naturel b par 5 est 3 . Comment peut-on écrire b ?

Ex 5-6 : Partitionnement des entiers naturels

1) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 3 ?

2) Justifier que tout entier a peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ (où $k \in \mathbb{N}$)

3) Montrer que tout entier peut s'écrire sous l'un des formes suivantes : $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$ (où $k \in \mathbb{N}$)

4) Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs est divisible par 4.

5) Que peut-on dire du produit de n ($n \in \mathbb{N}^*$)entiers consécutifs ?

Multiples et diviseurs

Rappel : Quelques critères de divisibilité

2 : un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8 (Ex : 13144 ; 24586)

5 : un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est : 0 ou 5 (Ex : 3250 ; 2335)

10 : un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est : 0 (Ex : 450 ; 5480)

4 : un nombre est divisible par 4 lorsque les deux chiffres de droite forment un nombre multiple de 4:
00, 04, 08, 12,.....80, 84, 88, 92, 96 (Ex : 2548 ; 43576)

3 : un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3 (Ex : 831 ; 8433)

9 : un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9 (Ex : 21345678)

11 : un nombre est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est un multiple de 11 (Ex : 919380)

Ex 5-7 :

1) Justifier que 240 est un multiple de 15.

2) En utilisant 240 et 15, compléter :

a) ….. est un diviseur de ….. b) ….. a pour diviseur …..

c) ….. est divisible par ….. d) ….. est un multiple de …..

Ex 5-8 :

1) Donner tous les diviseurs de 24.

2) Donner tous les diviseurs positifs de 13.

3) Donner tous les diviseurs de 1.

4) Donner tous les diviseurs de 0.

5) Donner tous les multiples de 0.

Ex 5-9 :

1) Comment peut-on écrire un multiple de 7 .

2) Donner tous les multiples de 7 compris entre 127 et 189.

Ex 5-10 :

Déterminer un entier inférieur à 1000 pair, divisible par 7 et 13 et multiple de 5.

Ex 5-11 : Somme , réciproque et contraposée

1) Montrer que si a et b sont deux multiples de 13 alors $a+b$ est un multiple de 13.

2) Énoncer cette propriété avec le mot « diviseur ».

3) Énoncer la réciproque de cette propriété . Est-elle vraie ?

4) Énoncer la contraposée de cette propriété ? Est-elle vraie ?

Ex 5-12 : Démonstration du cours

Soit a , n et m trois entiers, tels que n et m sont des multiples de a .
Montrer que la différence $m-n$ et le produit $n\times m$ sont aussi des multiples de a .

Ex 5-13 :

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s)
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $N=10n+15$. N est un multiple de :

a) 5 b) 10 c) 15 d) 3 e) 2

Ex 5-14 :

Soit a et b deux entiers tels que a est un multiple de 9 et b est un multiple de 15. Montrer que $a+b$ est un multiple de 3.

Ex 5-15 :

Soit a et b deux entiers.
1) Montrer que si a est un diviseur de $a+b$, alors a est un diviseur de b .

2) Montrer que si a est un diviseur de b , alors a^2 est un diviseur de b^2 .

Ex 5-16 :

Existe-t-il un entier naturel multiple de 14 et diviseur de 100 ?

Ex 5-17 :

Montrer que si 13 est un diviseur de a , alors 13 est un diviseur de a^2 .

Ex 5-18 : Tableur : utilisation de mod

Dans un tableur **MOD(a,b)** renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

On cherche la liste des diviseurs positifs d'un entier inférieur à 1000.

1) Saisir dans la colonne A la liste des entiers compris entre 1 et 1000.

	A	B	C
1	Diviseur de	528	Nombre de diviseurs
2	1	0	20
3	2	0	
4	3	0	

2) Saisir en B1 l'entier dont on cherche les diviseurs.

3) Saisir en B2, puis recopier vers le bas, la formule permettant d'afficher le reste dans la division euclidienne du nombre donné en B1 par le nombre en A2.

4) Saisir en C2 la formule affichant le nombre de diviseurs de l'entier donné. (On peut utiliser la fonction **NB.SI**)

5) Faire le test avec 804 et 897.

Ex 5-19 : Vrai ou faux

Justifier ou donner un contre-exemple.

1) Si un entier a divise un entier b et un entier c , alors a^2 divise bc .

2) Si le carré d' un entier a divise un entier b , alors a divise $\sqrt{b}$.

3) Si un entier m , divise un entier a , il existe alors un entier n tel que $a=m\times n$. Ainsi, un entier naturel a a toujours un nombre pair de diviseurs positifs.

Ex 5-20 : $\overline{aaaaaa}$

On note $\overline{aaaaaa}$ le nombre formé de 6 chiffres a .

1) Montrer que pour tout chiffre a , $\overline{aaaa}$ est divisible par 101.

2) Montrer que pour tout chiffre a et b , $\overline{aaabbb}$ est divisible par 37.

Nombres pairs et nombres impairs

Ex 5-21 : Produit

1) Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.

2) Montrer que le produit de deux nombres pairs est divisible par 4.

Ex 5-22 : Somme

1) Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

2) Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

3) Montrer que la somme de deux impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Ex 5-23 : Multiple de 8

Soit n un nombre pair et $N=n^2(3n+24)$.
Montrer que N est un multiple de 8.

Ex 5-24 : Cube

1) Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.

2) Montrer que le cube d'un nombre impair est impair.

Ex 5-25 :

Soit les nombres $m=4p$ et $n=5q$ où p et q sont des entiers.
1) Montrer que m est pair.

2) n peut-il être pair ?

3) Montrer que mn est un multiple de 10.

Ex 5-26 : Raisonnement par l'absurde

Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair . Montrer que n est pair.

Ex 5-27 : Raisonnement par l'absurde dans un triangle rectangle

Soit un triangle rectangle tel que ses trois côtés sont des nombres entiers.
Montrer qu'au moins un de ces nombres est pair.

Ex 5-28 : Python

On admet que tout nombre pair se décompose de façon unique comme le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.
Compléter le programme ci-dessous de telle sorte que la fonction pair retourne le nombre impair et l'exposant de 2.

```
def pair(n) :
    exp=0
    while ............ ............ :
        n=n//2    (a//b renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b)
        ............
    return(exp,n)
```

Nombres premiers

Ex 5-29 : Critères de divisibilité

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

425 , 43576 , 97 , 342153 , 909381 , 454452

Ex 5-30 : Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer les nombres ci-dessous en produit de facteurs premiers :

45

37

62

85

41

242

93

500

Ex 5-31 : Vrai ou faux (justifier ou donner un contre-exemple)

1) Tous les nombres premiers sont impairs.

2) Si un nombre p est premier alors $p+2$ n'est pas premier.

3) 1 est un nombre premier.

4) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

5) 111 111 111 111 est premier.

Ex 5-32 : Puissance d'un nombre premier

Soit p un nombre premier .

1) Le nombre p^2 est-il premier ?

2) Quels sont les diviseurs positifs de p^2 ?

3) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^n où $n \in \mathbb{N}$

Fractions irréductibles

Ex 5-33 :

1) Décomposer 35 et 54 en produits de facteurs premiers.

2) Rendre irréductible : $\frac{15}{35}$ et $\frac{18}{54}$

Ex 5-34 : Calculs et PPCM

Calculer et rendre irréductibles les expressions suivantes en utilisant le ppcm des dénominateurs (plus petit commun multiple) :

$$A = \frac{3}{16} - \frac{5}{12}$$

$B=\frac{8}{25}+\frac{1}{60}$

$C=\frac{14}{21}+\frac{6}{112}$

$D=\frac{3}{8}+\frac{4}{30}-\frac{21}{18}$

Ex 5-35 : Dénominateur, numérateur, somme et différence

1) Déterminer une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 132.

2) Déterminer une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la différence entre le dénominateur et le numérateur est 60.

3) Existe-il une fraction égale à $\frac{5}{7}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 29.

Ex 5-36 : Prise d'initiative

Soit a et b deux entiers naturels avec $b\neq 0$.
Déterminer toutes les fractions $\frac{a}{b}$ égales à $\frac{168}{315}$ avec $a<168$ et $b<315$?

Ex 5-37 : Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers

1) a) Décomposer 48400 et 94864 en produit de facteurs premiers.

b) Justifier que ces deux nombres sont divisibles par 44^2 .

2) Déterminer sans calculatrice :

a) La racine carrée de 48400.

b) La racine carrée de 94864

c) La fraction irréductible égale à $\frac{48400}{94864}$

Algorithme

Ex 5-38 : Multiple

Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b .

Ex 5-39 : Multiple

Écrire un algorithme permettant de déterminer pour des entiers a et b donnés, le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b .

Ex 5-40 : Nombre premier ou pas ?

Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel a est premier.

Chapitre 6 - POURCENTAGE

1) POURCENTAGE ET PROPORTION

A) CALCULER UN POURCENTAGE

Définition :

Soit t un nombre positif.

Prendre t % d'une quantité c'est multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$

Exemples :

- Prendre 5 % de 1200 :

- Prendre 300 % d'une quantité x :

Remarque : On peut appliquer un pourcentage plus grand que 100%

B) EXPRIMER UNE PROPORTION

Définition :

La **proportion** d'une sous-population dans une population est :

$$p=\frac{\text{nombre d'individus de la sous-population}}{\text{nombre d'individus de la population}}$$

- Une population est un ensemble d'éléments appelés individus.

- Une proportion est toujours comprise entre

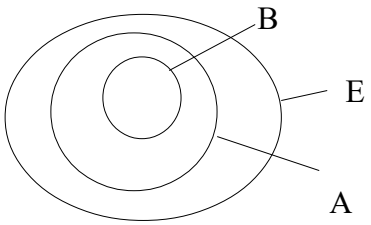
- On peut l'exprimer sous forme de fraction, sous forme décimale ou en pourcentages.

Exemple :

Dans une classe de seconde de 33 élèves, il a 15 filles.

La proportion de filles dans la classe est

2) POURCENTAGE DE POURCENTAGE



Propriété :

Soit E une population, A une sous-population de E de proportion p_A et B une sous-population de A de proportion p_B par rapport à A. La proportion de B par rapport à E est :

$$p_A \times p_B$$

Preuve :

Soit n_E , n_A et n_B les effectifs respectifs de E,A et B.

Exemple :

Au dernier DS, 45 % des élèves ont eu la moyenne, dont 60 % de filles.

Le pourcentage de filles ayant eu la moyenne dans la classe est :

3) POURCENTAGE D'ÉVOLUTION

Propriété et définition :

- Augmenter une valeur de a %, revient à la multiplier par $1+\frac{a}{100}$.
- Diminuer une valeur de a %, revient à la multiplier par $1-\frac{a}{100}$.
- $\text{CM}=\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$

On appelle **coefficients multiplicateurs**, noté CM, les nombres $1+\frac{a}{100}$ et $1-\frac{a}{100}$.

Exemple :

- Augmenter une valeur de 1 %, revient à la multiplier par

- Augmenter une valeur de 100 %, revient à la multiplier par

- Diminuer une valeur de 17 %, revient à la multiplier par

Définition :

- **La variation absolue** d'une valeur est : valeur finale – valeur initiale

- **Le taux d'évolution** (variation relative à la valeur initiale) d'une valeur est :

$$t = \frac{\text{valeur finale-valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$$

- La variation absolue est de la même nature que la valeur étudiée.

- La variation absolue est positive en cas d'augmentation et négative en cas de diminution.

- Le taux d'évolution n'a pas d'unité . On préfère l'écrire sous forme de pourcentage.

Exemple :

La moyenne d'une classe de seconde passe de 13,2 à 12,4 entre le deuxième et le troisième trimestre.

- La variation absolue est :

- Le taux d'évolution est :

- Le coefficient multiplicateur est :

Propriété :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution t vérifie :

$$\text{CM} = 1 + t$$

Preuve :

On note respectivement v_i et v_f la valeur initiale et la valeur finale . On a :

Récapitulatif :

	Valeur finale	Variation absolue	Taux d'évolution	CM
Augmentation de a %				
Diminution de a %				

4) ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

Propriété et définition :

- Si une valeur subit deux évolutions successives CM_1 et CM_2 , le coefficient multiplicateur global CM_g vérifie :

$$\text{CM}_g = \text{CM}_1 \times \text{CM}_2$$

- Le taux d'évolution global t_g , pour passer de la valeur initiale à la valeur finale vérifie :

$$\text{CM}_g = 1 + t_g \quad \Leftrightarrow \quad t_g = \text{CM}_g - 1$$

ATTENTION :

Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 10% ne signifie pas que la valeur est inchangée.
On n'ajoute pas les taux d'évolution.

Exemple :

Un prix de 150 euros subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 %

On a $CM_g =$ et $t_g = CM_g - 1 =$

Ces deux évolutions correspondent à une baisse de

Remarque :

Il n'est pas utile de connaître le prix initial pour calculer le taux d'évolution global.

5) ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Propriété et définition :

Une valeur évolue d'un taux t .
Le taux d'évolution réciproque est le taux d'évolution qui permet de passer de la valeur finale à la valeur initiale.

Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

Le taux d'évolution réciproque vérifie :

$$CM_r = 1 + t_r \quad \Leftrightarrow \quad t_r = CM_r - 1$$

Exemple :

Pour le taux de TVA classique de 20 %, le coefficient multiplicateur entre le prix Hors taxe et le prix toutes taxes est CM=1,2.

Le coefficient multiplicateur réciproque est

Ce qui correspond environ à une baisse de

Pourcentages et proportions

Ex 6-1 : Calcul mental

Calculer mentalement :

1) 10 % de 75 € 2) 50 % de 17 €

3) 25 % de 87 € 4) 75 % de 36 €

Ex 6-2 : Tableur

Le tableau ci-dessous récapitule pour l'année 2018 les résultats de la session de juin 2018 du baccalauréat.

	A	B	C	D
1	Séries	Présents	Admis	Proportion %
2	S	204402	187551	
3	ES	131867	119037	
4	L	57547	52301	
5	Total			

Compléter ce tableau à l'aide d'un tableur.

Ex 6-3 : Différentes écritures d'une proportion

Compléter le tableau ci-dessous :

Fractionnaire	$\frac{3}{5}$			
Décimale			0,7	
Pourcentage		5 %		80 %

Ex 6-4 : Ordre de grandeur

Donner un ordre de grandeur de :

1) 25 % de 398 € 2) 50 % de 1790 €

3) 33 % de 91 € 4) 20 % de 36 €

Pourcentage de pourcentage

Ex 6-5 : Dans un supermarché

Dans un supermarché, le rayon fruits et légumes représente 25 % du montant des ventes par jour et on sait que 3 fruits vendus sur 5 sont des agrumes .
Le gérant du supermarché ne fait un bénéfice que si le montant des ventes d'agrumes représente plus de 10 % de la recette journalière.
Le gérant doit-il diversifier ses ventes de fruits ?

Ex 6-6 : Population mondiale

Au premier janvier 2018, la population mondiale est d'environ $7,632\times10^9$ habitants et celle de l'Europe de $7,42\times10^8$.
1) Quelle proportion de la population mondiale, la population de l'Europe représente-elle ?

2) A la même date, la population française est de 66,99 millions d'habitants. Quelle proportion de la population européenne cela représente-t-il ?

3) Calculer de deux façons différentes la proportion de la population mondiale habitant en France.

Ex 6-7 : Dans une pâtisserie

Dans une pâtisserie, la vente de viennoiseries représente 70 % des achats et 2 viennoiseries sur 5 sont des croissants.
Calculer en pourcentage la part de croissants dans les ventes de cette pâtisserie.

Pourcentage d'évolution

Ex 6-8 : Soldes

Le prix d'une paire de chaussures valant initialement 90 € a baissé de 25 % pendant les soldes.
1) Quel est le montant de la remise ?

2) Quel le nouveau prix ?

3) Comment peut-on calculer directement le nouveau prix sans calculer la remise ?

Ex 6-9 : Population mondiale

En 2000 la population mondiale était de 6126622000 habitants.
Entre 1980 et 2000, elle a augmenté de 38 %.
Si l'évolution reste la même entre 2000 et 2020, combien y aura-t-il d'habitants en 2020 ?
En 2019, elle est de 7,637 milliards d'habitants . Que peut-on conclure ?

Ex 6-10 : Python

1) Une télévision coûte 355 € . Un magasin propose une baisse de 25 % . Quel est le nouveau prix ?

2) Le gérant du magasin inquiet du niveau mathématique de ses clients, propose sur l'étiquette un petit script en python demandant la valeur initiale I, le pourcentage de baisse T et affichant la valeur finale F.

```
def evolution (I,T) :
    F=…
    return(F)
```

Compléter ce script et vérifier qu'on obtient bien le même résultat qu'à la question 1.

Ex 6-11 : Expression algébrique

Une carte de réduction offre un rabais de 10 % lors du passage en caisse. Exprimer le prix à payer p en fonction du montant m des achats avant le rabais.

Ex 6-12 : Mise en équation

Entre le deuxième et le troisième trimestre de 2018, le nombre de demandeurs d'emploi inscrits à Pôle Emploi (catégorie A) en France métropolitaine a augmenté de 0,5 %, c'est à dire 16300.
Combien y avait-il de chômeurs de catégorie A au deuxième trimestre de 2018 ?

Taux d'évolution

Ex 6-13 :

1) Exprimer la variation absolue des prélèvements obligatoires en France entre 2007 et 2016.

2) Exprimer en pourcentage le taux d'évolution des prélèvements obligatoires en France entre 2007 et 2016.

Ex 6-14 :

1) Un prix subit une hausse de 17 % . Quel est le coefficient multiplicateur associé à cette évolution ?

2) Un prix a été multiplié par 0,92 . Quel est le taux d'évolution ?

Ex 6-15 : Vrai ou faux

1) Lorsqu'une quantité est multipliée par 2, cela signifie qu'elle a augmenté de 200 %.

2) Diviser une quantité par 4, c'est lui appliquer un taux d'évolution de -25 %.

3) Multiplier une quantité par $\frac{3}{5}$, c'est lui appliquer une baisse de 40 %.

Ex 6-16 :

Compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Taux	CM	Valeur finale
132	12 %		
2453	-20 %		
437		1,27	
1254		0,88	

Ex 6-17 : Python

Écrire en Python une fonction def taux(I,F) retournant le taux d'évolution T associé à une valeur initiale I et une valeur finale F.

Ex 6-18 : Tableur

	A	B	C	D
1	Prix initial	Prix final		taux en pourcentage
2	321			20
3	432			
4	75			

Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B2 puis recopier vers le bas, pour calculer le prix final des articles en appliquant le même taux d'évolution saisi en cellule D2 ?

Retrouver la valeur initiale

Ex 6-19 :

Dans chacun des cas suivants, on connaît la valeur finale et le taux d'évolution . Retrouver la valeur initiale.

1) Baisse de 50 % et valeur finale 425

2) Hausse de 25 % et valeur finale 5642

3) Hausse de 30 % et valeur finale 428

Ex 6-20 :

Compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Taux	CM	Valeur finale
x	-15 %		
		1,7	450
	27 %		63,8
	-6,7 %		32
		0,37	-45,2

Ex 6-21 : Fichiers compressés

Ci-dessous, on peut lire la taille d'un fichier après compression et son ratio (pourcentage de réduction)

Nom	Type	date	Taille compressée	Ratio
Pourcentage.odt	Libre Office	05/05/2019	430 Ko	72 %
Pourcentage.gif	Image	06/06/2019	5847 Ko	8 %
Pourcentage.pdf	Acrobat	08/06/2019	875 Ko	2 %

Calculer la taille initiale de chaque fichier.

Pourcentage.odt :

Pourcentage.gif :

Pourcentage.pdf :

Évolutions successives

Ex 6-22 :

Un timbre coûtait 0,8 € avant deux augmentations successives de 5 % et de 6 %.
Donner une valeur approchée au centime près du nouveau prix après les deux évolutions et le taux d'évolution global.

Ex 6-23 : Vrai ou faux

1) Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 10 %, revient à ne rien faire.

2) Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 10 % est une hausse directe de 21 %

3) Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 20 % est plus grande qu'une hausse directe de 10 %.

4) Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 10 % est plus petite qu'une hausse directe de 10 %.

Ex 6-24 :

Avec sa carte de fidélité, Amine, restaurateur peut avoir 15 % de remise sur le montant total de ses achats chez son grossiste.
Il achète des produits alimentaires pour un montant de 182 € HT et du matériel de cuisine pour un montant de 735 € HT.
Les taux de TVA sont de 5,5 % pour les produits alimentaires et 20 % pour les autres produits.
Quel est le montant de sa facture ?

Ex 6-25 : Prix de l'essence

Pendant quatre ans le prix du litre d'essence a subi deux baisses successives de 9 % et 3 % puis deux hausses successives de 7% et 5 %.
Arrondir les résultats à 10^{-4} près.
1) Zineb, très forte en mathématiques, prétend qu'au bout de 4 ans le prix du litre d'essence est identique à celui d'il y a 4 ans.
En calculant le taux d'évolution global, commenter l'affirmation de Zineb.

2) Le prix était de 1,29 euros.
Déterminer la variation absolue du prix du litre au bout des quatre ans.

3) Quel taux d'évolution faut-il appliquer la cinquième année pour revenir au prix initial ?

Ex 6-26 : Petits taux

Un prix subit deux évolutions successives de taux t et t' (t et t' ne sont pas donnés en %).
1) Montrer que le prix initial a été multiplié par $1+(t+t')+tt'$

2) On choisit $t=0,1$ et $t'=0,2$.
Donner mentalement, en expliquant la démarche utilisée, une approximation du taux global.

Ex 6-27 : Taux moyen

Le taux d'évolution moyen dans le cas de n évolutions successives est le taux à appliquer n fois successivement pour obtenir la même évolution globale.

On considère deux évolutions successives de taux $t_1=-0,3$ et $t_2=0,4$
1) a) Déterminer le coefficient multiplicateur global CM_g .

b) Déterminer le taux d'évolution moyen CM_m .

2) a) Si t_1 et t_2 sont proches, montrer que l'on peut considérer $\frac{t_1+t_2}{2}$ comme une bonne approximation du taux moyen.

b) On considère deux évolutions successives de taux $t_1=0,68$ et $t_2=0,73$. Donner une approximation du taux d'évolution moyen.

Évolution réciproque

Ex 6-28 :

Dans chaque cas, calculer le coefficient multiplicateur réciproque puis le taux d'évolution réciproque , en pourcentage, arrondi à 0,1 % près.

1) Une hausse de 27 %

2) Une baisse de 15 %

3) Une hausse de 130 %

Ex 6-29 :

Compléter le tableau suivant :

Taux d'évolution en %	CM	Taux réciproque en %	CM réciproque
	3		
-20 %			
		35 %	
			1,2

Ex 6-30 : Vrai ou faux

1) Une baisse de 50 % suivie d'une hausse de 100 %, revient à ne rien faire.

2) Le coefficient multiplicateur associé à une évolution est 1,23 . Le taux d'évolution réciproque est donc -23 %.

3) Après une baisse de 75 %, il faut une augmentation de 300 % pour revenir à la valeur initiale.

Ex 6-31 : Tableur

	A	B	C	D	E	F	G
1	Évolutions	1	2	3	4	5	Taux global
2	Taux en %	10	7	-12	13	-10	
3	CM						
4	CM réciproque						

1) Quelle formule doit-on saisir en B3 et tirer vers la droite pour obtenir le coefficient multiplicateur associé à chaque évolution ?

2) Quelle formule doit-on saisir en G3 pour obtenir le coefficient multiplicateur global ?

3) Quelle formule doit-on saisir en G2 pour obtenir le taux d'évolution global ?

4) Quelle formule doit-on saisir en B4 pour obtenir le coefficient multiplicateur réciproque de l'évolution globale ?

Ex 6-32 : Pendant les soldes

Pendant la période des soldes, il est écrit sur la devanture d'un magasin de chaussures et de vêtements : « Tout à moins 30 % »

Pierre rentre dans le magasin et constate que toutes les chaussures bénéficient de 20 % de remise.

1) Pierre achète pour 50 euros de chaussures et 70 euros de vêtements. Quelle remise Pierre doit-il exiger sur le prix des vêtements pour que la publicité sur la devanture ne soit pas mensongère ?

2) Le pourcentage de remise sera-t-il identique pour sa femme qui achète pour 450 euros de chaussures et 682 euros de vêtements ?

3) Le choix du magasin est-il judicieux ?

Ex 6-33 :

A partir de quel pourcentage de diminution, l'évolution réciproque est-elle une augmentation d'au moins 40 % ?

Algorithme

Ex 6-34 : Démarques successives

Pendant la période des soldes, le gérant d'un magasin souhaite calculer rapidement les prix obtenus après les différentes périodes de démarques.

1) Le magasin propose : « deuxième démarque : -15 % supplémentaire pour tous les articles déjà soldés à 20 % »

Calculer le prix d'un article, affiché 90€ , soldé à 20 % lors de la première démarque.

2) Pour aider ses employés, le gérant fort en math (mais un peu cochon quand il boit son café) propose le programme suivant écrit en python .

```
1  prix=[10*i for i in range(11)]
2  def solde(t):
3      for i in range(11)
4          prix[i]=prix[i]
5      return(prix)
6  reduction=float(inp
7  solde(reduction)
8  print (prix)
```

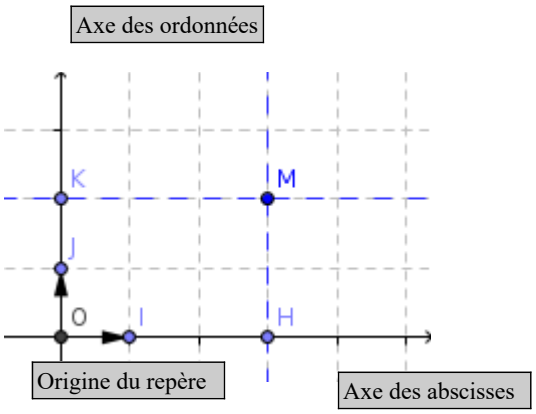
a) Compléter ce programme.

b) Le gérant propose une prime au premier employé qui réussira à modifier le programme pour obtenir la liste des prix après deux démarques successives de taux t_1 et t_2 .
Essayez d'avoir cette prime !

Chapitre 7 - CONFIGURATIONS PLANES

1) REPÈRE DU PLAN

A) COORDONNÉES D'UN POINT DANS UN REPÈRE



Définition :

Un **repère du plan** est défini par trois points non alignés O, I et J et est noté (O, I, J) .

(OI) et (OJ) , sécantes en O, sont **les axes du repère**.

O est appelé **l'origine du repère** . (OI) est l'axe des **abscisses** et (OJ) celui des **ordonnées**.

Cas particuliers :

- Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, alors le repère (O, I, J) est dit **orthogonal**.
- Si, de plus, $OI = OJ = 1$, alors le repère (O, I, J) est dit **orthonormal**.

On parle souvent de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, plutôt que de repère (O, I, J)

Définition :

Soit M un point du plan muni du repère (O, I, J) .
En traçant la parallèle à chaque axe passant par M , on obtient deux points H et K .

L'abscisse de M dans (O, I, J) , noté x_M ,est l'abscisse de H sur (OI) .

L'ordonnée de M dans (O, I, J) , noté y_M ,est l'abscisse de K sur (OJ) .

$(x_M ; y_M)$ est **le couple des coordonnées** du point M dans le repère (O, I, J) .

Éthymologie :

- "Orthogonal" vient du grec *orthos* droit et gonos *angle*

- "Orthonornal" vient du grec orthos *droit* et du latin norma *équerre*

- "Abscisse" vient du latin *abscissa*, coupée.

- "Ordonnée" vient du latin du latin *ordinare*, mettre en ordre.

Exemples : O a pour coordonnées I pour coordonnées ; J a pour coordonnées ; M a pour coordonnées

B) COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

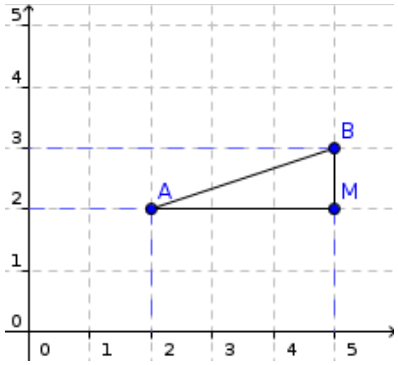
Propriété :

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, I, J) .

Le milieu I du segment $[AB]$ a alors pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Exemple : Si $A(2 ; 1)$ et $B(5 ; -1)$, alors

C) DISTANCE ENTRE DEUX POINTS



Propriété :

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère **orthonormal** (O, I, J) .
La distance de A à B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Preuve :

Exemple :

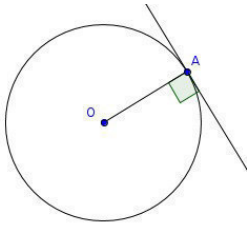
Dans la figure ci-dessus, $A(2 ; 2)$ et $B(5 ; 3)$, alors :

2) DISTANCE ET ENSEMBLE DE POINTS

A) CERCLE ET DISQUE

Définition : Cercles et disques

- **Le cercle** de centre O et de rayon r est **l'ensemble** des points M du plan tels que $OM = r$.
- **Le disque** de centre O et de rayon r est **l'ensemble** des points M du plan tels que $OM \leqslant r$.
- **La tangente** à un cercle de centre O en un point A est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[OA]$.
  Un cercle et la tangente en l'un de ses points ont un unique point commun.

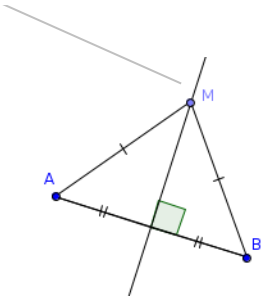


B) MÉDIATRICES ET TRIANGLE

Définition :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices des côtés du triangle.

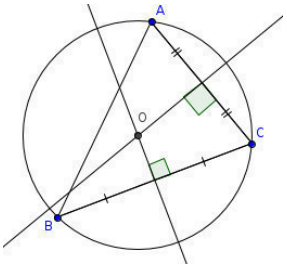


Propriété :

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Point de concours :

Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est **le centre du cercle circonscrit** à ce triangle.

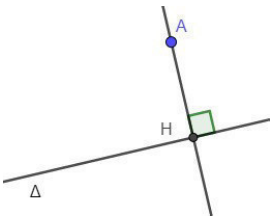


3) DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Définition :

Soit A un point du plan et Δ une droite du plan.

Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par A.



Remarque :

Si $A \in \Delta$, alors le projeté orthogonal du point A sur Δ est lui-même.

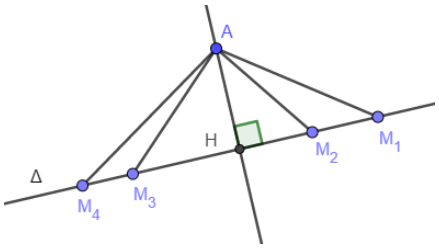
Définition :

On appelle **distance d'un point à une droite**, la plus petite distance entre ce point et un point de la droite.

Propriété :

Soit A un point du plan, Δ une droite du plan et H le projeté orthogonal de A sur Δ .

La distance du point A à la droite Δ est la distance AH.

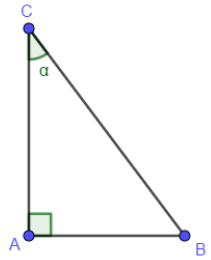


Preuve : Disjonction de cas

Cas 1 : $A \in \Delta$,

Cas 2 : $A \notin \Delta$

4) QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE



Propriété :

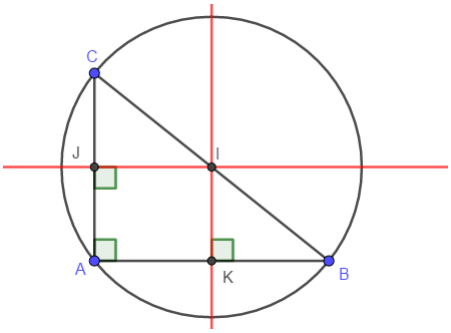
Dans un triangle rectangle, on note α la mesure en degré de l'un des deux angles aigus. On a :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Remarque :

On écrit $\cos^2\alpha$ pour simplifier l'écriture à la place de $(\cos(\alpha))^2$, mais il faut bien comprendre que ce n'est pas cos qui est au carré !

Preuve :



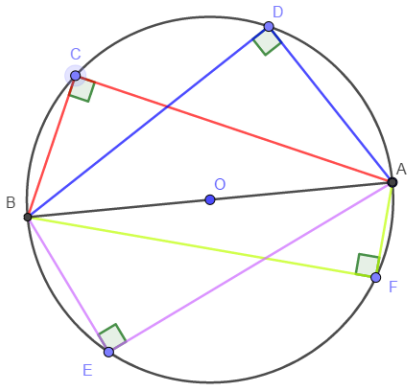
Propriété :

Dans un triangle rectangle, les médiatrices des deux côtés adjacents à l'angle droit se coupent au milieu de l'hypoténuse.

Le cercle circonscrit d'un triangle rectangle est donc le cercle de centre le milieu de l'hypoténuse et de rayon la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Propriété :

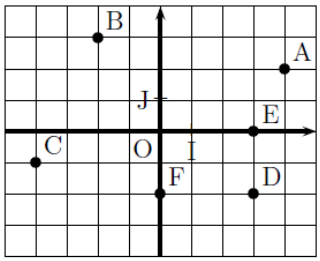
Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.



Coordonnées d'un point

Ex 7-1 : Dans un repère orthonormé

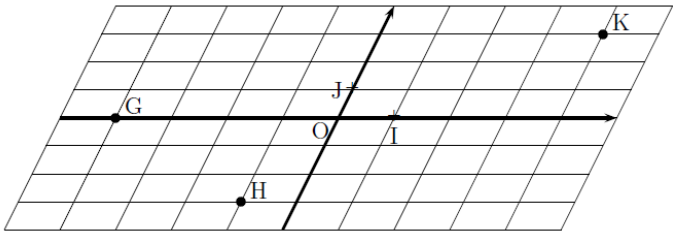
1) Lire les coordonnées des points A , B , C , D , E , F ci-dessous.



2) Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-dessus, placer les points :
$G(2;3)$ $H(-4;-3)$ $K(0;2)$ $L(-4;-2)$ $M(-3;0)$ $N(1;-3)$

Ex 7-2 : Dans un repère quelconque

1) Lire les coordonnées des points G, H, K ci-dessous :



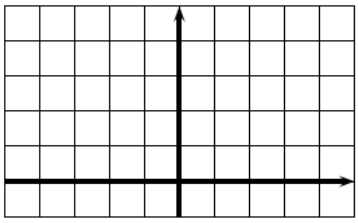
2) Dans le repère (O, I, J) ci-dessus, placer :
$L(3;-2)$ $M(-3;1)$ $N(0;-3)$

Ex 7-3 : Algorithme

Que fait cet algorithme ?

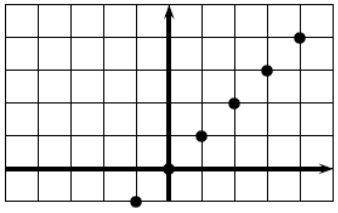
```
Pour des valeurs de n allant de −3 à 4 de 1 en 1.
   Placer le point de coordonnées (n ; 1)
   Fin Pour
```

Tracer la figure dans le repère ci-dessous d'unité 1 carreau



Ex 7-4 : Algorithme

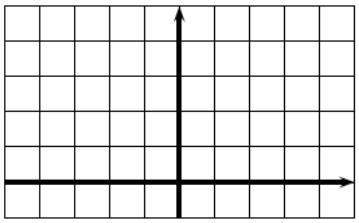
Écrire l'algorithme qui place cette série de points. dans le repère ci-dessous d'unité 1 carreau.



Coordonnées du milieu d'un segment

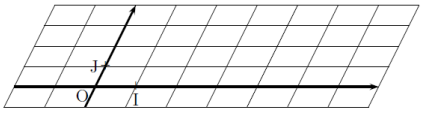
Ex 7-5 : Repère orthonormé et repère quelconque

1) Dans un repère orthonormé (O, I, J) placer les points $A(5;1)$ et $B(-1;3)$.
a) Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.



b) Vérifier sur la figure.

2) Dans le repère (O, I, J) ci-contre, placer à nouveau les points $A(5;1)$, $B(-1;3)$ et le milieu K de $[AB]$



Les calculs de la question 1) sont-ils encore valables ?

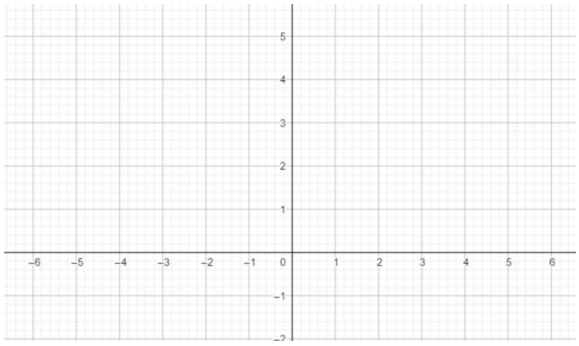
Ex 7-6 : python™

1) Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de deux points et qui affiche les coordonnées du milieu du segment qui joint ces deux points.

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 7-7 : Parallélogramme ?

1) a) Tracer un repère (O, I, J) et placer les points A , B , C , D de coordonnées $A(-1;4)$, $B(6;5)$, $C(3;0)$, $D(-5;-1)$.



b) Tracer le quadrilatère $ABCD$ et ses diagonales.

c) Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$ et du point L milieu du segment $[BD]$.

d) Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont-ils le même milieu ? Justifier.

e) Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier en citant une propriété.

2) a) Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de quatre points A , B , C , D et qui indique si $ABCD$ est un parallélogramme ou non.

b) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 7-8 :

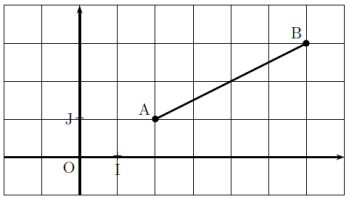
Dans un repère (O, I, J) , on considère les points $A(1;2)$ et $K(4;4)$.

Calculer les coordonnées $(x;y)$ du point B tel que K soit le milieu du segment $[AB]$.

Distance entre deux points

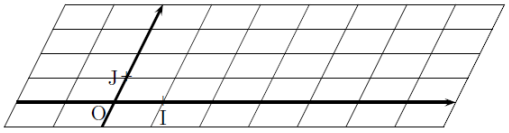
Ex 7-9 : Repère orthonormé et repère quelconque

1) Dans le repère orthonormé (O, I, J) , d'unité 1 cm, on considère les points $A(2;1)$, $B(6;3)$ et $C(6;1)$.



Tracer le triangle ABC et calculer la distance AB .

2) Dans le repère (O, I, J) ci-dessous, placer à nouveau les points $A(2;1)$, $B(6;3)$ et $C(6;1)$ et tracer le triangle ABC.
Le calcul précédent est-il encore valable ? Pourquoi ?



Ex 7-10 : Vérification et construction impossibles

Dans un repère orthonormé les coordonnées des points A et B sont $A(257;12)$, $B(242;-28)$.

Calculer la distance AB .

Ex 7-11 :

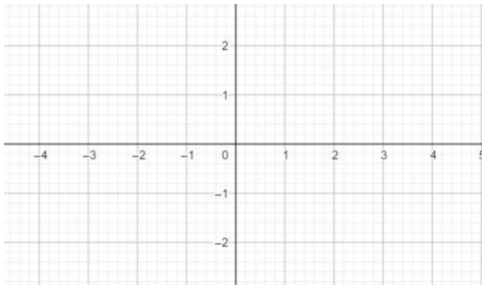
1) Expliquer ce que fait le programme écrit en Python ci-dessous :

```
from math import sqrt
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
d=float(input("Quelle distance avez-vous trouvée ?"))
d1=sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
if (d==d1):
    print("Le résultat est juste")
else:
    print("Le résultat est faux")
```

2) Réécrire ce programme en le modifiant pour qu'il corrige la réponse si elle est fausse.

Ex 7-12 : Périmètre et triangle

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points G(3;−2), H(4;1) et K(−4;2).



1) Tracer la figure.

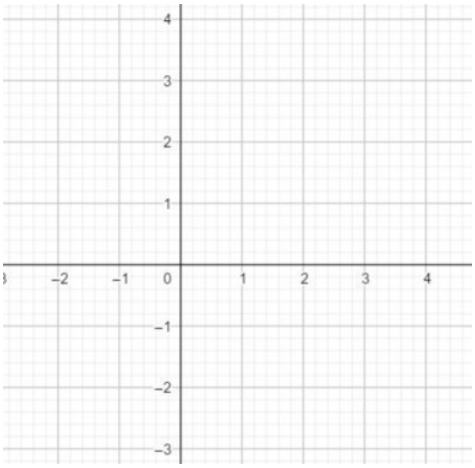
2) Calculer le périmètre du triangle GHK. Donner la valeur exacte et l'arrondi au dixième près.

3) Ce triangle est-il isocèle ? Justifier.

4) Ce triangle est-il rectangle ? Justifier.

Ex 7-13 : Triangle rectangle

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points R(−2;2), S(3;3) et T(4;−2).

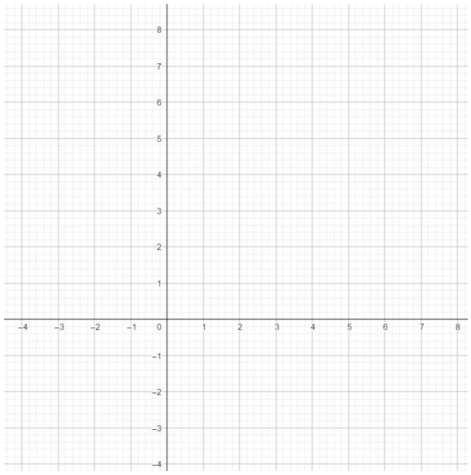


1) Tracer la figure.

2) Le triangle RST est-il rectangle ?
Détailler les calculs et justifier.

Ex 7-14 : Parallélogramme

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points E(−4;−2), F(1;8), G(7;6) et H(2;−4).



1) Tracer la figure.

2) Le quadrilatère EFGH est-il un parallélogramme ?

Détailler les calculs et justifier (quatre calculs suffisent pour répondre).

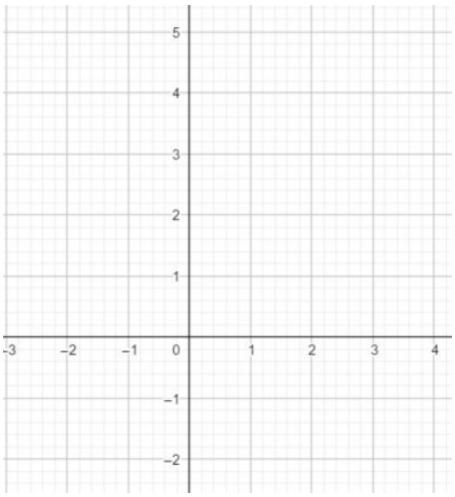
Ex 7-15 : Losange

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points A(−1;4), B(4;5), C(3;0) et D(−2;−1).

1) Tracer le quadrilatère ABCD.

2) Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

Détailler les calculs et justifier en citant une propriété.



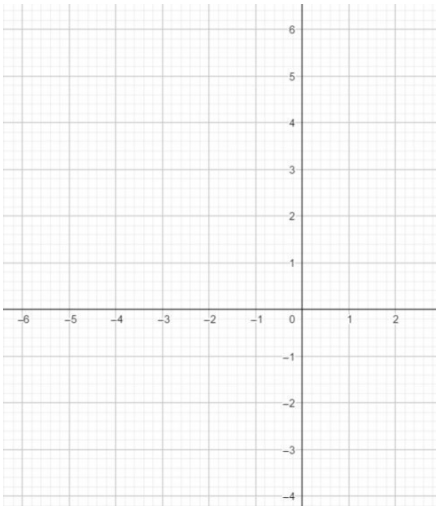
Ex 7-16 : Nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points A(−6;−1), B(−2;7), C(2;5) et D(−2;−3).

1) Tracer le quadrilatère ABCD.

2) Quelle est la nature exacte du quadrilatère ABCD ?

Détailler les calculs et démontrer la réponse.



Distance et ensemble de points

Ex 7-17 : Cercle

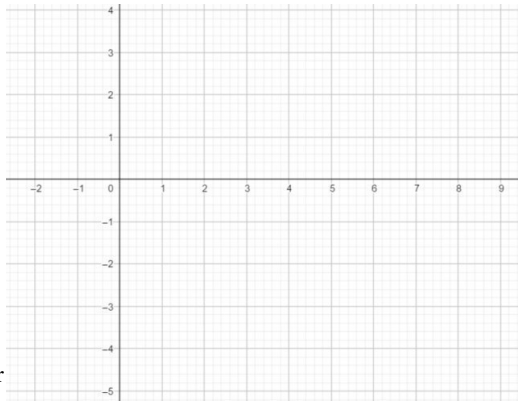
Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points A(2;−2), B(7 ;-5) et C(9;4) .
Démontrer que B appartient au cercle de centre C passant par A.

Ex 7-18 : Cercle

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère le point A(5;−1) .
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 4.

1) Tracer la figure.

2) Déterminer les points d'ordonnée 2 qui sont sur le cerce $\mathcal{C}$.
(il faut déterminer les valeurs exactes des abscisses possibles).

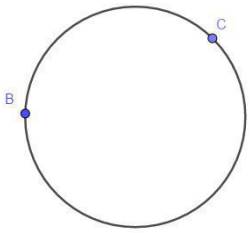


Ex 7-19 : Médiatrice

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, on considère les points A(2;−3) et B(-4 ;5).
Les points M(3;4) et N(20;17) appartiennent-il à la médiatrice du segment [AB] ?

Ex 7-20 : Centre du cercle circonscrit

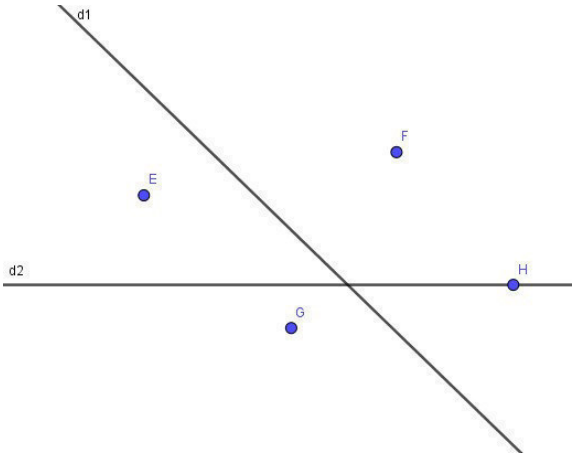
Construire au compas et à la règle non graduée le centre du cercle ci-dessus.



Projeté orthogonal

Ex 7-21 : Projeter orthogonalement

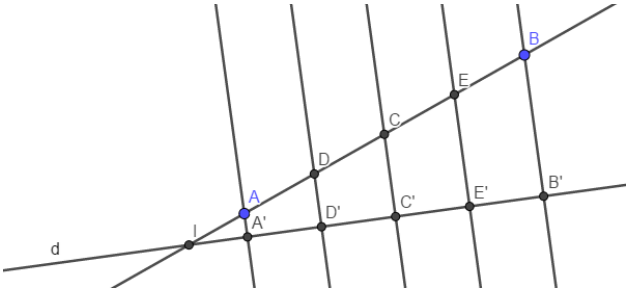
1) Construire les projetés orthogonaux des points E, F G et H sur d_1 et d_2



2) Parmi les points E, F G et H, lequel est le plus loin de la droite d_1 ?

3) Parmi les points E, F G et H, lequel est le plus proche de la droite d_2 ?

Ex 7-22 : Projeté orthogonal et rapport de longueurs



Sur la figure ci-dessus, les points A, D , C, E et B sont régulièrement espacés . Ils ont pour projetés respectifs sur la droite d les points A', D' , C', E' et B'.

1) En utilisant un théorème bien connu, montrer que $\frac{ID}{IC}=\frac{ID'}{IC'}$

2) Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

a) $A'D'=0,25\,A'B'$

b) $DE=D'E'$

c) E' est le milieu de [C'B'].

Ex 7-23 : Projeté orthogonal et trigonométrie

1) Tracer un triangle ABC dont les angles en A et en B sont aigus, puis construire le projeté orthogonal H du point C sur (AB).

2) Justifier que $AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=AB\times AH$

3) Simplifier BA $\times$ BC $\times$ cos($\widehat{ABC}$)

Distance d'un point à une droite

Ex 7-24 : Distance d'un point à une droite dans un rectangle

Soit ABCD un rectangle tel que AD=9cm et AB=13cm . On note O le point d'intersection des diagonales.
1) Déterminer la distance de O à (DC)

2) Déterminer la distance de O à (BC)

Ex 7-25 : Distance d'un point à une droite dans un triangle rectangle

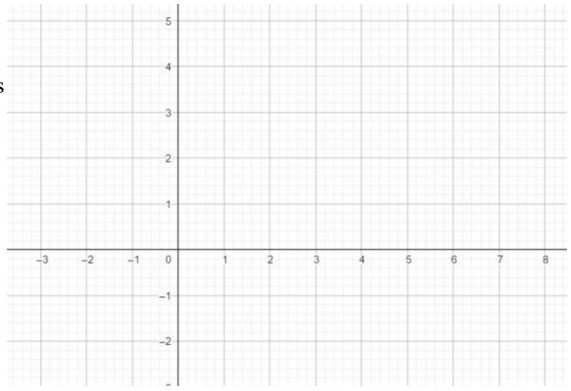
Soit ABC un triangle rectangle en A tel AC=3,6 cm et BC=6cm.
1) Déterminer d(C,AB), la distance de C à la droite (AB) et d(B,AC), la distance de B à la droite (AC).

2) Calculer l'aire de ABC.

3) En déduire d(A,BC), la distance de A à la droite (BC)

Ex 7-26 : Points équidistants ?

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , d'unité 1 cm, on considère les points A(2;0), B(6;0), C(0;3) et D(0;5).
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et D sur (BC).



1) Faire une figure.

2) Quelle conjecture peut-on faire au sujet des points A et D par rapport à la droite (BC) ?

3) Calculer AH en calculant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.

4) Calculer DK.

5) Conclure.

Quelques propriétés du triangle rectangle

Ex 7-27 : Déterminer $\sin\alpha$ à partir de $\cos\alpha$

Un triangle EFG rectangle en F est tel que $\cos(\hat{E})$ =0,5.
Calculer $\sin^2\hat{E}$ et en déduire la valeur exacte de $\sin(\hat{E})$

Ex 7-28 : Valeurs exactes de cos(45) et sin(45)

HLK est un triangle rectangle en K tel que $\sin(\hat{H})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et HL=8cm.

1) Déterminer la valeur exacte de cos($\hat{H}$)

2) Calculer HK et LK.

3) Quelles sont les valeurs exactes de cos(45) et sin(45) ?

Ex 7-29 : Trigonométrie dans un triangle rectangle

1) Tracer un triangle ABC tel que AB=8,4 cm , BC=6,3 cm et AC=10,5 cm.

2) Justifier que ABC est rectangle.

3) Déterminer cos($\hat{A}$) et sin($\hat{A}$)

4) En déduire $\hat{A}$ et $\hat{C}$ à 1 degré près.

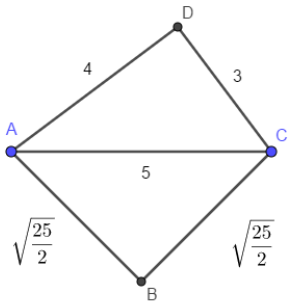
Ex 7-30 : Cercle et projeté orthogonal

1) Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB], puis une droite d passant par A et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en D.

2) Justifier que le point D est le projeté orthogonal du point B sur d .

Ex 7-31 : Points cocycliques

On considère la figure ci-dessous :

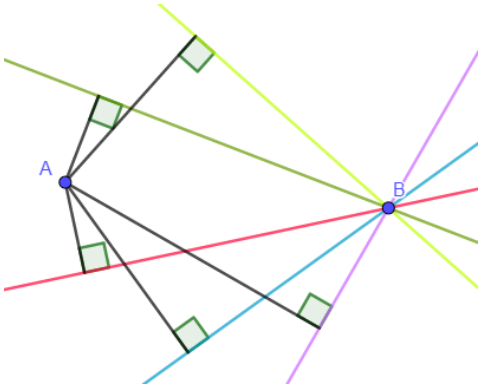


Montrer que les points A,B,C et D sont cocycliques (c'est à dire, ils appartiennent à un même cercle) et que les médiatrices des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] sont concourantes.

Ex 7-32 : Décrire un ensemble

Pour chacune des droites passant par B, on projette orthogonalement le point A sur la droite .

Quel est l'ensemble décrit par tous les projetés ? Justifier.



Chapitre 8 - ÉQUATIONS, INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

1) ÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'équation.

Deux équations **équivalentes** sont deux équations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Propriété :

Soit a , b , et c trois réels.

- Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une égalité (et donc d'une équation) , on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad a-c=b-c \quad \Leftrightarrow \quad a+c=b+c$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une égalité (équation) par un même nombre, on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad ac=bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{c} \quad (\ c\neq 0 \ )$$

Exemple :

On retranche $2x$ à chaque membre

On ajoute 5 à chaque membre

On divise chaque membre par 2

$4x-5=2x+10 \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Propriété : Équation produit

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\mathrm{A}(x)\times\mathrm{B}(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}(x)=0 \ \text{ ou } \ \mathrm{B}(x)=0$$

Cette méthode permet de résoudre certaines équations qui ne sont pas du premier degré

Exemple :

$2x^2=5x \quad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Propriété : Équation $x^2=a$

Soit a un réel , l'équation $x^2=a$

- n'admet pas de solution si $a<0$
- admet une unique solution 0 si $a=0$
- admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$

Exemples :

- $x^2=5 \quad \Leftrightarrow$
- $t^2=3-\pi$

2) INÉGALITÉS

Propriété : Addition et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une inégalité (et donc d'une inéquation) , on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a+c \leqslant b+c \quad \Leftrightarrow \quad a-c \leqslant b-c$$

Preuve :

Rappel : « Pour comparer deux nombres, on peut comparer leur différence par rapport à zéro »

Propriété : Multiplication et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité (inéquation) par un même nombre strictement **positif**, on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac \leqslant bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c} \quad (\ c \neq 0 \ )$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement **négatif**, on obtient une inégalité de **sens contraire**.

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac \geq bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c} \quad (\ c \neq 0 \ )$$

Idée de preuve :

Soit f et g les fonctions linéaires définie par $f(x)=cx$ et $g(x)=\frac{1}{c}x$.

Si $c>0$, f et g sont croissantes et si $c<0$, f et g sont décroissantes.

En appliquant les fonctions f et g à l'inégalité $a \leqslant b$, on en déduit les résultats.

Par exemple, si $c<0$:

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad g(a) \geqslant g(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} \times a \geqslant \frac{1}{c} \times b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$$

Propriété : comparaison à l'aide d'un quotient

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- Pour comparer deux réels strictement positifs, on peut comparer leur quotient à 1.
- Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$, alors $a \leqslant b$
- Si $\frac{a}{b} \geqslant 1$, alors $a \geqslant b$

Propriété : Ajouter des inégalités de même signe

Soit a , b , c et d quatre réels . La propriété ci-dessous présentée avec $\leqslant$ est aussi vraie pour $<$, $\geqslant$ et $>$.

Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a+c \leqslant b+d$

Exemple :

$\pi < 3,2$ et $\sqrt{2} < 1,5$, donc

Remarques :

- On peut aussi multiplier membre à membre des inégalités **si elles sont positives**.
- On ne peut pas diviser ou soustraire membre à membre des inégalités.

3) INÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'inégalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'inéquation.

Deux inéquations **équivalentes** sont deux inéquations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Exemple :

On retranche $2x$ à chaque membre

On ajoute 7 à chaque membre

On divise chaque membre par 3

$5x-7 \leqslant 2x+8 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions est donc :

Méthode : Inéquation produit

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax+b)(cx+d)<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax+b)(cx+d)$.

La méthode est identique pour $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$, $(ax+b)(cx+d) \geqslant 0$ et $(ax+b)(cx+d)>0$

Exemple :

Résolution de $(-3x+1)(2x-5)>0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

Plusieurs méthodes pour étudier le signe de $2x-5$:

- On peut résoudre : $2x-5>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>5 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{5}{2}$

On en déduit immédiatement les solutions de l'inéquations $2x-5<0$ et les solutions de l'équation $2x-5=0$ et donc la valeur charnière $\frac{5}{2}$.

- On peut aussi utiliser les propriétés sur la croissance de la fonction affine f définie par $f(x)=2x-5$

On procède de la même façon pour $-3x+1$: $-3x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x>-1 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{3}$

On en déduit le signe de $(-3x+1)(2x-5)$.

x			
$-3x+1$			
$2x-5$			
$(-3x+1)(2x-5)$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

Méthode : Inéquation quotient

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $\frac{ax+b}{cx+d}<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$.
La méthode est identique pour $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$, $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ et $\frac{ax+b}{cx+d}\geq 0$

Exemple :

Résolution de $\frac{-3x+1}{2x-5}<0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

On en déduit le signe de $\frac{-3x+1}{2x-5}$.

x			
$-3x+1$			
$2x-5$			
$\frac{-3x+1}{2x-5}$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

Équations du premier degré

Ex 8-1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $11x-(x+1)=x-1$

2) $\frac{2}{7}x=0$

3) $\frac{2x-4}{8}=5$

4) $\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{10}x+\frac{5}{6}$

5) $\sqrt{2}x-1=\sqrt{8}x+2$

Ex 8-2 : Produit en croix

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous (sans oublier les valeurs interdites)

1) $\frac{3x-5}{x^2+3}=0$

2) $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{2}$

3) $\frac{3}{x-4}=\frac{5}{2x+2}$

Équations du second degré

Ex 8-3 : Vrai ou faux

1) Un produit A B est nul si et seulement si A est nul et B est nul.

2) L'équation $(x+2)(x+2)=0$ possède deux solutions distinctes.

3) L'équation $(x-6)(x+10)=0$ possède pour solutions -10 et 6.

4) Une équation produit $(ax+b)(cx+d)=0$ (avec a et c deux réels non nuls) admet toujours une ou deux solutions.

Ex 8-4 : Équations produits

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(5x+1)(x-12)=0$

2) $(2-7x)(11x-2)=0$

3) $(7-6x)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0$

Pour les équations 4), 5) et 6) commencer par transformer les équations en équations produits.

4) $x(x+6)=3(x+6)$

5) $x^2(1-3x)+4(6x-2)=0$

6) $7-x^2=2x-2\sqrt{7}$

Ex 8-5 : Équations du type $X^2=a$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2=20$

2) $x^2=-7$

3) $x^2=0$

4) $t^2=3-\pi$

5) $(x-2)^2=8$

6) $3x^2=7$

Mises en équation

Ex 8-6 : Entiers consécutifs

Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2019.

Ex 8-7 : Aire d'un carré

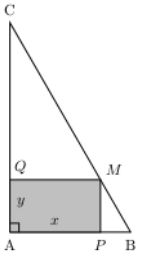
Si on augmente de 2 m la longueur du côté d'un carré, l'aire augmente de 20 m^2 . Quelle est l'aire en m^2 de ce carré ?

Ex 8-8 : Age du père

Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans , 9 ans et 12 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Ex 8-9 : Un rectangle dans un triangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et AC = 7 cm.
M un point variable sur le côté [BC].
P est le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (AC) passant par M , Q est le point d'intersection de (AC) et de la parallèle à (AB) passant par M .
On note x la distance AP et y la distance AQ



1) Quelle est la nature du quadrilatère APMQ ?

2) Dans quel intervalle I varie x ?

3) Démontrer que pour tout x de l'intervalle I on a : $y=7-\frac{7}{4}x$

4) Pour quelle valeur de x APMQ est-il un carré ?

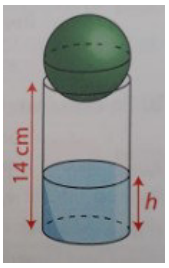
5) a) Exprimer le périmètre de APMQ en fonction de x .

b) Trouver x pour que ce périmètre soit égal à 10 cm .

6) a) Exprimer l'aire du rectangle APMQ en fonction de x

b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à x cm^2 ?

Ex 8-10 : Cylindre et boule



Un cylindre a pour rayon 4 cm et pour hauteur 14 cm.
Une boule a pour rayon 4 cm.
Quelle hauteur d'eau maximum h (en cm), le cylindre doit-il contenir pour que, en plongeant la boule dans ce récipient l'eau ne déborde pas ?

Inégalités

Ex 8-11 : Comparer des nombres.

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Dans chacun des cas, comparer les nombres :

1) $3a-5$ et $3b-5$

2) $-4a+7$ et $-4b+7$

3) $\frac{-\sqrt{2}a-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{2}b-\sqrt{3}}{2}$

4) $3a-8$ et $3b-7$

On suppose maintenant : $0 \leqslant a \leqslant b$

5) $5a-6$ et $7b-6$

6) $2a+8$ et $3b+9$

Ex 8-12 : Manipuler les inégalités

1) Si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 2$, que peut-on dire de $3x+4y$?

2) Si $x \leqslant 5$ et $y \geqslant 4$, que peut-on dire de $2x-3y$?

3) Si $x<6$ et $y>-10$, que peut-on dire de $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}$?

4) Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 0$, que peut-on dire de $4x+2y$?

5) Si $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, que peut-on dire de $3x+4y$?

6) Si $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, que peut-on dire de $x-y$?

7) Si $x \geqslant 4$ et $y \geqslant 3$, que peut-on dire de xy ?

8) Si $x \geqslant 4$ et $0<y \leqslant 2$, que peut-on dire de $\frac{x}{y}$?

Ex 8-13 : Contre-exemple

Justifier avec un contre-exemple que les affirmations ci-dessous sont fausses :

1) Si $x \leqslant -3$ et $y \leqslant -4$, alors $xy \leqslant 12$

2) Si $x \geqslant -3$ et $y \geqslant 5$, alors $xy \geqslant -15$

3) Si $100 \leqslant x \leqslant 400$ et $2 \leqslant y \leqslant 4$, alors $50 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 100$

Ex 8-14 : x , x^2 et x^3

1) Soit un réel x , tel que $x \geqslant 1$. Justifier que $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$

2) Soit un réel x , tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Justifier que $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$

Ex 8-15 : $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$

Soit a un réel strictement positif.
Comparer $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$ en étudiant leur quotient dans chaque cas :

1) $a \leqslant 1$

2) $a > 1$

Ex 8-16 : Quotient $\frac{A}{B}$

Soit n un entier naturel non nul . On pose $A = \frac{0,7^n}{n}$ et $B = \frac{0,7^{n+1}}{n+1}$.

Comparer A et B en étudiant le quotient $\frac{A}{B}$.

Inéquations du premier degré

Ex 8-17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x+5 \geqslant x-3$

2) $-3x < 0$

3) $3x-(5x-3) < x$

4) $\frac{2x-4}{7} \geqslant 0$

5) $\frac{7}{15}x+4 > \frac{x}{3}-1$

6) $x(x-6) < x(x+5)$

7) $\frac{2x-5}{4} \leqslant \frac{2x-3}{5}$

8) $x(2+2x) \geqslant 2x(x-10)$

Ex 8-18 : Algorithme -Python

Compléter ce programme écrit en Python, afin qu'il affiche l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $ax+b>0$ (avec $a\neq 0$)

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=-b/a
if   ...                    :
    print("Les solutions sont les réels x> ",  ...      ))
else :
    print("Les solutions sont les réels x< ",  ...      ))
```

Inéquations produits

Ex 8-19 : Vrai ou faux

1) Un produit $A\times B$ est positif si et seulement si A est positif et B est positif.

2) Le produit $(x-2)(x+6)$ est positif lorsque $x\leqslant -100$.

3) Le produit $(x+3)(x+3)$ est positif quelque soit le réel x .

4) L'inéquation $x^2\leqslant 0$ possède un seul nombre pour solution.

5) L'inéquation $x^2<0$ ne possède aucune solution.

Tous les réels de l'intervalle [0;1] sont solutions de l'inéquation :

6) a) $x^2\geqslant 0$ b) $x^2<1$ c) $x^2\leqslant 4$ d) $x^2>0$

Ex 8-20 : Première ligne du tableau de signes

Parmi les nombres suivants, lesquels interviennent dans la première ligne du tableau de signes du produit $(3x+1)(5x-7)$

$$-3\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 3\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ \frac{7}{5}\ ;\ -\frac{5}{7}\ ;\ -\frac{7}{5}$$

Ex 8-21 : Résolution d'inéquations produits

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(x-2)(4-x)<0$

2) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\geqslant 0$

3) $(x+\sqrt{3})(x-3)\geqslant 0$

4) $x^2\leqslant 8$

5) $x^2\leqslant 0$

Pour les équations 6), 7) et 8) commencer par transformer les inéquations en inéquations produit

6) $x^2-4+(x+2)(2x+5)<0$

7) $x^2-5<(x+\sqrt{5})(x-2)$

8) $(2x-1)(x+3)\geqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

<u>Ex 8-22 :</u> Algorithme -Python : balayage

On considère l'équation (E): $8x^3+14x^2-2x-3,5=0$
On cherche a trouver les solutions appartenant à l'intervalle $[-1,5;1,5]$.

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en python afin qu'il teste tous les nombres de -1,5 à 1,5 avec un pas de p.

```
p=float(input("p="))
x=-1.5
while   ...                    :
      if  (8*x**3+14*x**2-2*x-3.5==0) :
            print(x)
      x=   ...
```

2) Tester ce programme avec p=0,25, p=0,1 et p=0,01

3) A-t-on résolu l'équation (E) avec ce programme ?

4) Déterminer le réel c tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$8(x^2-0,25)(x+c)=8x^3+14x^2-2x-3,5$$

5) En déduire les solutions de l'équation (E).

Inéquations quotients

Ex 8-23 : Résolution d'inéquations quotients

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$

b) $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$

c) $\frac{3x}{4x+9} \geqslant 0$

d) $\frac{2x-10}{11x+2} > 0$

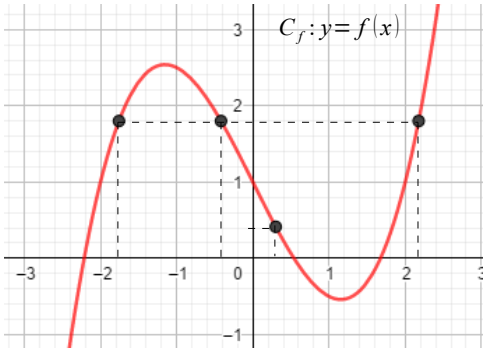
Chapitre 9 - FONCTIONS : COURBES REPRÉSENTATIVES

1) COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION

On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition :

On appelle **représentation graphique (ou courbe re présentative) d'une fonction** f l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition .



- On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f .
- On dit que la courbe C_f a pour **équation cartésienne** $y = f(x)$ relativement au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
- $f(a)$ est l'unique **image** de a . (On place a sur l'axe des abscisses et on lit son image $f(a)$ sur l'axe des ordonnées)
- x_1 , x_2 et x_3 sont **les antécédents** de b. (On place b sur l'axe des ordonnées et on lit ses antécédents x_1 , x_2 ... sur l'axe des abscisses)

Remarques :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de D_f , $f(x)$ est unique.
On en déduit une interprétation géométrique : toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en au plus un point . Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction …

- Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.

2) FONCTION PAIRE – FONCTION IMPAIRE

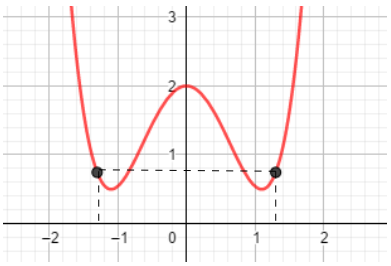
A) FONCTION PAIRE

Définitions :

On dit qu'un ensemble I est **centré en zéro** si pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I.

Soit f une fonction définie sur un ensemble I centré en zéro.

On dit que f est **paire** si, pour tout réel x de I , $f(-x) = f(x)$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour **axe de symétrie**.

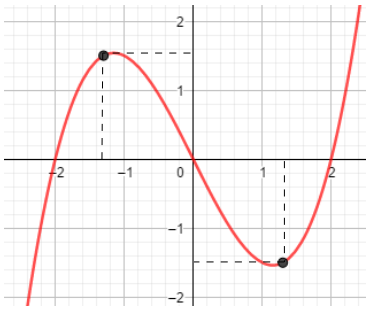
Remarque :

B) FONCTION IMPAIRE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble I **centré en zéro**.

On dit que f est **impaire** si, pour tout réel x de I , $f(-x) = -f(x)$.



Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour **centre de symétrie**.

Remarques :

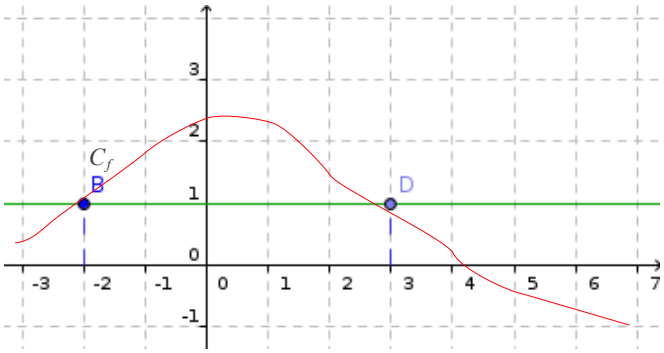
-

-

3) RÉSOLUTIONS GRAPHIQUES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

A) $f(x) = b$ - $f(x) > b$

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;7]$.



Résolution d'une équation :

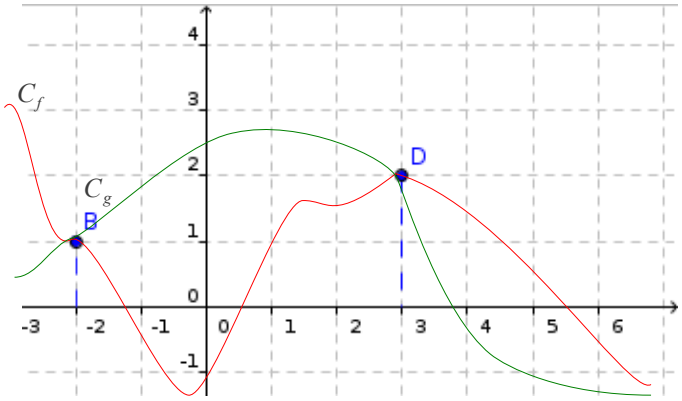
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = 1$.

Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « en dessous » de la droite d'équation $y = 1$.

B) $f(x) = g(x)$ - $f(x) > g(x)$

On a représenté les courbe C_f et C_g représentant deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « au dessus » des points de la courbe C_g.

Courbes représentatives

Ex 9-1 : Écriture mathématique

Traduire en écriture mathématique :
1) La courbe représentative de f passe par le point A(5 ;-7)

2) L'abscisse du point d'ordonnée 1 de la courbe représentative de f est 4

3) La courbe représentative de f passe par l'origine du repère.

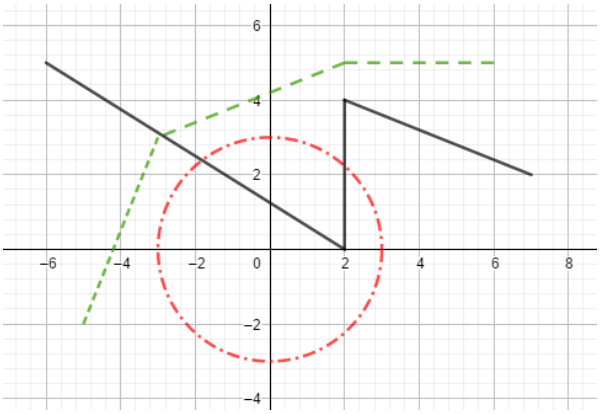
Ex 9-2 : Vrai ou faux

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note *C* la courbe représentative d'une fonction f et $M(a;b)$ un point de *C*.

		Vrai ou faux
1	$f(a)=b$	
2	Si $a=0$, alors $M\in(Ox)$.	
3	Si $f(2)=3$, alors M(3;2) appartient à *C*.	
4	Si $b=0$, alors $M\in(Ox)$.	
5	Si *C* coupe la droite d'équation $y=2$ au point A, alors l'ordonnée de A est 2.	
6	Si $f(3)=0$, alors la courbe C et l'axe des abscisses ont au moins un point en commun.	
7	Si $f(3)=0$, alors la courbe C et l'axe des abscisses ont au plus un point en commun.	
8	S'il existe un réel a tel que $f(a)=a$, alors la courbe *C* et la droite d'équation $y=x$ ont au moins un point en commun.	

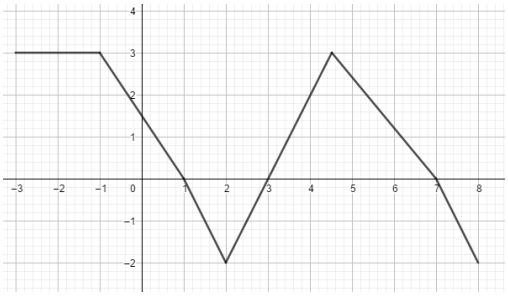
Ex 9-3 : Représentation graphique d'une fonction ?

Pour chacune des courbes ci-dessus, indiquer s'il s'agit de la représentation graphique d'une fonction et si oui en donner son ensemble de définition.



Ex 9-4 : Lecture graphique

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe *C* ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction.



1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les abscisses des points de *C* ayant une ordonnée égale à 3.

3) Déterminer les abscisses des points de *C* ayant une ordonnée égale à -3.

4) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Ex 9-5 : Courbe à partir d'un tableau de signes

Dans un repère orthonormé, construire une courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;5]$, vérifiant le tableau de signes suivant.

x	-4		-2		0		3		4		5
$f(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Fonctions paires et impaires

Ex 9-6 : Compléter ...

Compléter les phrases ci-dessous :

1) Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(1)=3$ alors

$f(-1) = \ldots$

2) Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(-5)>0$ alors

$f(5) = \ldots$

3) Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ alors

$f(0) = \ldots$

4) Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(-5)>0$ alors

$f(5)$ …

Ex 9-7 : Ensembles centrés en zéro

Parmi les ensembles ci-dessous, entourer ceux qui sont centrés en zéro.

$]-2;2]$, $[-3;3]$, $]-5;-4]\cup]4;5[$, $]-5;-4[\cup]4;5[$,

$]-5;-4]\cup[4;5[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}\setminus[-3;3]$, $\mathbb{R}\setminus[-3]$, $\mathbb{R}\setminus[-2;3]$

Ex 9-8 : Conjecturer avec la calculatrice

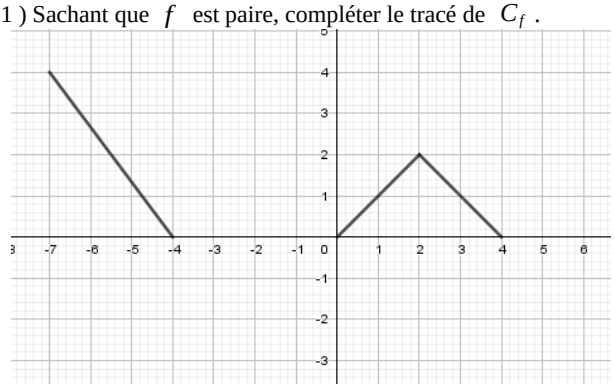
En utilisant une symétrie éventuelle de la représentation graphique, indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

$f(x)=2x^2-5$		$f(x)=\sqrt{x+1}$	
$f(x)=5x^3-\frac{1}{x}$		$f(x)=\sqrt{x^2+1}$	
$f(x)=3x^2-2x$		$f(x)=\frac{x-2}{x-3}$	
$f(x)=\frac{3x^2+1}{x}$		$f(x)=3x-5$	
$f(x)=-3x$		$f(x)=(3x^3-2x)^2$	

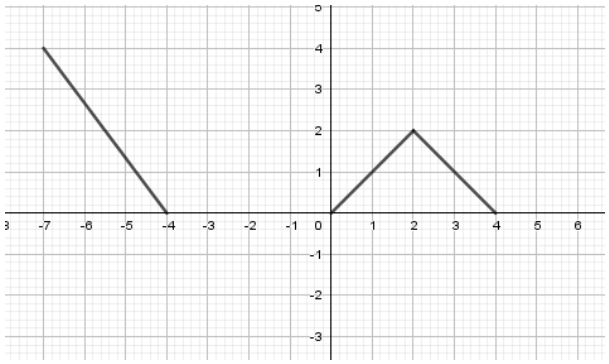
Ex 9-9 : Compléter un tracé

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur $[-7;7]$ est partiellement représentée ci-contre.

1) Sachant que f est paire, compléter le tracé de C_f .



2) Même question sachant que f est impaire.



Ex 9-10 : Étudier la parité d'une fonction

Dans chacun des cas indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

a) $f(x)=x^3-5x$

b) $f(x)=3x^4+2x^2-5$

c) $f(x)=x(x-2)$

d) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

e) $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$

f) $f(x)=\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$

Ex 9-11 : Parité d'un polynôme

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ où a, b, c, d et e sont des réels.
Comment faut-il choisir a, b, c, d et e pour que :

1) la fonction f soit paire ?

2) la fonction f soit impaire ?

Ex 9-12 : $\boldsymbol{g(x)=f(x)+f(-x)}$ **et** $\boldsymbol{h(x)=f(x)-f(-x)}$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+f(-x)$ et $h(x)=f(x)-f(-x)$
1) Montrer que g est paire.

2) Montrer que h est impaire

Ex 9-13 : $\boldsymbol{f(x)=\frac{a}{x}}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{a}{x}$ où $a\in\mathbb{R}^*$.
1) Montrer que f est une fonction impaire.

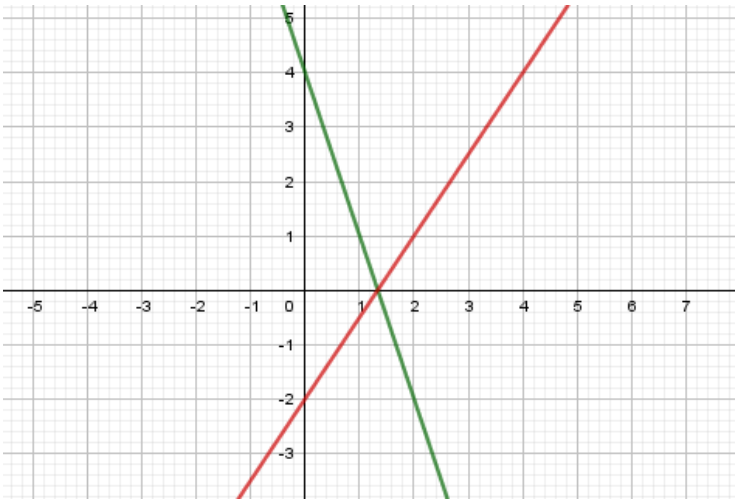
2) On a $f(-1)=\frac{3}{5}$. Déterminer l'expression de f .

Résolutions graphiques d'inéquations

Ex 9-14 : Avec des fonctions affines

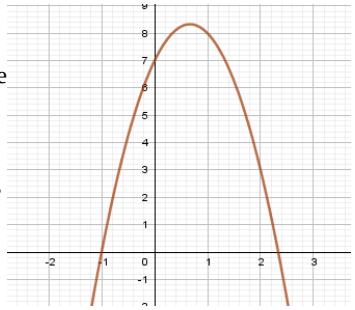
Les fonctions f et g sont définies par $f(x)=-3x+4$ et $g(x)=1,5x-2$ et sont représentées graphiquement ci-dessous.

Résoudre les équations $f(x)=2$ et $g(x)=3$ d'abord graphiquement, en traçant des traits, puis en résolvant chaque équation par le calcul.



Ex 9-15 : Antécédents

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(7-3x)$.
Sa représentation graphique est dans le repère ci-contre.

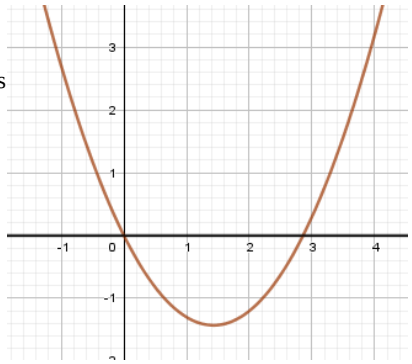


1) D'après la représentation graphique de f , déterminer le ou les éventuels antécédents de 0.
Arrondir à l'unité ou au dixième.

2) Retrouver les valeurs exactes des résultats précédents en résolvant une équation.

Ex 9-16 : Antécédents

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,7x^2-2x$.
Sa représentation graphique est dans le repère ci-contre.



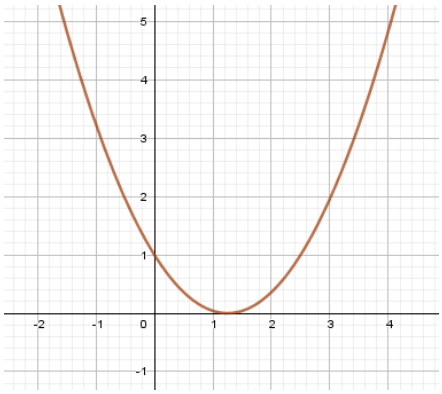
1) D'après la représentation graphique de f , déterminer le ou les éventuels antécédents de 0.
Arrondir à l'unité ou au dixième.

2) Retrouver les valeurs exactes des résultats précédents en résolvant une équation (factoriser d'abord $f(x)$).

Ex 9-17 : Antécédents

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(0,8x-1)^2$.

Sa représentation graphique est dans le repère ci-contre.

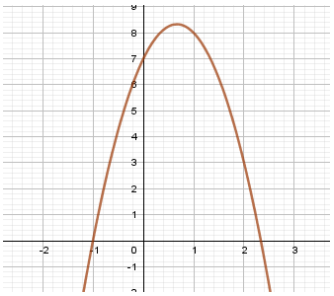
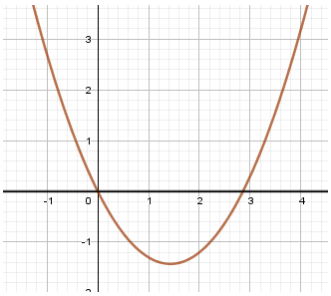
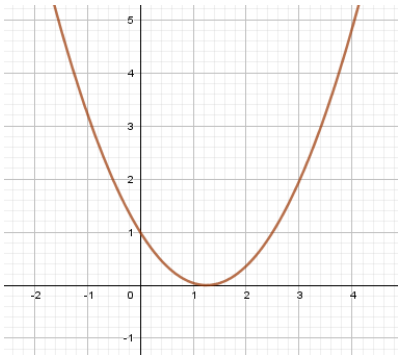


1) D'après la représentation graphique de f , déterminer le ou les éventuels antécédents de 4. Arrondir à l'unité ou au dixième.

2) Retrouver les valeurs exactes des résultats précédents en résolvant une équation.

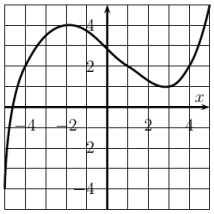
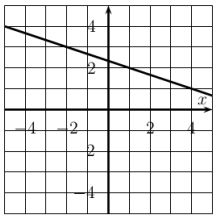
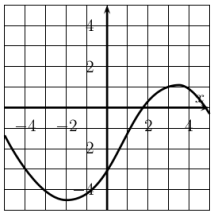
Ex 9-18 : Résolutions graphiques d'inéquations

Les représentations graphiques ci-dessous sont celles des exercices 15, 16, 17.
Résoudre graphiquement chaque fois l'inéquation indiquée. Il faudra utiliser les résultats de ces exercices et colorier l'ensemble des solutions.

$f(x)\geqslant 0$	$f(x)\geqslant 0$
	
$f(x)\leqslant 4$ 	

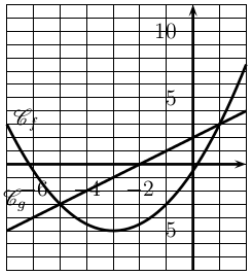
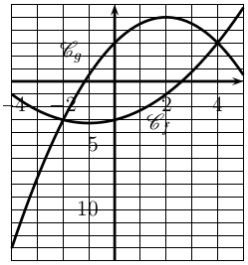
Ex 9-19 : Résolutions graphiques d'inéquations

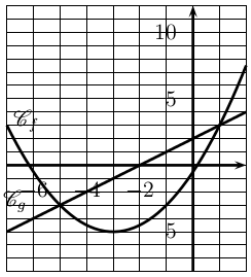
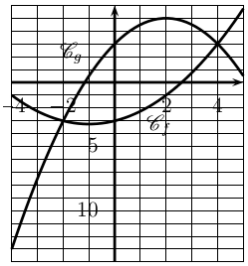
L'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est l'intervalle $[-5;5]$.
Résoudre graphiquement chaque fois l'inéquation indiquée, colorier l'ensemble des solutions, et indiquer l'ensemble des solutions.

$f(x)<2$	$f(x)>3$	$f(x)\leqslant -3$
		
S= ...	S= ...	S= ...

Ex 9-20 : Résolutions graphiques d'inéquations

Résoudre graphiquement chaque fois l'inéquation indiquée, colorier l'ensemble des solutions, et indiquer l'ensemble des solutions.

$f(x)>g(x)$ (l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est l'intervalle $[-7;2]$)	$f(x)\leqslant g(x)$ (l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est l'intervalle $[-4;5]$)
	
S= ...	S= ...

$f(x)\leqslant g(x)$ (l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est l'intervalle $[-7;2]$)	$f(x)>g(x)$ (l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est l'intervalle $[-4;5]$)
	
S= ...	S= ...

Ex 9-21 : Algorithme - Python

1) Expliquer ce que fait le programme écrit en Python ci-dessous :

```
k=int(input("k="))
for i in range(k+1):
    A=i**2-11*i+20
    if (A>0):
        print(i)
```

2) Modifier ce programme pour qu'il affiche tous les entiers naturels i de l'intervalle $[k_1;k_2]$ tels que $5 \leqslant f(i) \leqslant 10$

Sur l'ensemble du chapitre

Ex 9-22 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

1) Étudier la parité de la fonction f .

2) a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b) Étudier le signe de $1-f(x)$ pour tout réel x .

c) Étudier le signe de $1+f(x)$ pour tout réel x .

3) En déduire que la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est située entre les droites d'équation $y=-1$ et $y=1$.

4) Dans un repère, tracer la portion C' de la courbe C_f dont les points ont une abscisse comprise entre -3 et 3.

5) Soit d la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$.

a) Déterminer graphiquement (avec une calculatrice) les coordonnées du point A intersection de d et C' .

b) Montrer que $x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

c) En déduire les coordonnées exactes de A.

e) Résoudre graphiquement dans [-3;3] l'inéquation $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

f) Sur quel intervalle contenu dans [-3;3] la courbe C' est-elle au-dessus de d ?

Chapitre 10 - STATISTIQUES A UNE VARIABLE

1) VOCABULAIRE

A) GÉNÉRALITÉS

Définition :

L'ensemble sur lequel on travaille en statistique est appelé **population.**

Si cet ensemble est trop vaste, on en restreint l'étude à une partie appelée **échantillon.**

Un élément de cet ensemble est appelé **individu**.

La particularité commune que l'on étudie est appelée **caractère ou variable.**

Les valeurs prises par le caractère sont aussi appelées les **modalités**.

B) CARACTÈRE QUALITATIF ET CARACTÈRE QUANTITATIF

Définition :

Si la particularité étudiée ne s'exprime pas par un nombre, il s'agit d'un **caractère qualitatif.**

Exemple : Dans une population, être marié(e) est un caractère qualitatif à deux valeurs : oui ou non.

Définition :

Si cette particularité s'exprime par un nombre *(et que l'on peut ordonner ces nombres)* , il s'agit d'un **caractère quantitatif.**

- Si les valeurs du nombre exprimé sont isolées, il s'agit d'un **caractère discret.**
- Par contre, si ces valeurs sont prises dans tout un intervalle de $\mathbb{R}$, il s'agit d'un **caractère continu.**

Dans ce cas, le nombre désignant la modalité se note en général x_i.

Exemple : Caractère discret

Le nombre de frères et sœurs d'un élève est un caractère quantitatif discret car il ne peut prendre que les valeurs

Exemple : Caractère continu

Le temps de révision pour un contrôle pourrait être n'importe quel nombre t, tel que
Les valeurs de ce caractère sont regroupées en **classes**

Remarques :

- L'amplitude des classes n'est pas forcément la même.
- En général, on fait l'hypothèse d'une répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe …

C) EFFECTIFS ET FRÉQUENCES

Définition :

Le nombre d'individus, noté n_i, d'une modalité (ou valeur) est appelé **effectif.**

Le nombre total d'individus, noté N, de la population est appelé **effectif total.**

Le rapport est appelé **fréquence.**

Remarques :

- f_i est un nombre toujours compris entre Souvent, les nombres f_i s'expriment par un pourcentage.
- La somme des nombres f_i est toujours égale à 1.

Définition :

Une **série statistique** est l'ensemble des résultats d'une étude : valeurs du caractère et effectifs correspondants.

On représente souvent une série statistique sous forme d'un tableau.

Dans le cas d'une variable quantitative, on peut ordonner les différentes valeurs de la plus petite à la plus grande (ou de la plus grande à la plus petite) puis additionner les effectifs successifs : on obtient ainsi **les effectifs cumulés croissants** (ou décroissants).

On obtient de la même façon **les fréquences cumulées croissantes** (ou décroissantes).

2) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Pour le cas général, on considère une série statistique (x_i) quantitative discrète :

Valeurs (x_i)	x_1	x_2	…	x_k	Total
Effectifs (n_i)	n_1	n_2	…	n_k	N
Fréquences (f_i)	f_1	f_2	...	f_k	1

On représente généralement une série quantitative discrète par **un diagramme en bâtons** ou en barres.

On peut aussi parfois utiliser un diagramme circulaire ou semi-circulaire, même si ces derniers sont plutôt réservés aux séries qualitatives.

Exemple: Voici les notes obtenues à un devoir dans une classe de seconde de 23 élèves.

0 – 12 – 9 – 10,5 – 2,5 – 8 – 3 – 8 – 3 – 14 – 6 – 2,5 – 6 – 16,5 – 14 – 6 – 9 – 3 – 6 – 14 – 12 – 3 – 9

On se propose de ranger ces valeurs dans un tableau:

Valeurs (x_i)	0	2,5	3	6	8	9	10,5	12	14	16,5
Effectifs (n_i)	1	2	4	4	2	3	1	2	3	1
Fréquences (f_i)										
Effectifs cumulés croissants										
Fréquences cumulées croissantes										

3) LES PARAMÈTRES DE TENDANCE CENTRALE

Définition :

On appelle **mode** d'une série statistique une valeur du caractère dont l'effectif associé est le plus grand.

Exemple : La série de notes de la seconde admet deux modes :

Définition :

La moyenne de la série (x_i) est le nombre réel, noté $\overline{x}$, tel que :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

Exemple : La moyenne des notes du devoir est :

- à partir de la distribution des effectifs :

- à partir de la distribution des fréquences :

Remarque :
Si dans une série de notes, une note apparaît de manière exceptionnelle (0 par exemple) , on peut calculer la moyenne de la série privée de cette valeur . On dit qu'il s'agit d'une **moyenne élaguée**.

Propriété : Linéarité de la moyenne

Soit a et b deux nombres réels.

Si la série (x_i) a pour moyenne $\bar{x}$, alors la série (ax_i+b) a pour moyenne $\bar{x}'=a\bar{x}+b$

Preuve :

$$\bar{x}'=\frac{(ax_1+b)n_1+(ax_2+b)n_2+\ldots+(ax_k+b)n_k}{N} =$$

Ce qui donne $\bar{x}'$ =

Définition :

La médiane est une valeur Me du caractère qui partage la population en deux sous-ensembles de même effectif. Les éléments du premier sous-ensemble correspondent à des valeurs du caractère inférieures ou égales à Me, ceux du second correspondent à des valeurs du caractère supérieures ou égales à Me.

Dans la pratique :

- Si l'effectif total N est impair, la médiane est la valeur du caractère située au rang $\frac{N+1}{2}$
- Si l'effectif total N est pair, la médiane est tout nombre situé entre la valeur du caractère occupant le rang $\frac{N}{2}$ et la valeur du caractère occupant le rang $\frac{N}{2}+1$ (On choisit souvent la demi-somme)

Exemple : Dans la série de notes de la classe de seconde, on a 23 valeurs

4) LES PARAMÈTRES DE DISPERSION

A) ÉTENDUE ET QUARTILES

Définition :

On appelle **étendue** , notée e d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur, notée Max du caractère et la plus petite, notée Min .

$$e = Max - Min$$

Exemple : L'étendue de la série de notes de la seconde est $e =$ _____

Définition :

Le premier Quartile Q_1 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs de celle-ci lui soient inférieures ou égales.
Le troisième Quartile Q_3 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs de celle-ci lui soient inférieures ou égales.

Dans la pratique :

- Si $\frac{N}{4}$ est un entier, le premier quartile Q_1 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang $\frac{N}{4}$ et le troisième quartile Q_3 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang $\frac{3N}{4}$.
- Si $\frac{N}{4}$ n'est pas un entier, le premier quartile Q_1 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{4}$ et le troisième quartile Q_3 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang immédiatement supérieur à $\frac{3N}{4}$.

Exemple :

Pour la série des notes de seconde, il y a 23 valeurs.

donc le premier quartile est la sixième valeur de la série, donc $Q_1 =$

donc le troisième quartile est la dix-huitième valeur de la série, donc $Q_3 =$

Remarques :

- Une série admet trois quartiles ; le deuxième, dont on ne fait pas usage au lycée, est associé à la valeur 50% .
- De nombreuses calculatrices considèrent les quartiles comme les médianes des deux séries obtenues après avoir partagé la série initiale par sa médiane … ce qui explique les différences constatées.
  Dans la pratique, ces différences ont peu d'importance vu la taille des séries.
- De la même façon, on peut définir les déciles d'une série statistique.

Définition :

L'intervalle interquartile d'une série statistique est l'intervalle [Q_1 ; Q_3] . Il contient au moins 50 % des valeurs.

L'écart interquartile d''une série statistique est le nombre $Q_3 - Q_1$

Exemple: L'écart interquartile de la série de notes de la classe de seconde est

Remarques :

- L'écart interquartile mesure la dispersion des valeurs autour de la médiane ; plus l'écart est petit, plus les valeurs de la série appartenant à l'intervalle interquartile sont concentrées autour de la médiane.
- Contrairement à l'étendue qui mesure l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur, l'écart interquartile élimine les valeurs extrêmes qui peuvent être douteuses, cependant il ne tient compte que de 50% de l'effectif …
- On peut correctement résumer une série statistique par le couple : **(médiane ; intervalle interquartile)**

B) ÉCART TYPE

Pour chaque valeur x_i de la série, son « éloignement » de la moyenne peut se mesurer par la distance $|x_i - \bar{x}|$. La moyenne pondérée de toutes ces distances fournit un très bon paramètre de dispersion. On l'appelle écart absolu moyen. Mais puisque la valeur absolue ne se prête pas trop aux calculs, il n'y a pas d'application dans les résultats obtenus en statistique.

Définitions :

La variance V est la moyenne des carrées des écarts des valeurs x_i à la moyenne $\bar{x}$, c'est à dire:

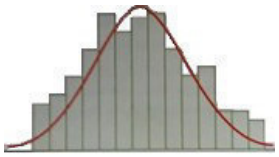
$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{p} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

L'écart type σ est la racine carrée de la variance: $\sigma = \sqrt{V}$

Remarques :

- L'écart type est un paramètre plus fin que l'étendue, car il tient compte de la répartition des valeurs.
- L'écart type à la même unité que les valeurs de la série étudiée.
- L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne . Plus l'écart type est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne.

  L'usage de l'écart type est particulièrement intéressant, lorsque le diagramme qui représente la série est assez symétrique et à la forme d'une courbe en cloche.
  On a alors environ 68 % des valeurs comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$



- On peut correctement résumer une série statistique par le couple : **(moyenne ; écart type)**

Moyenne pondérée

Ex 10-1 : Moyenne et fréquences

Un test a été donné à 50 élèves de seconde. Voici la répartition des notes

Notes	5	10	15	20	total
Effectifs	8	16	14	12	50

1) Calculer la moyenne de ce devoir, détailler le calcul en une seule expression.

2) a) Compléter le tableau ci-dessous.

Notes	5	10	15	20	total
Fréquences	$\frac{8}{50}$				

b) Multiplier chaque note par sa fréquence et ajouter les 4 résultats. Quel résultat retrouve-t-on ?

Ex 10-2 : Moyenne et fréquences en %

Le tableau ci-dessous indique les résultats d'une enquête statistique dans un village où l'on a relevé le nombre d'enfants par famille.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence en %	21	28	19	13	9	7	2	1

Calculer le nombre moyen d'enfants par famille. Arrondir au dixième.

Linéarité de la moyenne

Ex 10-3 : Calcul mental

La série 71 ; 80 ; 83 ; 88 ; 92 a pour moyenne 82,8 .

Déterminer mentalement les moyennes des séries ci-dessous :
1) 271 ; 280 ; 283 ; 288 ; 292

2) 0,71 ; 0,8 ; 0,83 ; 0,88 ; 0,92

3) 144 ; 162 ; 168 ; 178 ; 186

Ex 10-4 : Retrancher la moyenne

On considère la série suivante : 10 ; 14 ; 14 ; 11 ; 11 ; 3 ; 11 ; 10 ; 21; 10

1) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série.

2) Sans calcul, déterminer la moyenne de la série obtenue, en retranchant $\bar{x}$ à chaque valeur de la série ci-dessus.

Ex 10-5 : Salaire moyen

Dans une entreprise, le salaire moyen est 1930 € brut mensuel.

1) Si tous les salaires augmentent de 5 %, quel sera le nouveau salaire moyen ?

2) Si tous les salaires augmentent de 50 € , quel sera le nouveau salaire moyen ?

Ex 10-6 : Harmonisation

Dans le jury 1 , la moyenne des copies est de 12 sur 20 et l'étendue est égale à 8.
Dans le jury 2 , la moyenne des copies est de 11 sur 20 et l'étendue est égale à 9.

1) Le jury 1 augmente chaque note de 3 points.
Déterminer la nouvelle moyenne et la nouvelle étendue.

2) Le jury 2 diminue chaque note de 20 % et ajoute 3 points.
Déterminer la nouvelle moyenne et la nouvelle étendue.

3) Dans le jury 3, la moyenne est de 14 et l'étendue est de 5. Quelles opérations doit-on effectuer sur les notes pour obtenir la même moyenne et la même étendue que dans le jury 1 ?

Médiane, étendue, quartiles, fréquences cumulées

Ex 10-7 : Vrai ou faux

1) La médiane est égale à la moitié de l'effectif total.

2) La moyenne et la médiane sont égales.

3) La médiane n'est pas toujours une valeur de la série.

4) Le premier quartile est égal au quart de l'effectif total.

5) Les quartiles et les déciles sont des valeurs de la série.

6) Pour trouver la moyenne, on additionne toutes les valeurs puis on divise par l'effectif total.

7) Dans un diagramme circulaire, les angles au centre sont proportionnels aux effectifs.

8) Si la moyenne d'une série est égale à 60, alors il y a autant de valeurs supérieures ou égales à 60 que de valeurs inférieures ou égales à 60.

9) Si la moyenne d'une série d'effectif total 20 est égale à 2 , alors la somme de toutes les valeurs de cette série est égale à à 40.

10) Si la moyenne des élèves d'une classe est égale à 17 et la moyenne des élèves d'une autre classe est égale à 13, alors la moyenne des élèves de l'ensemble des deux classes est égale à 15.

11) 1000 candidats ont passé un concours, mais seulement 500 ont été admis . La moyenne des notes obtenues par les 1000 candidats est égale à 9,4 . Si un candidat a obtenu une note égale à 10, alors il est certain d'être admis

Ex 10-8 : QCM

1) Si l'effectif total est 30, alors la médiane est :

a) La 15eme valeur b) la 16eme valeur ,

c) entre la 15ème valeur et la 16ème valeur d) 15 e) 16

2) Si l'effectif total est 31, alors la médiane est :

a) La 15eme valeur b) la 16eme valeur ,

c) entre la 15ème valeur et la 16ème valeur d) 15 e) 16

3) Pour trouver les quartiles et les déciles, il faut :

a) ranger les effectifs en ordre croissant.
b) ranger les effectifs en ordre décroissant.
c) ranger les valeurs en ordre décroissant.
d) ranger les valeurs en ordre croissant.

4) Si l'effectif total est 22, alors le 1er quartile est :

a) la 5^{èeme} valeur b) la 6ème valeur c) 5,5 d) la 7ème valeur

5) Si l'effectif total est 22, alors le 3ème quartile est :

a) 17 b) la 16ème valeur c) 16,5 d) la 17ème valeur

Ex 10- 9 : Mode, étendue, médiane, quartiles, calculatrice

Dans un centre aéré, on a mesuré la taille de vingt enfants de six ans.
116; 121; 114; 128; 125; 112; 118; 119; 114; 108 ; 121; 111; 120; 122; 118; 119; 112; 122; 108; 113.

1) Déterminer l'étendue, le mode, la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique.

2) Que signifient ces nombres ?

3) Retrouver ces résultats à l'aide de la calculatrice.

Ex 10-10 : Écart interquartile

Le tableau ci-dessous indique les capacités des disque durs, en Go, des ordinateurs d'un magasin.

Go	80	160	250	320	500	800	1000	1150
Effectifs	2	9	11	7	5	2	4	3

1) Déterminer la médiane, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série.

2) Estimer le pourcentage d'ordinateurs dont la capacité est inférieure ou égale à Q_3 .

3) Calculer le pourcentage d'ordinateurs dont la capacité est inférieure ou égale à Q_3 . (arrondir au centième)

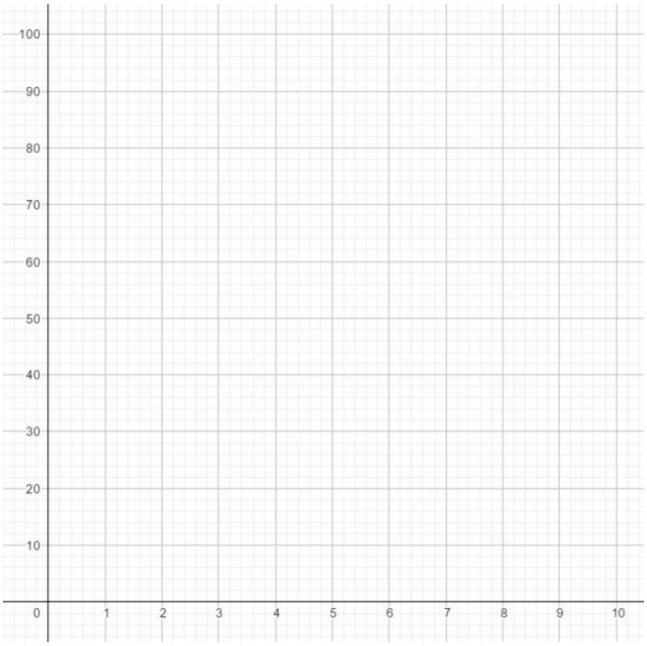
4) Calculer le pourcentage d'ordinateurs dont la capacité appartient à l'intervalle interquartile . (arrondir au centième)

Ex 10-11 : Médiane, quartiles, fréquences cumulées

Pour 121 portées de souris blanches, on a dénombré les souriceaux. Les résultats sont dans le tableau ci-dessous.
1) Compléter le tableau ci-dessus, puis établir la courbe des fréquences cumulées croissantes. (en %)

Nombre de petits	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	7	11	16	17	26	31	11	1	1
Fréquences en %									
Effectifs cumulés croissants	7	18							
Fréquences cumulées croissantes en %									

2) En déduire graphiquement des valeurs approchées de la médiane, du premier quartile et du troisième quartile .



Ex 10-12 : Série continue : étendue, moyenne, médiane, quartiles

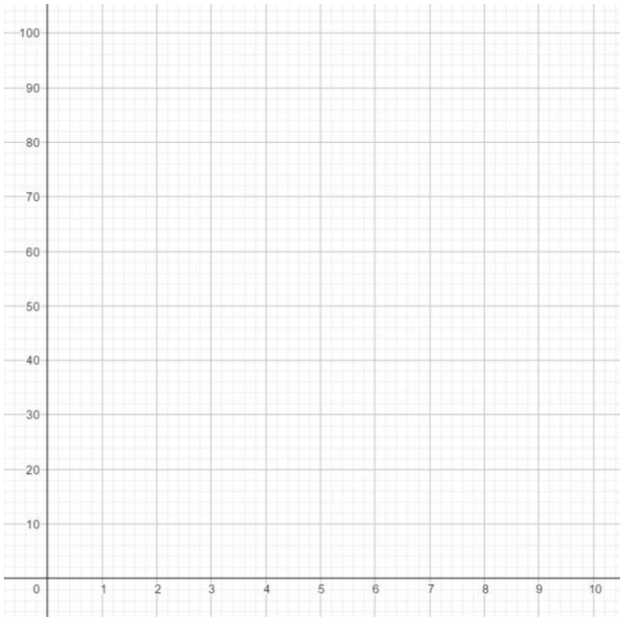
Un professeur de mathématiques M. « ..x » a demandé à l'ensemble de ses élèves de seconde, le temps de révision qu'ils ont consacré à leur dernier contrôle la semaine précédant ce contrôle.
Il a obtenu le tableau suivant :

Temps de révision en h	$\left[0;\frac{1}{2}\right[$	$\left[\frac{1}{2};1\right[$	$[1;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;7[$	$[7;8]$
Nombres d'élèves	8	6	4	3	2	3	2
Centre des classes							
Fréquences (%)							
Fréquences cumulées croissantes (%)							

1) Déterminer l'étendue de cette série, puis en utilisant les centres des classes, déterminer la moyenne de cette série.

2) Compléter le tableau ci-dessus

3) En déduire graphiquement la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.



Ex 10-13 : Privilégier moyenne ou médiane

Dans la région parisienne, les déplacements en voiture particulière ont une durée moyenne de 22 min . Mais 57 % de ces déplacements ne dépassent pas 15 min.

1) Que peut-on déduire pour le temps médian des déplacements en voiture ?

2) Quelle particularité de la médiane explique qu'on peut la préférer ici à la moyenne ?

Ex 10-14 : Regroupement de moyennes et de médianes ...

1) Sur un test d'endurance effectué par 34 élèves d'une classe, la distance moyenne parcourue par les 20 garçons de la classe est 1750 m, et la distance moyenne parcourue par les filles est 1500m.
Calculer la distance moyenne parcourue par la classe ?

2) La distance médiane parcourue est de 1800 m pour les garçons et de 1480m pour les filles .
Peut-on déterminer la distance médiane parcourue par cette classe ?

Écart type

Ex 10-15: Calculatrice

Valeur	8,7	9,9	10,4	10,7	12,1	12,7
Effectif	12	27	48	21	5	2

1) Saisir à la calculatrice les données de la série ci-dessus.
Déterminer sa moyenne $\bar{x}$ et son écart type σ .

2) Déterminer le pourcentage de données de la série qui appartiennent aux intervalles $[\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma]$ et $[\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma]$.

Ex 10-16 : $[\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma]$, $[\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma]$

Pour faire l'état des lieux d'une forêt, un garde forestier a relevé la hauteur de 250 arbres d'une parcelle.

Hauteur (en cm)	30	70	90	110	130	150
Fréquence (en%)	9,2	17,6	29,2	24,4	8,8	10,8

1) Déterminer le pourcentage d'arbres dont la hauteur dépasse 1m.

2) Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

3) Calculer la proportion d'arbres dont la hauteur appartient à l'intervalle $[\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma]$.

4) Calculer la proportion d'arbres dont la hauteur appartient à l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma]$.

5) On peut considérer que, au bout de trois mois chaque arbre a poussé de 15cm . Calculer la nouvelle moyenne.

6) Calculer le nouvel écart type . Ce résultat était-il prévisible ?

Ex 10-17 : Série continue et couple ($\bar{x}$, σ)

54 concurrents participent à un « triathlon » . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Temps (en min)	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[
Effectif	1	16	8	12	5	9	3
Centres							

1) En prenant le centre des classes, déterminer des valeurs approchées arrondies à l'unité du temps moyen $\bar{x}$ et de l'écart type σ .

2) Le couple ($\bar{x}$, σ) semble-t-il pertinent pour résumer cette série ?

Ex 10-18 : Comparaison de séries

Un site A de vente de livres par Internet désire réaliser une étude statistique sur l'âge de sa clientèle . Les résulats sont donnés ci-dessous :

x_i	[18;20[	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	60 et plus
n_i	190	349	362	378	405	216	200	250	200	232

1) Estimer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ des âges des clients.
On choisit 65 comme centre de la classe « 60 et plus ».

2) Comparer la clientèle du site A avec celle du site B dont les âges ont pour moyenne 37 ans et pour écart type 14,4 ans.

Algorithme - Python

En python :
- **L=[]** permet de définir une liste vide.
- **L[i]** donne le terme de rang i de la liste L.
Attention : L[0] est le premier terme, L[1] le deuxième ….
- **len(L)** renvoie la longueur de la liste.
- **L.sort()** trie la liste dans l'ordre croissant.
- **int(a)** convertit un nombre décimal en entier.

Ex 10-19 : Calculer la médiane

1) Tester le programme suivant :

```
1  L=[7,1,11,5,78,37,2]
2  L.sort()
3  print(L)
```

Que peut-on dire de L.sort() ?

2) Compléter la fonction Mediane écrite en Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la médiane d'une série L.

```
1  def Mediane(L):
2      L.sort()
3      if (len(L))%2!= ….. :
4          rang=int((len(L)+1)/2) (Pour faire comprendre que le résultat est un entier)
5          med=L[ …… ]
6      else:
7          rang=int(len(L)/2)
8          med=(L[ …… ]+L[ ……. ])/2
9      return med
```

3) Tester ce programme avec les listes
L=[1,4,3,2,5,6] et M=[1,14,4,17,9,9,11,13,13]

Ex 10-20 : Calculer les quartiles

La fonction Q1 écrite en Python ci-dessous permet de déterminer le premier quartile d'une série L.

```
def Q1(L):
    L.sort()
    N=len(L)
    rang=int(N//4)
    if N%4==0:
        return(L[rang-1])
    else:
        return(L[rang])
```

1) Modifier cette fonction pour écrire la fonction Q3 renvoyant le troisième quartile de la série.

2) Tester les fonctions Q1 et Q3 avec les listes
L=[7,1,11,5,78,37,2,17,45,3,1,47] et M=[7,1,11,5,78,37,2,17,45]

Ex 10-21 : Écart type

On considère la fonction Moyenne ci-dessous écrite en Python renvoyant la moyenne d'une série L.

```
def Moyenne(L):
    N=len(L)
    T=0
    for i in range(N):
        T=T+L[i]
    m=T/N
    return m

```

1) Voici la fonction Ecarttype écrite en Python renvoyant l'écart type d'une série L.

```
from math import *

def Ecarttype(L):
    N=len(L)
    m=Moyenne(L)
    SC=0
    for i in range(N):
        SC=SC+(L[i]-m)**2
        s=sqrt(SC/N)
    return s

```

a) Que représente chacune des variables SC et N ?

b) Soit M=[1,3,4,4,5,6,10]
Exécuter Ecarttype(M) . Quel résultat obtient-on ?

2) On considère la fonction Proportion écrite en Python ci-dessous :

```
def Proportion(L):
    N=len(L)
    m=Moyenne(L)
    s=Ecarttype(L)
    C=0
    for i in range(N):
        if m-2*s<=L[i]<=m+2*s:
            C=C+1
    p=C/N
    return p
```

a) Que représente C dans la fonction suivante ?

b) Définir le rôle de la fonction Proportion.

c) Exécuter Proportion(M) . Quel résultat obtient-on ?

Chapitre 11 - DROITES ET SYSTÈMES

1) ÉQUATIONS DE DROITES

Dans ce paragraphe, un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est fixé.

A) VECTEURS DIRECTEURS

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

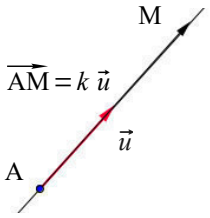
Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



Remarque : Une droite est parfaitement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

B) ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle équation de d toute relation vérifiée par les coordonnées $(x ; y)$ des points de d.

Exemple :
Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Cela signifie que les coordonnées x et y de n'importe quel point de d vérifient la relation $y = 2x - 1$.
Pour qu'un point appartienne à d, il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation de d.

Par exemple le point $A(2 ; 3)$ appartient à d car on a bien

En revanche le point $B(1 ; 4)$ n'appartient à d car

Remarque :

Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $y = 2x - 1$ est <u>une</u> équation de la droite d, $2y = 4x - 2$ en est une autre, ainsi que $2x - y - 1 = 0$

Cas particuliers :

- $x = 4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées
- $y = 3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses

Quelle est la forme générale des équations de droite ?

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Propriété :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. (On note $(a\,;b)\neq(0\,;0)$)

  Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Preuve :

• Toute droite d étant définie de manière unique par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur non nul, on note :

$A(x_0\,;\,y_0)$ un point de d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs (α et β ne sont pas simultanément nuls)

Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.

M appartiendra à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\det(\overrightarrow{AM}\,,\,\vec{u})=0 \Leftrightarrow (x-x_0)\beta-(y-y_0)\alpha=0 \Leftrightarrow \beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$$

En posant $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$, on constate que l'équation de la droite d est de la forme $ax+by+c=0$ où a et b ne sont pas simultanément nuls (car α et β ne le sont pas).

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d.

• Réciproquement, si l'équation d'un ensemble de points $M(x\,;\,y)$ est de la forme $ax+by+c=0$, alors soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de cet ensemble, vérifiant $ax_0+by_0+c=0$.

Par soustraction membre à membre des deux égalités, il vient $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)-(-b)(y-y_0)=0$,
ce qui est la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

C) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Propriété et définition :

- Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=mx+p$ où m et p sont deux réels.

  Cette équation est appelée **équation réduite** de d.

  Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est **le coefficient directeur** de d.

- Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$ où k est un réel.

Preuve :

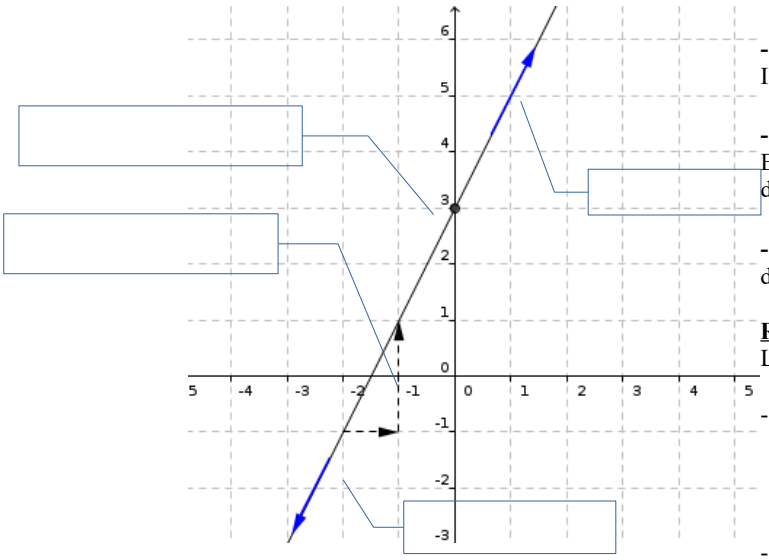
• Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, $\vec{u}$ n'est pas colinéaires à $\vec{j}$ et donc $b\neq 0$.
L'équation $ax+by+c=0$ se réécrit donc sous la forme $y=mx+p$ avec $m=-\dfrac{a}{b}$ et $p=-\dfrac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de cette droite étant $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, un autre est $\vec{v}=\dfrac{-1}{b}\vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

• Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ avec $a\neq 0$.

Puisque $b=0$ et $a\neq 0$, une équation de d est donc $ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ qui est de la forme $x=k$ ($k\in\mathbb{R}$).

Exemple :



- Le coefficient directeur est
Il indique l'accroissement de y pour un accroissement de x égal à 1.

- L'ordonnée à l'origine est
Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

- Un vecteur directeur est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite . Il indique la direction de la droite.

Remarque :
Le coefficient directeur de la droite d , d'équation $y=mx+p$, indique :

- la direction de d :
  si , d est parallèle à l'axe des abscisses
  si , d « monte » de la gauche vers la droite
  si , d « descend » de la gauche vers la droite

- l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses

D) DROITES PARALLÈLES

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites $d: y=mx+p$ et $d': y=m'x+p'$.

Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$d \,//\, d' \Leftrightarrow m=m'$

Preuve :

2) SYSTÈMES LINÉAIRES

A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

Définition :

Toute équation de la forme $ax+by=c$, où a , b et c sont des réels donnés, est **une équation linéaire à deux inconnues** x et y .

Tout couple $(x_0;y_0)$ vérifiant $ax_0+by_0=c$ est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax+by=c$ où $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite . Les solutions de l'équation sont les couples $(x;y)$ coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Définition :

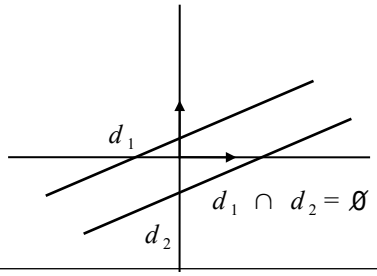
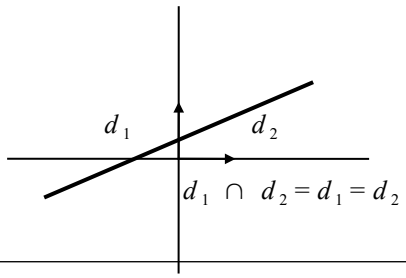
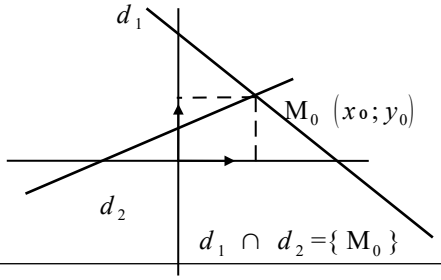
On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme :

(S) $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2) \end{cases}$ où a , b , c , a' , b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) $(x;y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

C) RÉSOLUTION

Interprétation géométrique : Soit le système (S) dans lequel nous supposons $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$.
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les équations (L_1) et (L_2) sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.
Un couple $(x;y)$ de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point $M(x;y)$ appartient à d_1 et à d_2.
Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d_1 et d_2.

d_1 et d_2 sont strictement parallèles	d_1 et d_2 sont confondues	d_1 et d_2 sont sécantes
		

- Si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a'}{b'}\end{pmatrix}$.

On peut aussi choisir $\vec{v_1}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$. Le résultat est alors immédiat en exprimant det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$)= $ab'-a'b$ ….
- Si d_1 et/ou d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

Propriété :

Le système (S) $\begin{cases} ax+by=c\,\%\%(L_1) \\ a'x+b'y=c'\%(L_2)\end{cases}$ tel que $ab'-a'b\neq 0$ admet une **unique** solution.

Méthodes numériques de résolution : Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ x+3y=9(L_2)\end{cases}$

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation	• (L_2) permet d'écrire :	Il ne faut pas partir tête baissée … Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.
• Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y.	• En remplaçant x par $9-3y$ dans (L_1), on obtient :	On obtient une équation à une inconnue (y ici)
		On a trouvé y
• Calculer x en utilisant la valeur de y	• En remplaçant y par 2 dans $x=9-3y$, on obtient :	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système	• On vérifie que le couple $(3;2)$ est solution du système (S) :	Attention à l'ordre !
• Conclure	•	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(9-3y)-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27-9y-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22=11y \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple)	• On multiplie les deux membres de l'équation (L_2) par 3 . On obtient :	Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L_2) par 3 et que l'on a remplacé l'équation (L_2) par $(3L_2)$
• Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y)	• On soustrait membre à membre (L_2) à (L_1) ; On obtient :	On a trouvé y
• Remplacer y par sa valeur dans une des équations.	• On remplace y par 2 dans (L_1) . On obtient :	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système • Conclure	• … déjà vu ! • … ça aussi !	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ x+3y=9(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ 3(x+3y)=27(L_2 \leftarrow 3L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ 3x+9y=27(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ -11y=-22(L_2 \leftarrow L_1-L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2\times 2+5(L_1) \\ y=2(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Équations cartésiennes et vecteurs directeurs

Ex 11-1 : QCM - restituer les notions du cours

Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

1) La droite d'équation $x-3=0$ passe par le point de coordonnées :

a) A(0;3) b) B(3;0) c) C(3;3) d) D(0;0)

2) La droite $d:\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0$ admet aussi pour équation cartésienne :

a) $x+\frac{3}{2}y+3=0$ b) $3x+2x-1=0$ c) $\frac{2}{3}x+y-2=0$ d) $2x+3y=6$

3) La droite $d:ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur :

a) $\vec{t}\begin{pmatrix}-b\\-a\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ c) $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ d) $\vec{w}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$

Ex 11-2 : Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les questions sont indépendantes.

En utilisant le déterminant, déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, l'équation de la droite (AB).

1) $A(2;-3)$ et $B(4;1)$

2) $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ et $B\left(\frac{1}{4};0\right)$

Ex 11-3 : Déterminer un vecteur directeur

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer (si possible) un vecteur directeur de la droite d, dont la première coordonnée est 5.

1) $d:x+3y-2=0$

2) $d:x-5=0$

3) $x+y=0$

Ex 11-4 : Équation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur.

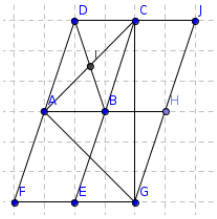
Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a) A(3;5) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

b) A(-1;3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Ex 11-5 : Équations de droites dans des repères différents.

Déterminer les équations des droites (CG) et (AG) dans les repères $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ et $(F;\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA})$.



Ex 11-6 : Droites et points

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer a et b tels que les deux points A et B soient sur d .
a) $d: 2x+y-1=0$ avec $A(2;a)$ et $B(b;5)$

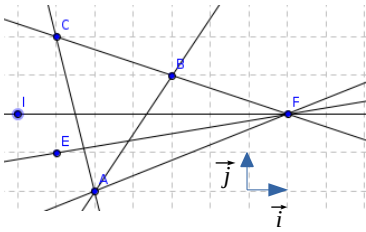
b) $d: x-y-4\sqrt{2}=0$ avec $A(-\sqrt{2};a)$ et $B(b;2\sqrt{2})$

2) Déterminer l'équation de la droite passant par le point A de la droite d et par le point B.
a) $d: x+y+1=0$ avec $A(2;a)$ et $B(2;0)$

b) $d: x-y+1=0$ avec $A(1;a)$ et $B(1;0)$

Ex 11-7 : *Méthode de l'escalier*

Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur des droites :



(AB)

(AC)

(AF)

(IF)

(EF)

Équations réduites

Ex 11-8 : *QCM - restituer les notions du cours*

Donner la ou les bonne(s) réponse(s).
1) La droite $d: 4x+2y-1=0$ admet comme équation réduite :

a) $y=-2x+1$ b) $2y=-4x+1$ c) $y=2x+\frac{1}{2}$ d) $y=-2x+\frac{1}{2}$

2) La droite $d: y=3x-1$ a pour vecteur directeur :

a) $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ d) $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Ex 11-9 : Déterminer un vecteur directeur

Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite d à coordonnées entières.

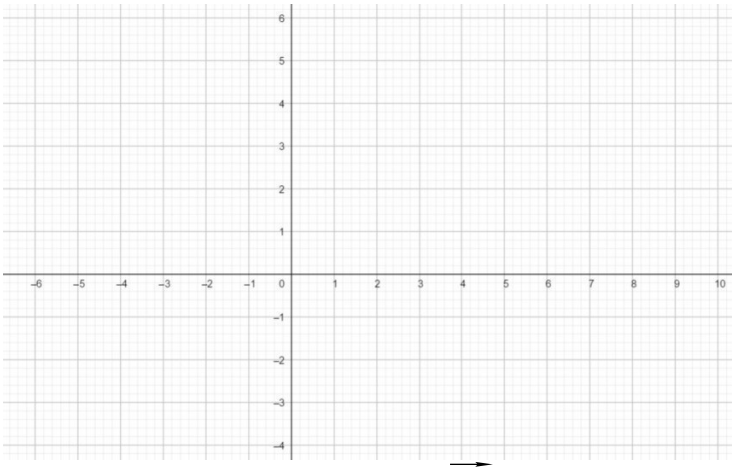
1) $d: y=\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}$

2) $d: y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Ex 11-10 : Méthode de l'escalier et $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et placer les points :

A(2;2) B(6;4) C(1;−1) D(4;−4) E(3;5) F(7;5)



2) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire le coefficient directeur a de la droite (AB).

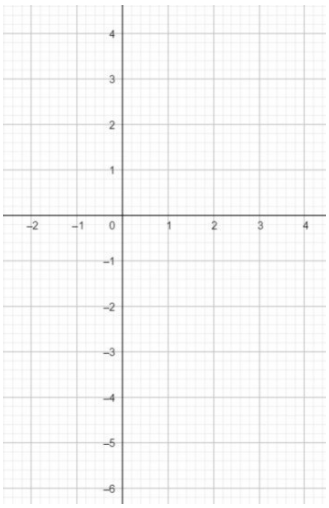
b) Calculer $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Que constate-t-on ?

Quelle nouvelle formule peut-on alors définir ?

c) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

3) Déterminer les équations réduites (CD) et (EF)

Ex 11-11 : Points alignés



1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer :

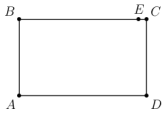
A(−1;3) B(1;−2) C(2;−4) D(3;−7)

2) Calculer l'équation réduite de la droite (AB).

3) Vérifier si les points suivants sont alignés :
a) A, B, C

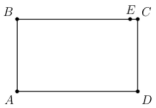
b) A, B, D.

Ex 11-12 : Distance entre deux points



ABCD est un rectangle, les points B, E, C sont alignés dans cet ordre et on donne les mesures suivantes :
AB=3 cm, AD=5 cm, EC=2 mm.
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
1) Justifier que les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.

2) Les droites (AB) et (DE) se coupent en F .
À quelle distance du point A se trouve le point F ? Justifier.
On pourra utiliser un repère d'origine A.



Ex 11-13 : Algorithme – Python : droite parallèle à (Oy)

1) Écrire un algorithme qui indique si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées ou non, à partir des coordonnées de deux points de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 11-14 : Algorithme – Python : déterminer l'équation réduite

1) Écrire un algorithme qui calcule l'équation réduite d'une droite, à partir des coordonnées de deux points de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 11-15 : Algorithme -Python : Vérifier si un point appartient à une droite

1) Écrire un algorithme qui vérifie si un point appartient à une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées), à partir des coordonnées de ce point et de l'équation réduite de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

Droites parallèles

Ex 11-16 :

1) Soit $d: 2x+y-1=0$. Déterminer les droites parallèles à d .

a) $d_1: 2x+y+2=0$ b) $d_2: x+y-3=0$

c) $d_3: 4x+2y-1=0$ d) $d_4: -2x+y-1=0$

2) Soit $d: y=3x-1$. Déterminer les droites parallèles à d .

a) $d_1: 2x-3y+1=0$ b) $d_2: 3x-y+3=0$

c) $d_3: 6x+2y-1=0$ d) $d_4: -6x+2y+1=0$

3) Soit $d: -x+3y-\frac{3}{2}=0$. Déterminer les droites parallèles , sécantes ou confondues avec la droite d .

a) $d_1: 2x-6y+3=0$

b) $d_2: 2x+6y-3=0$

c) $d_3: x-3y-1=0$

d) $d_4: -2x+6y-1=0$

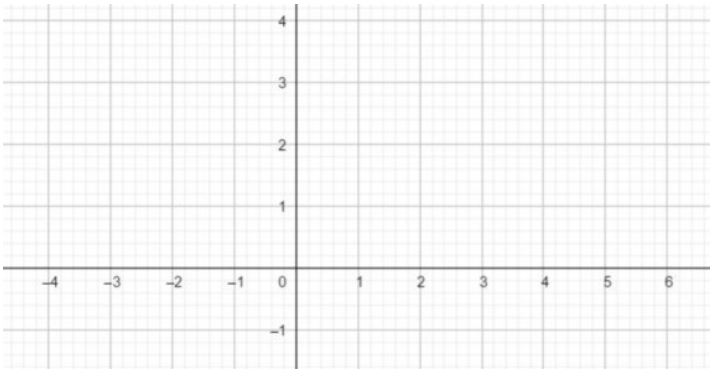
Ex 11-17 : ***Équation cartésienne de la droite passant par un point et parallèle à une autre droite***

Le plan est muni d'un repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(-1;1) et parallèle à $d: x-2y+1=0$.

Ex 11-18 : ***Équation réduite de la droite passant par un point et parallèle à une autre droite***

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer A(−2;2) B(2;3) C(−2;0)



2) Calculer l'équation réduite de la droite (AB)

3) Tracer la droite (d) parallèle à (AB) passant par C. Quel est son coefficient directeur ?

4) Calculer l'équation de la droite (d).

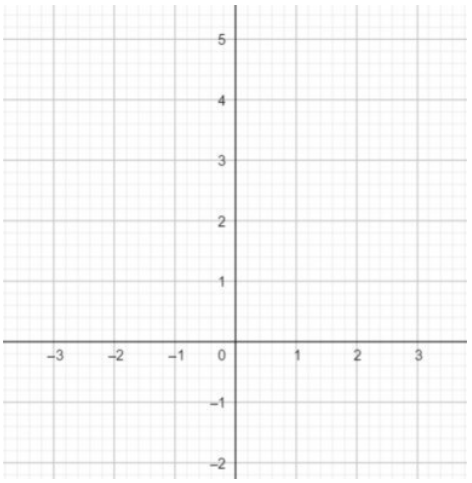
Ex 11-19 : Droites parallèles ?

Voici les équations réduites de plusieurs droites. Sans tracer ces droites, indiquer les droites parallèles.

$(d_1): y=-5x+2$	$(d_2): y=1,5$	$(d_3): y=x+7$	$(d_4): x=-4$
$(d_5): y=-5x-5$	$(d_6): y=7$	$(d_7): x=11$	$(d_8): y=5x+2$
$(d_9): y=x$	$(d_{10}): y=5x+2$	$(d_{11}): y=\frac{1}{5}x+2$	$(d_{12}): y=-5$

Ex 11-20 : Droite parallèle à une autre passant par un point

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer A(−1;3) et B(2;0)



2) Tracer la droite (d_1) d'équation réduite : $y=2x-1$

3) Calculer les équations réduites :

a) de la droite (AB) ;

b) de la droite (d_2), parallèle à (OJ) passant par A ;

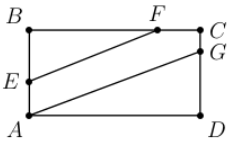
c) de la droite (d_3), parallèle à (OI) passant par A ;

d) de la droite (d_4), parallèle à (d_1) passant par A.

Ex 11-21 : Droites parallèles ?

ABCD est un rectangle, les points A, E, B, les points B, F , C et les points C, G, D sont alignés dans cet ordre et on donne les mesures suivantes :

AB=5 cm, AD=7 cm, AE=2 cm, BF=5 cm, CG=8 mm.



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (EF) et (AG) sont-elles parallèles ? On pourra utiliser un repère d'origine A.

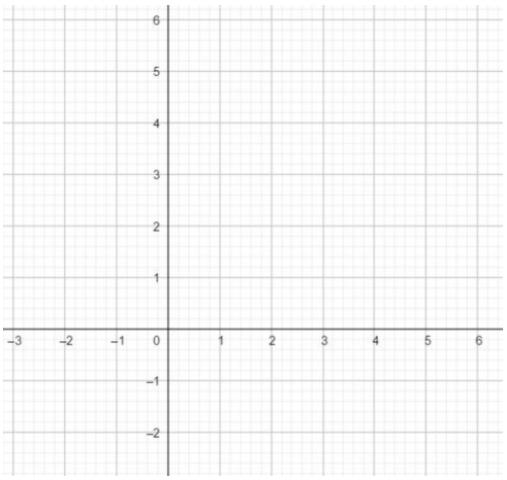
Ex 11-22 : Intersections de deux droites

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer les droites (d_1) , (d_2) , (d_3) d'équations :

$(d_1): y=3x-2$

$(d_2): y=-2x+8$

$(d_3): x=4$



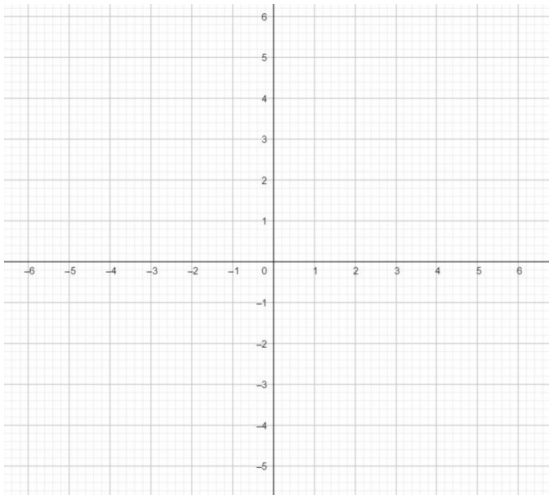
2) a) Justifier pourquoi les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.

b) Calculer les coordonnées du point K, intersection des droites (d_1) et (d_2) .

c) Calculer les coordonnées du point L, intersection des droites (d_1) et (d_3) .

Régionnement du plan

Ex 11-23 :

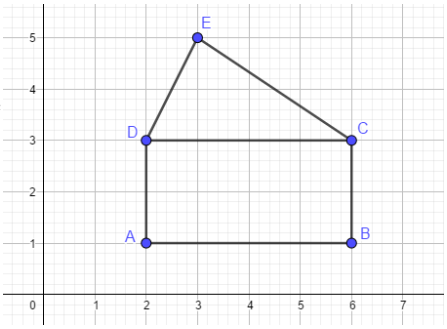


1) a) Tracer la droite d'équation $x+2y-1=0$

b) Hachurer en vert l'ensemble des points du plan tels que $x+2y-1>0$

2) Hachurer en rouge l'ensemble des points du plan tels que $x+2y-1<0$

Ex 11-24 :



1) Soit $M(x;y)$ un point du plan.
Quelles inégalités peut-on écrire avec les coordonnées de M pour traduire son appartenance à l'intérieur du rectangle ?

2) Même question pour le triangle CDE.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

Ex 11-25 :

Pour chacun des systèmes ci-dessous :
- vérifier que le système a une solution ou pas.
- faire une résolution par substitution
- faire une résolution par combinaison.

a) $\begin{cases} x-3y=11 \\ x+y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-3y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$

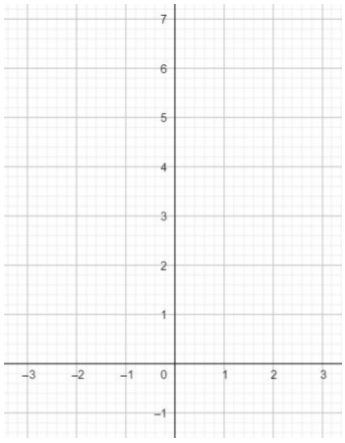
d) $\begin{cases} 2x-4y=5 \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-5y=-4 \\ -6x+10y=8 \end{cases}$

Ex 11-26 :

1) Résoudre algébriquement ce système par combinaison : $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=10 \end{cases}$

2) Transformer ces deux équations sous la forme $y=mx+p$



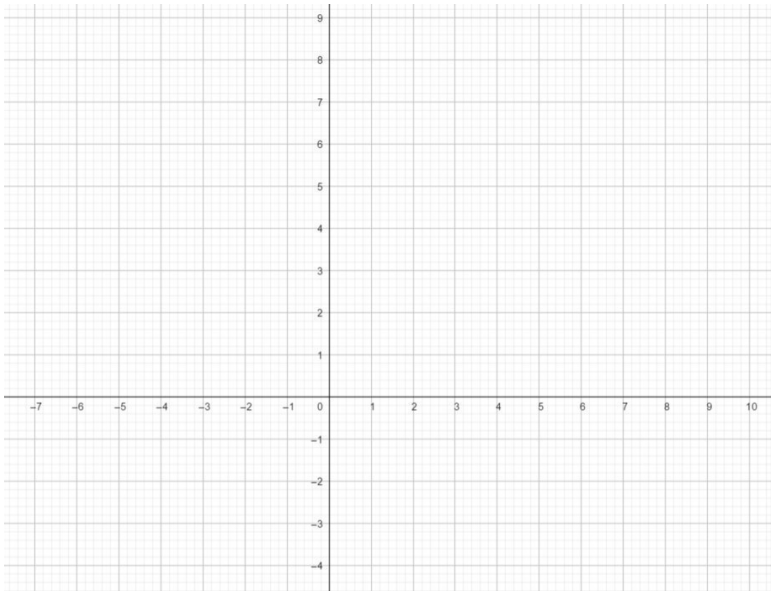
3) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et tracer les droites correspondant à ces deux équations.

4) Retrouver graphiquement le couple solution du système de la question 1).

Ex 11-27 :

Retrouver graphiquement les solutions des systèmes suivants (Ex 11-25) :

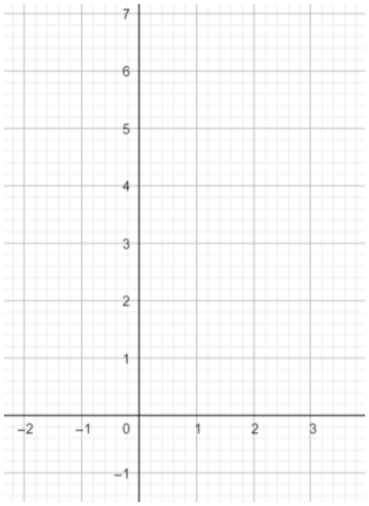
$\begin{cases} x-3y=11 \\ x+y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$



Ex 11-28 :

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$

1) Transformer ces deux équations sous la forme $y=mx+p$



2) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et tracer les droites correspondant à ces deux équations.

3) Expliquer géométriquement pourquoi ce système n'a pas de solution.

4) Que dire du système $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 4x+2y=12 \end{cases}$?

Mises en équation

Ex 11-29 : Différence et quotient

La différence de deux nombres est 5. Le quotient du plus grand par le plus petit est également 5.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer ces deux nombres.

Ex 11-30 : Terrain rectangulaire

Un terrain rectangulaire est trois fois plus long que large. Son périmètre est de 176 mètres.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer les dimensions du terrain.

Ex 11-31 : Somme d'argent

Amine et Ghita ont chacun une certaine somme. Si Amine donne 1,50 euros à Ghita ils auront la même somme. Toutefois, si Ghita donne 3 euros à Amine, ce dernier aura le double de ce qui restera à Ghita.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer la somme de chacun d'eux.

Ex 11-32 : Café de deux qualités

Un marchand vend du café de deux qualités.
Lorsqu'il prend 2 kg de la première qualité et 3 kg de la seconde, le kilogramme de ce mélange vaut 6 euros.
Lorsqu'il prend 3 kg de la première qualité et 2 kg de la seconde, le kilogramme de ce mélange vaut 6,40 euros.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer le prix au kilogramme de chaque qualité ?

Ex 11-33 : Déplacements d'un représentant

Chaque jour, le représentant d'une compagnie A reçoit pour ses déplacements une somme de 10 euros et, en plus, 0,25 euros le kilomètre.
Le représentant d'une compagnie B reçoit 0,30 euros le kilomètre et a reçu 25 euros de moins que celui de la compagnie A.
Ensemble, ils ont parcouru 500 kilomètres.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer la somme de chacun d'eux.

Ex 11-34 : Médianes d'un triangle

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère le triangle ABC avec A(2;1), B(-3;2) et C(7 ;-3).
1) Déterminer une équation de la médiane issue de A, puis une équation de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

2) En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, point d'intersection des médianes.

Des systèmes particuliers

Ex 11-35 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 3x^2-2y^2=-6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{3}{y}=3 \\ \frac{4}{x}+\frac{7}{y}=40 \end{cases}$

Systèmes de trois équations à trois inconnues

Ex 11-36 :

Résoudre algébriquement ce système par combinaison :

$\begin{cases} x+2y+2z-5=4 \quad (L_1) \\ 2x-3y+z=-2 \quad (L_2) \\ -x+y-3z=3 \quad (L_3) \end{cases}$

Chapitre 12 - PROBABILITÉS

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE , ÉVENTUALITÉ , UNIVERS

Un exemple bien connu : (On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1 , 2 , … , 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .

Exemple :

B) ÉVÉNEMENT

Définition :

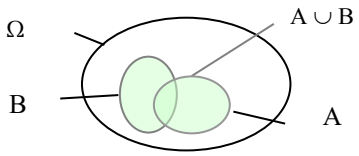
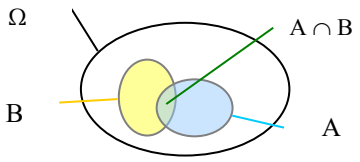
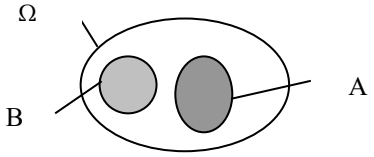
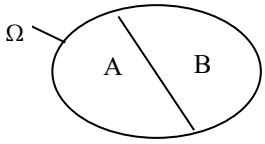
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) .
Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$) .

Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement A : " obtenir un nombre pair " . On a

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : " obtenir un nombre pair " est composé de 3 éventualités . card (A) = 3
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : " obtenir le nombre 3 " ; $B=\{3\}$
Événement impossible : $A = \varnothing$	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : " obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 "
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	L'événement D : " obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 "
C est **la réunion** de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B  	Soit l'événement E : " obtenir un nombre au moins égal à 4 " ; $E=\{4;5;6\}$ Soit l'événement F : " obtenir un nombre impair " ; $F=\{1;3;5\}$ L'événement $E \cup F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair "
C est **l'intersection** de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps.  	L'événement $E \cap F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair " c'est à dire " obtenir un nombre impair au moins égal à 4 "
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \varnothing$  	Les événements E et B sont incompatibles .
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A .  	Les événements A et F sont contraires.

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a :

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω , alors :

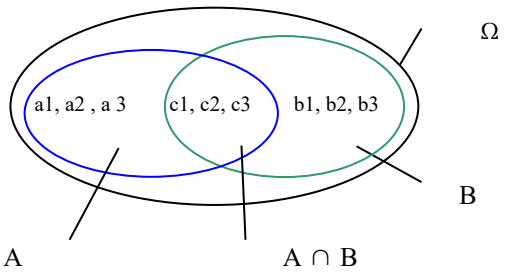
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Idée de preuve :

- L'exemple suivant illustre : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On voit bien que l'intersection intervient deux fois



- On a :

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω , on a :

$p_i = P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque :

Les expressions suivantes " dé parfait ou équilibré " , " boules indiscernables " … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :

Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité						

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : " obtenir un nombre pair " est : P (A) =

Apprendre et comprendre le cours

Ex 12-1 : Univers

Dans chacune de ces expériences aléatoires, donner les éléments de l'univers.

1) On jette un dé ordinaire, puis on note le chiffre qui apparaît.

2) On jette une pièce de monnaie et on note la face qui apparaît.

3) On tire une carte parmi les huit trèfles.

4) Une urne contient des boules blanches et des boules noires . On tire successivement sans remise deux boules de l'urne.

5) On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés numérotés de 1 à 4. On note les deux nombres obtenus.
Déterminer l'univers des expériences suivante :
a) On effectue la différence du plus grand par le plus petit.

b) On effectue la somme des deux nombres obtenus.

c) On effectue le produit des deux nombres obtenus.

Ex 12-2 : Événements contraires, union et intersection

On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 10.
On appelle :
• A l'**événement** « le nombre choisi est pair » ;
• B l'**événement** « le nombre choisi est inférieur ou égal à 7 ».

1) a) Donner P(A) c'est à dire la probabilité que le nombre choisi soit pair.

b) Donner P(B).

2) **Événement contraire** : par exemple l'événement contraire de B est « le nombre choisi n'est pas inférieur ou égal à 7 » et il s'écrit $\overline{B}$
a) Donner $P(\overline{B})$

b) Décrire l'événement $\overline{A}$

c) Donner $P(\overline{A})$

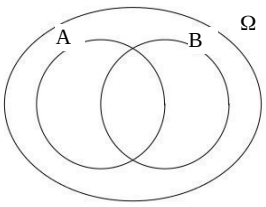
d) Quel est le lien entre la probabilité d'un événement et la probabilité de l'événement contraire ?

3) **Événement A ∩ B** : cet événement signifie que les événements A et B se produisent simultanément
a) Décrire l'événement A ∩ B.

b) Donner P (A ∩ B).

4) **Événement A ∪ B** : cet événement signifie que l'événement A se produit, ou B se produit ou les deux se produisent simultanément
a) Décrire l'événement A ∪ B.

b) Donner P (A ∪ B).



5) **Diagramme de Venn**
Placer dans ce schéma les nombres de 1 à 10.

6) **Une égalité importante en probabilité**
Écrire l'égalité qui donne le lien entre P (A ∪ B), P (A ∩ B), P (A) et P (B).

Ex 12-3 : Vrai ou faux

1) La probabilité d'un événement peut être strictement supérieure à 1.

2) La probabilité d'un événement peut être nulle.

3) Un événement est toujours constitué d'événements élémentaires équiprobables.

4) La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1.

5) La probabilité d'un événement peut être $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) La probabilité d'un événement peut être $\sqrt{2}$.

7) Si deux événements A et B vérifient $P(A)+P(B)=1$, alors ils sont incompatibles.

8) Si deux événements A et B ont le même nombre d'événements élémentaires, alors $P(A)=P(B)$

9) Si deux événements A et B vérifient $P(A)+P(B)=1$, alors le contraire de A est B.

Ex 12-4 : Événements incompatibles

On jette deux dés bien équilibrés . On considère les événements suivants :
A : « le produit des deux nombres affichés est impair »
B : « la somme des deux nombres affichés est impaire »
C : « le plus petit des deux nombres affichés est pair »
1) Les deux événements A et B sont-ils incompatibles ?

2) Les deux événements A et C sont-ils incompatibles ?

3) Les deux événements B et C sont-ils incompatibles ?

Ex 12-5 : « Ou » exclusif ou inclusif

Le « ou » mathématique est inclusif.
En français, le ou est souvent exclusif, mais pas toujours !
Dire pour chaque phrase si le « ou » utilisé est inclusif ou exclusif.

1) Possédez-vous un chat ou un chien ?

2) Vous souhaitez du fromage ou un fruit ?

3) Auriez-vous du sel ou du poivre ?

4) Je te verrais bien médecin ou dentiste.

5) C'est à prendre ou à laisser.

Ex 12-6 : Langage courant et langage formel

Ω désigne l'ensemble des élèves du lycée Lyautey, S le sous-ensemble des élèves de seconde et M le sous-ensemble des élèves aimant les mathématiques. Camil est un élément de Ω , noté x .

1) Écrire en français :

$x \in M \cup S$

$x \in \overline{S}$

$x \in \overline{S} \cap M$

2) Écrire en langage formel :

Camil aime les mathématiques, mais n'est pas en seconde.

Camil n'aime pas les mathématiques et n'est pas en seconde.

Camil aime les mathématiques ou est en seconde.

3) Donner la négation des phrases ci-dessous :
Camil aime les mathématiques ou est en seconde.

Camil aime les mathématiques, mais n'est pas en seconde.

Différentes représentations

Ex 12-7 : Diagramme de Venn

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, et 8 étudient les deux langues.
On choisit un élève au hasard dans cette classe.
On appelle
• A l'événement « l'élève choisi étudie l'anglais »
• B l'événement « l'élève choisi étudie l'espagnol »

1) Tracer un diagramme de Venn , et le compléter avec des effectifs ou des probabilités.

2) Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase.

3) Calculer $P(A \cup B)$.

Ex 12-8 : Tableau à double entrée

Dans une classe de 31 élèves, il y a 16 filles, et parmi elles 4 filles font de l'allemand. Dans cette classe, 11 élèves font de l'allemand. Les autres font de l'espagnol.
On choisit un élève au hasard. Écrire les probabilités demandées sous forme de fraction. On appelle :

• A l'événement « l'élève choisi étudie l'allemand »

• F l'événement « l'élève choisi est une fille »

1) Décrire l'événement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

2) Décrire l'événement $\overline{F}$ et calculer sa probabilité.

3) Décrire l'événement $A \cap F$ et calculer sa probabilité.

4) Compléter le tableau ci-dessous par des probabilités sous forme de fractions.

	A	$\overline{A}$	Total
F			
$\overline{F}$			
Total			

5) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui fait de l'espagnol ?

Ex 12-9 : Arbre

On lance une pièce de monnaie deux fois de suite.
1) Tracer un arbre pour indiquer toutes les possibilités.

2) Toutes ces possibilités ont la même probabilité.
a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux fois pile.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir une seule fois pile.

Modéliser une expérience aléatoire

Ex 12-10 : Feu tricolore

Depuis des années, chaque matin, Mehdi se présente à un feu tricolore à la sortie de sa résidence.
Il trouve le feu au rouge 2 fois sur 3 et à l'orange 1 fois sur 10.
Proposer dans le tableau ci-dessous un modèle de probabilité associé à cette situation.

Issue	Vert	Orange	Rouge
Probabilité			

Ex 12-11 : Dé tétraédrique pipé

Zineb possède un dé régulier, qui comporte 4 faces numérotées de 1 à 4.

Ce dé ne lui paraît pas bien équilibré.
Pour le tester, Zineb l'a lancé 5527 fois.
Le dé se stabilise 647 fois sur le numéro 1, 657 fois sur le numéro 2 , 1387 fois fois sur le numéro 3.

Proposer, dans un tableau, un modèle de probabilité pour ce dé.

Opérations et événements

Ex 12-12 : Utiliser les formules

On considère deux événements A et B tels que :

$P(A)=0,4$, $P(\overline{B})=0,5$ et $P(A \cap B)=0,2$.

Calculer :

$P(\overline{A})$

$P(B)$

$P(A \cup B)$

Ex 12-13 : P (A ∪ B) ...

Dans une assemblée, 30 % des personnes boivent du thé, 80 % du café, et 95 % boivent du thé ou du café (ou les deux).
On choisit une personne au hasard.
Calculer la probabilité que cette personne boive du thé et du café.

Ex 12-14 : Événement contraire

On jette deux dés et on calcule le produit des deux nombres obtenus.
On considère l'événement A : « le produit des deux nombres affichés est pair »
1) Énoncer l'événement contraire $\overline{A}$, puis calculer la probabilité $P(\overline{A})$

2) En déduire P(A).

3) Énoncer l'événement A en utilisant dans la phrase :
a) « au moins un »

b) « ou »

Ex 12-15 : Jeu de carte

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements :
A : "La carte tirée est un as"
C :"La carte tirée est un carreau"

1) Définir par une phrase en français les événements :

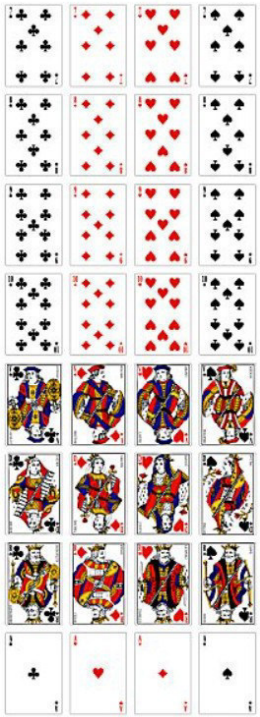
$\overline{A}$

$\overline{C}$

$A \cap C$

$A \cup C$

$\overline{A} \cap \overline{C}$



2) Calculer les probabilités de ces événements.

Choisir la bonne représentation

Ex 12-16 : Dans un garage

Dans un garage, on classe les voitures vendues en catégorie A : de 0 à 4 ans et catégorie B : plus de 4 ans.
Il y a 78 Clio dont 32 sont de catégorie A ; 60 Renault 5, toutes de catégorie B ; 38 Mégane de catégorie A et 8 Mégane de catégorie B.
On choisit une voiture au hasard.

1) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit une Clio de plus de 4 ans.

2) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit une voiture qui a entre 0 et 4 ans.

Ex 12-17 : Au restaurant : Le principe multiplicatif

Au restaurant, deux amis choisissent chacun un plat du jour et un dessert.
Ils ont le choix parmi trois plats du jour et deux desserts.
Quelle est la probabilité que les deux choisissent le même menu ?

Ex 12-18 : Parler espagnol ou pas

Dans un groupe, il y a 60 % d'hommes. On sait aussi que 9 % des personnes du groupe sont des hommes qui parlent espagnol et que 8 % des personnes du groupe sont des femmes qui parlent espagnol

On choisit une personne au hasard dans ce groupe.

1) Calculer la probabilité que la personne choisie soit un homme ne parlant pas espagnol.

2) Calculer la probabilité que la personne choisie ne parle pas espagnol.

Ex 12-19 :

MAX écrit au hasard dans un certain ordre les trois lettres de son prénom.
Quelle est la probabilité qu'il ait écrit :

1) MAX ?

2) Un mot commençant par X ?

Réaliser et exploiter une simulation

Ex 12-20 :

On considère le programme écrit en Python ci-dessous :

```
from random import randint
n=int(input("n="))
c=0
for k in range(1,n+1):
    a=randint(1,3)
    b=randint(1,3)
    s=a+b
    if (s==4):
        c=c+1
f=c/n
print (f)
```

1) Exécuter le programme avec $n=10$ en complétant ci-dessous.

a		3	2	3	3	3	3	3	1	1	2
b		2	2	2	2	3	3	3	2	3	3
s											
$s=4$?											
c	0										

2) Imaginer une expérience simulée par cet algorithme.

Ex 12-21 : Dé à six faces

On lance 200 fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse à la fréquence d'apparition de « 1 » ou « 2 ».

1) Quelle est la probabilité de l'événement "obtenir 1 ou 2" avec un dé non pipé ?

2) Compléter la fonction Echant, écrite en Python, ci-dessous afin qu'elle simule 200 lancers de ce dé et renvoie la fréquence de l'événement "obtenir 1 ou 2"

```
from random import randint

def Echant():
    c=0
    for k in range(1, ...... ):
        if randint(1,6)<= ...... :
            c=c+1
    return ......
```

Ex 12-22 : Dé à huit faces

Alexandre possède un dé équilibré à 8 faces numérc

1) Il lance deux fois le dé .
Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne pas de 8 ?

2) Écrire en python un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $\frac{49}{64}$.

On pourra utiliser le résultat fameux ci-dessous :

La loi des grands nombres :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Chapitre 13 - VARIATIONS ET EXTREMUMS

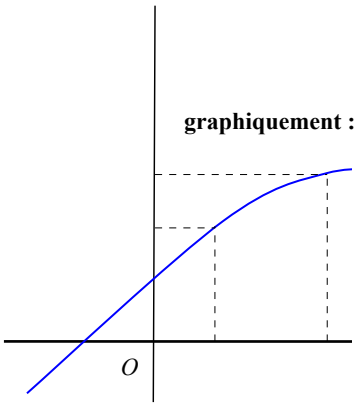
1) SENS DE VARIATIONS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)\leqslant f(b)$.

- On dit que f est **strictement croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$.

graphiquement : "La courbe monte"



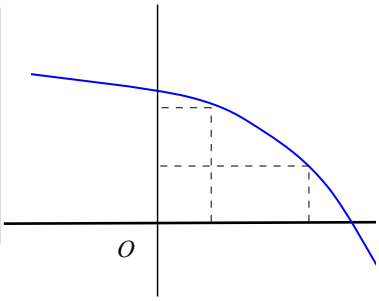
Une fonction strictement croissante est forcément croissante.
Une fonction croissante **conserve l'ordre**.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)\geqslant f(b)$.

- On dit que f est **strictement décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)>f(b)$.

graphiquement : "La courbe descend"



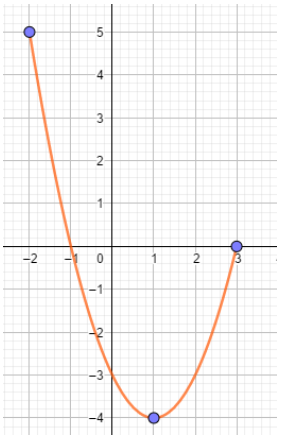
Une fonction strictement décroissante est forcément décroissante.
Une fonction décroissante **change l'ordre**.

Remarques :
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I, lorsque f est soit croissante (respectivement strictement) sur I, soit décroissante (respectivement strictement) sur I.

- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.

- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.
On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par la courbe représentée ci-contre.



On résume les variations de f dans le tableau :

x	
f	

2) EXTREMUMS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_m et x_M deux réels de I. On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m, si pour tout réel x de I, $f(x_m)\leqslant f(x)$

- f admet **un maximum** sur I en x_M, si pour tout réel x de I, $f(x_M)\geqslant f(x)$

Si f admet un minimum ou un maximum, on dit que f admet **un extremum**.

Exemple :

Pour la fonction de l'exemple précédent,

Remarque :

Une fonction n'admet pas nécessairement de maximum ou de minimum sur un intervalle . (En particulier, sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert)

3) VARIATIONS DES FONCTIONS AFFINES

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Pour tous réels u et v distincts, on a :

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$$

Ce quotient s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre u et v .

Preuve :

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

- Si $a>0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a<0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit deux réels u et v tels que $u<v$

- Si $a>0$, alors :
  $au<av$
  $\Rightarrow \quad au+b<av+b$
  $\Rightarrow \quad f(u)<f(v)$
  Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a<0$, alors :

Pour résumer :

$a>0$

x	
f	
$f(x)$	

$a<0$

x	
f	
$f(x)$	

4) VARIATIONS DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

A) LA FONCTION CARRÉ

Propriété :

- La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0]$.
- La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On a alors :

$$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

1er cas: $a<b\leqslant 0$

2ème cas: $0\leqslant a<b$

$a-b<0$ puisque $a<b$,
$a+b>0$ puisque a et b sont positifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que:

$$(a-b)(a+b)<0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)<0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)<f(b)$$

La fonction carrée est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés

Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

x	
f	

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

B) LA FONCTION INVERSE

Propriété :

- La fonction inverse $f:x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty;0[$.
- La fonction inverse $f:x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $f:x \longmapsto \frac{1}{x}$ tels que $a<b$. On a alors:

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

1er cas: $a<b<0$

2ème cas: $0<a<b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
- Deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc:

x	
f	

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

C) LA FONCTION RACINE CARRÉE

Propriété :

La fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ tels que $a<b$. On a alors :

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f	

D) LA FONCTION CUBE

Propriété :

La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Le **tableau des variations** de la fonction cube est donc :

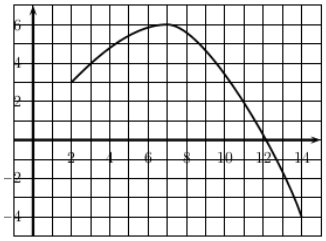
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

Sens de variation d'une fonction

Ex 13-1 : Décrire les variations

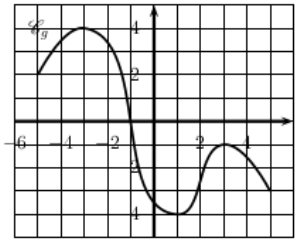
La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction f définie sur l'intervalle $[2;14]$.

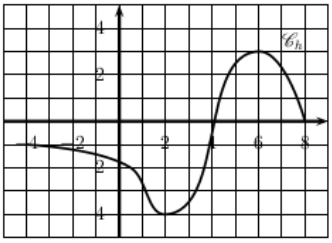
Décrire les variations de cette fonction.



Ex 13-2 : Tableau de variations à partir d'un graphique

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions g et h

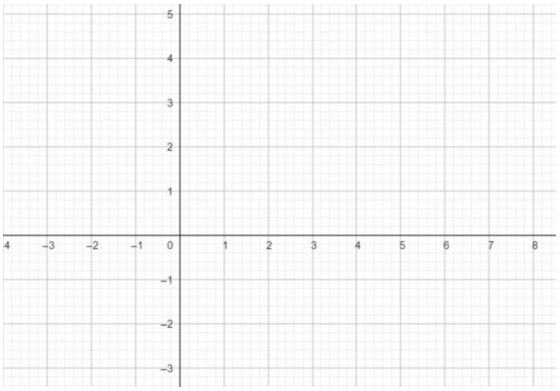


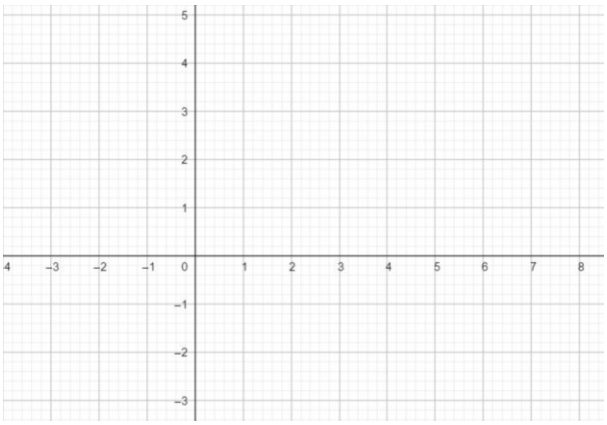


Ex 13-3 : Représentation graphique à partir d'un tableau de variations

x	-3		4		8
f	5	↘	-3	↗	1

Tracer deux repères et dessiner deux représentations graphiques possibles de la fonction f.





Ex 13-4 : Tableau de variations grâce à la calculatrice

Avec la calculatrice, conjecturer les variations des fonctions :
(On acceptera exceptionnellement dans les tableaux de variations des valeurs approchées à 0,1 près)

$f(x)=-x^2+6x-3$ sur l'intervalle $[0;5]$

$g(x)=x^2-2x-5$ sur l'intervalle $[-3;4]$

$h(x)=-x^2-5x$ sur l'intervalle $[-8;2]$

$i(x)=x^3-6x^2+11x-6$ sur l'intervalle $[0,8;3,2]$

$j(x)=x^4-14x^3+71x^2-154x+120$ sur l'intervalle $[1,8;5,1]$

Ex 13-5 : Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur $[-4;4]$ telle que :
- f est strictement croissante sur $[0;2]$
- f est strictement décroissante sur [2;4]
- $f(0)=f(4)=5$ et $f(2)=10$
- f est paire

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

Ex 13-6 : Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur [-1;5] telle que :
- f est strictement croissante sur [-1;0] et [2;5]
- f est strictement décroissante sur [0;2]
- $f(-1)=f(5)=-3$ et $f(0)=1$
- 2 est un antécédent de -5 par f .

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [-1;5].

Minimum et maximum

Ex 13-7 : Attention aux conclusions hâtives ...

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;7]$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

1) Peut-on déterminer le maximum de la fonction f grâce au tableau ci-dessus ?

b) On ajoute pour la suite de l'exercice que la fonction f est strictement décroissante sur [0;3] puis strictement croissante sur [3;7] . Reprendre la question 1)

2) a) Quel est le minimum de la fonction f ?

b) Ce minimum correspond à quelle valeur de x ?

3) a) Quel est le nombre a tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0;7]$, $f(x)\geqslant a$?

b) Quel est le nombre b tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0;7]$, $f(x)\leqslant b$?

Ex 13-8: Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si f est croissante sur [0;2], alors $f(1)\leqslant f(2)$.

2) Si $f(0)<f(2)$, alors f est strictement croissante sur [0;2].

3) Si pour tout réel x , $f(x)\leqslant 7$, alors la fonction f admet le nombre 7 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

4) Si f est croissante sur [0;2], alors $f(0)$ est le minimum de f sur [0;2]

Ex 13-9 : Extremums à partir d'une représentation graphique

1) Dans l'exercice 2 :
a) Quel est le maximum de la fonction g sur l'intervalle [-5;5] ?
Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

b) Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle [-5;5] ?
Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

c) Reprendre ces questions sur l'intervalle [0;5].

2) Déterminer les extremums de la fonction h sur [-4;8].

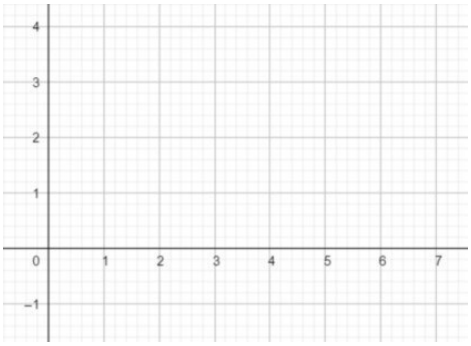
Ex 13-10 : Extremums à partir du tableau de variations

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f .

x	2		3		5		6
f	0	↗	2	↘	-1	↗	3

1) Tracer un repère et dessiner une représentation graphique possible de la fonction f .

2) Donner le maximum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.



3) Donner le minimum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.

Ex 13-11 : Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3;8]$ par $f(x)=3x^2-14x$

1) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant au dixième près.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2) D'après ce tableau, compléter les valeurs ci-dessous afin de tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.

Xmin = ... Xmax = ...

Ymin = ... Ymax = ...

3) a) À l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Arrondir au millième.

b) En quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au millième.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Écrire des valeurs au millième près.

5) Calculer le ou les éventuels antécédents de 0. Donner les valeurs exactes.

6) À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $f(x)=50$. Arrondir au millième.

Ex 13-12 : Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x)=-7x^2+60x$

1) Faire tracer la courbe représentative, bien cadrée, sur l'écran de la calculatrice.

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Arrondir au centième.

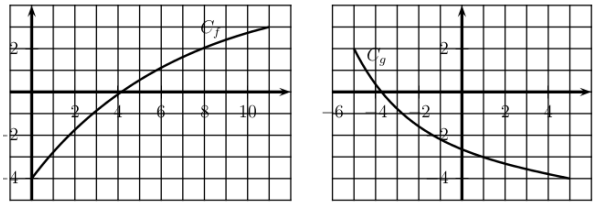
3) Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au centième.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Écrire des valeurs au centième près.

Comparer les images de deux nombres

Ex 13-13 : Comparer des images à partir d'une courbe

Les courbes ci-dessous représentent graphiquement deux fonctions f et g.



Compléter ci-dessous avec les mots croissante ou décroissante et avec les signes > ou <, et tracer des traits dans les deux repères ci-dessous.

1) La fonction f est ..... sur l'intervalle [... ; ...].

1 ... 3	et	$f(1)$ ... $f(3)$
7 ... 5	et	$f(7)$ ... $f(5)$
9,29 ... 9,3	et	$f(9,29)$ ... $f(9,3)$

2) La fonction g est ..... sur l'intervalle [... ; ...].

-2 ... -1	et	$g(-2)$ ... $g(-1)$
2 ... 4	et	$g(2)$ ... $g(4)$
1,03 ... 1	et	$g(1,03)$ ... $g(1)$

Ex 13-14 : Comparer des images à partir d'un tableau de variations

Compléter :

$f(-7)$ ... $f(-5)$

$f(0)$ ... $f(2)$

$f(8)$ ... $f(6)$

$f(-1,3)$ ... $f(-1,32)$

x	-9		-2		3		9
f	10	↘	1	↗	4	↘	-8

Ex 13-15 : Comparer des images à partir des variations

On donne les informations ci-dessous sur une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;15]$.

– Sur l'intervalle $[-10;4]$, la fonction f est strictement croissante ;

– sur l'intervalle $[4;15]$, la fonction f est strictement décroissante.

Compléter ci-dessous avec les signes > ou <.

$f(-6)$ … $f(-9)$; $f(1)$ … $f(3)$

$f(9)$ … $f(11)$; $f(14)$ … $f(13)$

Ex 13-16 : Utilisation de la calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-7;3]$ par $f(x)=x^3+20x^2+50x-300$

1) À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-7;3]$. Arrondir au dixième près.

2) Sans aucun calcul, compléter ci-dessous avec les signes > ou <.

$f(-5,5)$ … $f(-6)$; $f(1)$ … $f(1,05)$

$f(-2,99)$ … $f(-2,9)$; $f(2,31)$ … $f(2,3)$

Ex 13-17 :

Soit une fonction f croissante sur l'intervalle $[-3;7]$.
Quel est l'ensemble des nombres dont les images par f sont supérieures au sens strict à $f(2)$?

Ex 13-18 :

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g

x	-4	6
g	2 ↘	-5

Quel est l'ensemble des nombres dont les images par g sont inférieures au sens large à $g(1)$?

Fonctions affines

Ex 13-19 : Vrai ou faux

Soit f une fonction affine.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si $f(-2)<f(2)$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Si $f(-2)=f(2)$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Si f est une fonction linéaire et que $f(-2)<0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 13-20 : Tableau de variations et tableau de signes

Déterminer le tableau de variations et le tableau de signes des fonctions affines ci-dessous :

1) $f: x \longmapsto 3x-7$

2) $g: x \longmapsto 3(2-5x)$

3) $h: x \longmapsto 2x-2(1-4x)$

4) $i: x \longmapsto \dfrac{x-3}{5}$

5) $j: x \longmapsto (3-\pi)x+\sqrt{2}$

Ex 13-21 : Utiliser le taux de variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variations de la fonction affine vérifiant :

1) $f(2)=7$ et $f(5)=10$

2) $f(8)=2$ et $f(1)=7$

Ex 13-22 : Utiliser le taux de variations

$f: x \longmapsto 2x+b$ (b $\in$ f) est une fonction affine .
Sans calculer b , déterminer :

1) $f(15)-f(5)$

2) $f(-3)-f(0)$

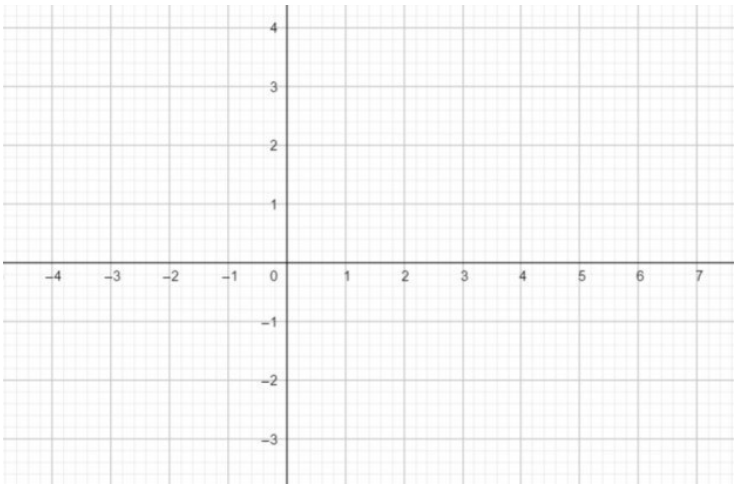
Ex 13-23 : Fonction affine par morceaux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq -1 \\ 2x+2 & \text{si } x\in[-1;1[\\ -x+5 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) Donner la représentation graphique de la fonction f .



3) Déterminer les extremums de f sur :
a) [-1;1]

b) [-1;6]

c) [-4;7]

Fonctions de références

Ex 13-24 : Comparer des nombres en utilisant les variations

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, comparer les nombres :

1) $2,4^2$ et $2,3^2$

2) $(-1,9)^2$ et $(-1,8)^2$

3) $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{11}$

4) $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-3}$

5) $(-4)^3$ et $(-4,1)^3$

6) $\sqrt{7}$ et $\sqrt{8}$

Ex 13-25 : Comparer sans calculatrice

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

1) $(\pi-5)^2$ et $(\pi-7)^2$

2) $\frac{1}{-3}$ et $-\frac{1}{4}$

3) 7 et $\sqrt{48}$

4) $(-3)^3$ et $0,11^3$

5) $\frac{1}{\sqrt{2}-5}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}-7}$

6) $(\sqrt{11}-1)^2$ et $(\sqrt{11}-2)^2$

Ex 13-26 : Encadrer $f(x)$

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+7}$.

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1;2], on a $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.

Ex 13-27 : Déterminer le sens de variations d'une fonction

En utilisant le sens de variations des fonctions de référence, déterminer les variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

2) $g(x)=\sqrt{x^2+3}$ sur $[0;1]$

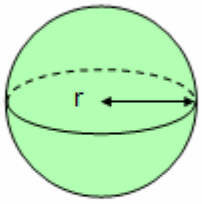
3) $h(x)=(x-3)^2+10$ sur $[-1;3]$

4) $i(x)=\frac{1}{4-x}$ sur $]4;+\infty[$

Ex 13-28 : Fonction cube et volume d'une boule

1) Quel est le sens de variation de la fonction cube sur $[0;+\infty[$?

Volume d'une boule



2) En déduire le sens de variation de la fonction qui au rayon d'une boule associe son volume.

$$\text{volume} = \frac{4}{3}\pi \times r^3$$

3) Une boule a un rayon compris entre 10 et 15 cm.
Encadrer (en arrondissant à l'unité) le plus précisément possible son volume.

Ex 13-29 : Géométrie et fonctions de référence

On considère un segment $[AB]$ de longueur 14 cm. Sur ce segment, on place un point M puis on trace un triangle équilatéral AMN et un carré MBCP.
On pose x=AM . Ainsi $0 \leqslant x \leqslant 14$.

1) On consière la fonction f qui, à un réel x de [0;14], associe le périmètre de AMN et la fonction g qui à un réel x de [0;14], associe le périmètre de MBCP.

a) Déterminer les sens de variations de f et g sans utiliser leurs expressions algébriques.

b) Exprimer $f(x)$ et $g(x)$, puis retrouver les résultats de la question précédente.

2) Reprendre les questions en considérant cette fois la fonction f qui, à un réel x de [0;14], associe l'aire de AMN et la fonction g qui à un réel x de [0;14], associe l'aire de MBCP.

Modéliser des situations de la vie courante

Ex 13-30 : Comète

Une comète à trajectoire parabolique s'approche de la terre . On suppose que la distance (en millions de km) entre la comète et la terre est une fonction d du temps t donnée par :

$$d(t)=(t-2)^2+10$$

où t est le temps (en années) écoulé depuis l'instant 0.

1) Démontrer que la fonction d est strictement décroissante sur [0;2], puis strictement croissante sur [2;10].

2) Dresser le tableau de variations de d sur l'intervalle [0;10].

3) Quelle est la distance minimale entre cette comète et la terre ?

Ex 13-31 : Apiculteur

Un apiculteur produit du miel qu'il vend au marché.
L'expérience lui a montré que si x (où $x\in[1;40]$) est le prix de vente, du kg de miel, le nombre d'acheteurs vaut $n(x)=200-5x$.
On suppose que chaque acheteur achète exactement un kg de miel et que le coût de production d'un kg de miel est de 8 euros.

1) Montrer que le bénéfice s'écrit $b(x)=-5(x-24)^2+1280$

2) a) Démontrer que la fonction b est strictement croissante sur [1;24] et strictement décroissante sur [24;40].

b) Dresser le tableau de variations de b sur l'intervalle [1;40]

c) En déduire, pour quel prix au kg le bénéfice obtenu est maximum et combien vaut ce bénéfice maximal ?

Ex 13-32 : Bénéfice maximum

Une entreprise produit et commercialise des briques en terre cuite et des tuiles. Chaque semaine, elle limite sa production à 13 tonnes.

Elle vend son produit 40000 euros la tonne et sont coût total de production, en milliers d'euros, est modélisé par c définie sur [0;13] par
$c(x)=x^2+25x+36$.

1) On note $b(x)$ le bénéfice .
Donner une expression de $b(x)$ en fonction de x.

2) Conjecturer avec la calculatrice la production qui engendre un coût pour l'entreprise et la production qui rapporte un bénéfice maximum.

Algorithme - Python

Ex 13-33 :

Un maire s'intéresse à l'évolution de la population de sa ville.
Une étude a permis d'établir que la population de l'année $2017+n$ peut être estimée par la formule :
$p(n)$ où p est la fonction définie sur [0;23] par
$p(x)=2x^3-132x^2+2898x+9412$

1) Déterminer la population en 2023

2) On admet que la fonction p admet un maximum M sur [0;23] pour une valeur entière N et que la fonction est croissante jusqu'à cette valeur N.

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin qu'il affiche M et l'année où la population sera maximum :

```
def p(k):
    return(2*k**3-132*k**2+2898*k+9412)
M=.........
N=.........
for i in range( ......, ........ ):
    if (p(i)>M):
        M=.........
        N=.........
print("le maximum est",M,"atteint en",  ......... )
```

3) Qu'affiche le programme ?

Chapitre 14 - FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE - LOI DES GRANDS NOMBRES

1) ÉCHANTILLON ET DISTRIBUTION DE FRÉQUENCES

Définition :

Un **échantillon de taille** n est la série statistique formée des n résultats obtenus lorsqu'on répète n fois une expérience dans les mêmes conditions.

Exemple :
On lance un dé et on regarde si le nombre obtenu sur la face supérieure du dé est pair ou impair.
On répète 100 fois cette expérience.
On obtient successivement :

P P P I P I P I P P P I P P P I P I I P P P P I P I I P I P P I P I P I P I P I P I I P I P I P I P P P P I P I P I P P P I P P P I P P I P P I P I P I I P I P P I P I P I P I I I P I I P I P I P I I

Cette série constitue un échantillon de taille 100.

Remarque :
Pour obtenir un échantillon à l'aide d'un tirage celui-ci doit s'effectuer avec remise pour que la proportion du caractère considéré ne change pas.
Si la taille de l'échantillon est négligeable devant l'effectif total, on peut assimiler un tirage sans remise à un tirage avec remise.

Définition :

La distribution des fréquences associée à un échantillon est la liste des fréquences des issues de l'échantillon.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on peut calculer les fréquences de chacune des issues P et I.
Ce tableau donne la distribution des fréquences associée à l'échantillon.

Issue	P	I
f_i	0,48	0,52

2) FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

Définition :

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille pour une même expérience, la distribution des fréquences varie.
C'est ce qu'on appelle **la fluctuation d'échantillonnage.**

Exemple :
On peut obtenir un nouvel échantillon de taille 100 en relançant 100 fois le dé.
On obtient successivement :

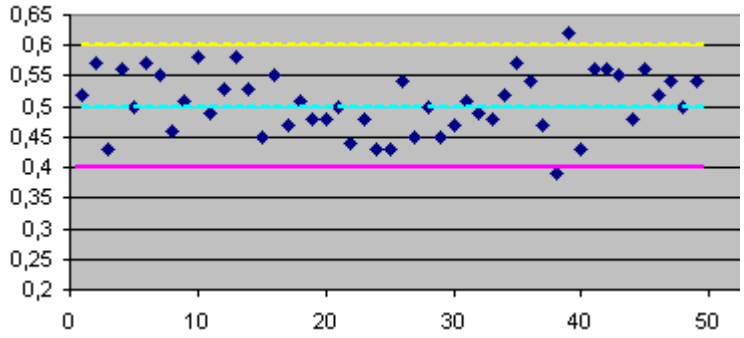
I I P I P I P I P I P I P I P I P I I P P P P I P I I P I P P I P I P I P I P I P I P IPI P I P I P I P I P I P P I P I P I P I P I P P P I P P I P P I P I P I I I I P P I P I P I P I P I P IPI P I P I P I P IPP

On obtient une nouvelle distribution des fréquences.

Issue	P	I
f_i	0,47	0,53

La distribution obtenue est différente.
On dit que les **fréquences fluctuent**.

On simule maintenant 50 échantillons de taille 100 de cette expérience et on s'intéresse à la fréquence d'apparition d'un nombre pair.
On se rend compte que les valeurs des fréquences obtenues sont assez proches de la valeur $\frac{1}{2}$.



Chaque point est associé à un échantillon.
On observe ici 2 points en dehors de l'intervalle $[0,4:0,6]$

On constate que pour la plupart des échantillons (au moins 95%) la fréquence est comprise dans l'intervalle $[0,4:0,6]$.

Propriété : (admise)

On considère une population dont la fréquence d'apparition d'un caractère donné est p et un échantillon de taille n, dont la fréquence d'apparition du caractère précédent est f.

Lorsque n est assez grand et p n'est ni proche de 0, ni de 1, il y a environ 95% des échantillons de taille n issus de cette population qui sont tels que la fréquence f du caractère appartient à un intervalle centré en p de la forme :

$$\left]p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$$

Remarque :
Quand la taille de l'échantillon augmente, l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur ces échantillons de taille n diminue et les fréquences ont tendance à se stabiliser.

3) LOI DES GRANDS NOMBRES

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois une expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé " **La loi des grands nombres** " ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Propriété :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

4) APPLICATIONS

- **Valider ou rejeter un modèle choisi**

A partir d'un échantillon pour lequel la fréquence relative à un caractère donné est f, on regarde si cette fréquence est dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Si ce n'est pas le cas, on considère que l'observation n'est pas compatible avec le modèle.

- **Estimer la valeur d'une probabilité ou d'une proportion inconnue**

On a : $p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant f\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow f-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}}$

L'équivalence précédente permet d'estimer, la valeur d'une proportion inconnue p dans la population à partir d'une fréquence observée f.
La précision de l'estimation vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Elle est d'autant meilleure que n est grand.

Ex 14-1 : Imaginer un échantillon

Amine possède un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
On s'intéresse à la sortie du nombre 3.

1) Imaginer un échantillon de taille 50 puis compléter le tableau suivant qui résume l'échantillon :

Issue				
Effectif				

2) Proposer un tableau qui pourrait résumer un échantillon de taille 500 de l'expérience du lancer de dé, qui selon vous, est raisonnable.

Issue				
Effectif				

3) Proposer un autre tableau qui pourrait résumer un échantillon de taille 500 de l'expérience du lancer de dé, qui selon vous, est très improbable. Expliquer pourquoi.

Issue				
Effectif				

Ex 14-2 : Avec ou sans remise

Une urne contient 80 boules : 30 blanches et 50 noires.

On considère les deux expériences suivantes :

Expérience 1 :
On tire successivement et sans remise 10 boules de cette urne.
On s'intéresse au nombre de boules noires.

Expérience 2 : On tire successivement et avec remise 10 boules de cette urne.
On s'intéresse au nombre de boules noires.

Quelle expérience permet d'obtenir un échantillon de taille 10 ?

Ex 14-3 : Vrai ou faux

1) Je lance quatre fois un dé et je note la fréquence d'apparition du 6. Cette fréquence est la probabilité d'obtenir 6.

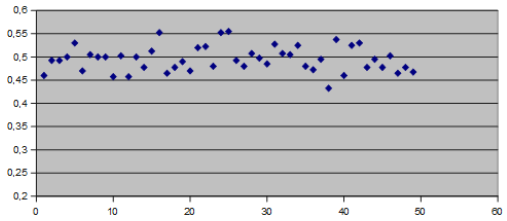
2) Je lance dix mille fois un dé et je note la fréquence d'apparition du 6. Cette fréquence est très proche de la probabilité d'obtenir un 6.

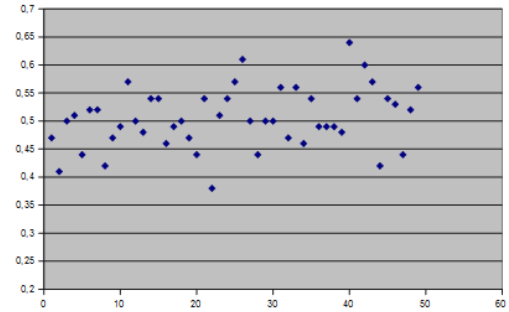
3) Je lance n fois un dé . La distance entre la fréquence d'apparition du 6 et la probabilité d'obtenir 6 est toujours inférieure à $\frac{1}{2}$ pour tout $n>1$.

Ex 14-4 : Taille 100 ou taille 400

On a représenté les fréquences d'un caractère sur 50 échantillons de taille 100 et de taille 400.

1) Quel est le graphique qui représente les 50 fréquences sur des échantillons de taille 400 ?

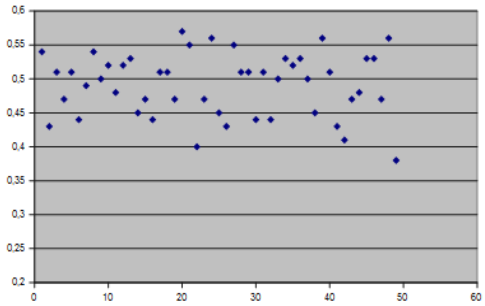


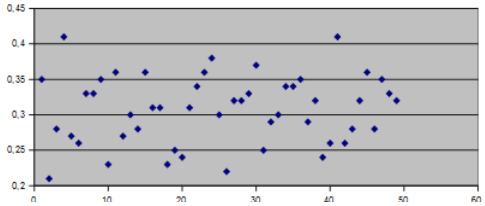


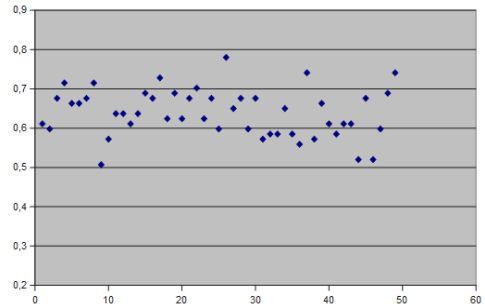
2) Estimer la proportion p du caractère dans la population.

Ex 14-5 : Trouver la bonne représentation

Parmi les graphiques ci-dessous, quel est celui qui représente 50 fréquences de « face » obtenues sur des échantillons de 100 lancers d'une pièce truquée (favorable à face) ?





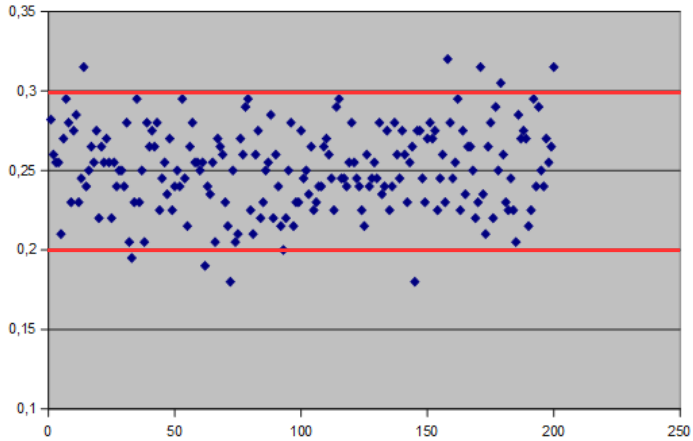


Ex 14-6 : Intervalle de fluctuation

Un institut de sondage souhaite interroger un échantillon aléatoire de 400 personnes dans une population où la proportion de personnes de moins de 20 ans est 25 %.

1) Calculer les bornes de l'intervalle $I=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

2) On donne dans le graphique ci-dessous les fréquences d'individus de moins de 20 ans sur 200 échantillons simulés de 400 personnes.



Quelle proportion des 200 fréquences est hors de l'intervalle I.

3) L'institut estime que si la fréquence des moins de 25 ans parmi les 400 personnes interrogées est hors de l'intervalle I, alors l'échantillon n'est pas représentatif et doit être rejeté.
Estimer la probabilité que l'échantillon réalisé par l'institut de sondage ne soit pas représentatif.

Ex 14-7 : Distance entre fréquence obtenue et fréquence théorique

On a lancé plusieurs simulations d'un lancer de dé non truqué et on a obtenu les résultats suivants :

Nombres de lancers	1000	2000	5000	10000
Nombre de 6	195	381	841	1664
Fréquence				
Distance				

1) Calculer les fréquences d'apparition du 6 pour chaque échantillon.

2) Quelle est la proportion théorique du résultat ?

3) Calculer la distance (arrondie à 0,0001 près) entre la fréquence obtenue et la fréquence théorique dans chaque cas.

4) Quel phénomène a-t-on mis en évidence ?

Ex 14-8 : Fonctions

1) Tracer sur la calculatrice les courbes représentatives des deux fonctions ci-dessous sur l'intervalle $]0;10000]$

$$f(x)=0,4+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x)=0,4-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) Quel phénomène est mis en évidence ?

Ex 14-9 : Feu de circulation

Le maire d'une ville vient d'installer un feu rouge sur l'artère principale et demande que le feu soit réglé de la manière suivante :

Couleur	Rouge	Orange	Vert
Durée	20s	5s	35s

Il observe ensuite pendant une journée la couleur du feu lorsqu'une voiture arrive.
Il obtient le tableau ci-dessous :

Couleur	Rouge	Orange	Vert
Nombre	264	65	431

1) Calculer la proportion de temps p de couleur verte sur un cycle.

2) Calculer la fréquence de voitures passées au vert.

3) On fait l'hypothèse que le feu vert est bien réglé.

a) Déterminer l'intervalle $I=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

b) Commenter le réglage du feu.

Ex 14-10 : Amplitude de l'intervalle de fluctuation

On lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) Déterminer l'amplitude de l'intervalle $I=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

2) Comment diviser par 2 l'amplitude de l'intervalle ?

3) Comment faire en sorte que l'intervalle ait une amplitude inférieure à 0,01 ?

Estimer une probabilité ou une proportion

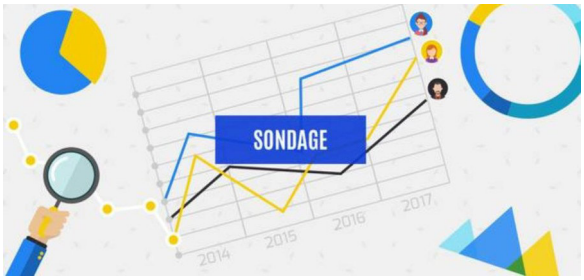
On admet que pour 95 % des échantillons de taille n la distance entre la fréquence f observée et la proportion (ou probabilité) p cherchée est inférieure ou égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ce qui signifie qu"on peut dire avec une marge d'erreur de 5 % que $p\in\left]f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

Ex 14-11 : Estimer un achat

En septembre 2019, un sondage réalisé auprès de 1297 joueurs, révèle que 26 % des sondés achèteront la console SuperConsole19 à sa sortie.

Dans quelle fourchette peut-on estimer, avec une marge d'erreur de 5 %, le pourcentage de joueurs qui feront l'acquisition de la console SC17.



Ex 14-12 : Sondage

Avant les élections, un candidat M.Mocran commande un sondage auprès de 500 personnes.

D'après ce sondage, son adversaire obtiendrait un score de 48 %.

1) Quel intervalle contenant p peut-on proposer ?

2) M.Mocran peut-il fêter prématurément sa victoire ?

3) Si non, quelle taille d'échantillon minimale aurait-il dû prendre pour être rassuré.

Ex 14-13 : Algorithme - Python

On veut savoir si une pièce de monnaie est truquée . Pour cela, on la lance N fois ($N\geqslant 25$) et on s'intéresse à la fréquence d'apparition du côté « pile » de la pièce.

1) On fait l'hypothèse que la pièce n'est pas truquée.

Déterminer l'intervalle $I=\left[p-\frac{1}{\sqrt{N}};p+\frac{1}{\sqrt{N}}\right]$ de la fréquence de « pile » dans les échantillons de taille N .

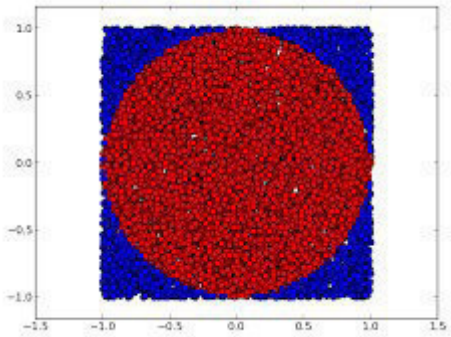
2) Sur N lancers, le nombre de « pile » obtenu est n .

On souhaite que la fonction Piece_truquee, écrite en python ci-dessous, donne une règle (au seuil de 95 %) pour décider si une pièce de monnaie est truquée ou non.

Compléter la fonction ci-dessous écrite en Python :

```
from math import ….
def Piece_truquee(n,N):
    a=….
    b=….
    f=n/N
    if (…….. ):
     print("La pièce semble non truquée avec une marge d'erreur de 5 %")
    else:
     print("La pièce semble truquée avec une marge d'erreur de 5 %")
```

<u>Ex 14-14 :</u> Méthode de Monte Carlo – utilisation d'un tableur



On tire des fléchettes de façon aléatoire dans une cible carrée contenant un cercle de rayon 1 . On suppose qu'on atteint toujours la cible.
On simule le lancer d'une fléchette.

	A	B	C	D	E	F	G
1	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
2							
3							
4	Tirage	Abscisse	Ordonnée	Distance à 0	Dans le disque	Nombre de tirs	Fréquence
5							
6							

1) a) Mettre les numéros des tirages de 1 à 10000 dans les cellules A5 à A10004

b) L'abscisse du point d'impact de la fléchette est un nombre réel aléatoire entre -1 et 1. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule B5 ?

c) Effectuer la même opération pour l'ordonnée en C5.

d) Trouver la formule de la cellule D5 qui permet d'afficher la distance d entre l'origine et le point d'impact.

2) a) Si la distance d est inférieure à 1, où se trouve le point d'impact ? Si $d \leqslant 1$, faire inscrire « 1 » dans la cellule E5 . Effectuer le total de tirs dans le disque dans la cellule F5.

b) Calculer la fréquence de tirs dans le disque en cellule G5.

3) a) En cellule A2 coller avec liaison la fréquence obtenue après 4000 tirs ; en B2, après 5000 tirs jusqu'en G2 après 10000 tirs.

b) Sélectionner la plage G5:G10004 puis, à l'aide de l'assistant graphique, représenter les fréquences cumulées de tirs dans le disque en fonction du nombre de tirs.

c) On suppose que la probabilité d'atteindre une surface est proportionnelle à l'aire de la surface.

Quelle est la probabilité d'atteindre le disque dans le carré ?

Que permet de « calculer » cette simulation ?

État de mémoire :

Ex 1 :

On considère l'état de mémoire suivant :

x	y	z	s	t
2	-2	-4	1	3

1) On exécute la séquence suivant : z=x+y ; t=z*t ; x=-t; s=3*x ; y=8

Donner le nouvel état de mémoire

x	y	z	s	t

2) Même question avec : t=-y ; z=t**2 ; x=z-x ; t=x-2

x	y	z	s	t

Variables, affectations :

Ex 2 :

Ce trimestre, Amine a obtenu trois notes en maths, notées A, B et C.
Écrire un algorithme qui permette à Amine de connaître sa moyenne.
La note A est coefficient 2 . Les notes B et C sont coefficient 1.
Traduire cet algorithme en Python.

Ex 3 :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Lire C   ( C est une chaîne de caractères )
D ← valeur du neuvième caractère de C
E ← valeur du premier caractère de C
F ← valeur du septième caractère de C
G ← la valeur du huitième caractère de C
S ← D+E+F+G
Afficher S
```

1) Qu'affiche cet algorithme lorsqu'on saisit algorithme ?

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 4 :

1) Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en hectares la superficie d'un terrain rectangulaire de longueur L mètres et de largeur l mètres :

```
Lire …        ( …   sont des flottants )
M ← L*l
H ← …
Afficher …
```

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 5 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1  x=float(input("x="))
2  y=float(input("y="))
3  z=x
4  x=y
5  y=z
6  print(x)
7  print(y)
```

1) Qu'affiche ce programme en sortie pour les valeurs suivantes de x et y saisies en entrée :

a) x=2 et y=-3

b) x=-5 et y=12

2) Que fait cet algorithme ?

Ex 6 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1  x=float(input("x="))
2  y=float(input("y="))
3  a=x-y
4  b=x+y
5  c=a*b-x**3
6  print(c)
```

Écrire l'algorithme correspondant en mettant en évidence les différentes étapes.

Ex 7 :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Lire N   ( N est un entier )
A ← 2/N
B ← 1/N+1/(2N)+1/(3N)+1/(6N)
Afficher A,B
```

1) Traduire cet algorithme en Python.

2) Faire fonctionner cet algorithme pour différentes valeurs de N . Que constate-t-on ? Le démontrer.

Instruction conditionnelle :

Ex 8 :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Lire X   ( X est un entier )
Si (X est un multiple de 9) Alors
    Y ← X/9
FinSi
Sinon
    Y ← X-9
Fin Sinon
Afficher Y
```

1) Qu'affiche cet algorithme en sortie pour les valeurs suivantes de la variable X ?

a) X=27

b) X=3339

c) X=2345

d) X=666

2) Traduire cet algorithme en Python.

Ex 9 :

Un groupe de personnes souhaite réserver un chalet pour les sports d'hiver. Le prix de la location à la semaine est 700 euros. Le forfait pour skier est de de 210 euros par personne . Il existe aussi un tarif de groupe à 170 euros par personne à partir de 5 personnes d'un même groupe.

1) Compléter l'algorithme ci-dessous, afin qu'il affiche en sortie le prix payé par le groupe pour la semaine, suivant le nombre de personnes du groupe saisi en entrée.

```
Lire N   ( N est un entier )
Si ( …                          ) alors
    P ← ...
FinSi
Sinon
    P ← 700+210*N
FinSinon
Afficher P
```

2) Traduire cet algorithme en Python.

3) Modifier le programme écrit en python afin qu'il affiche en sortie le prix que doit payer chaque membre du groupe.

Et/ou :

Ex 10 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1  reponse=input("répondre oui ou non")
2  if reponse=="oui" or reponse=="non":
3      print("La réponse est ",reponse)
4  else:
5      print("C'est une mauvaise réponse")
```

1) Qu'obtient-on en sortie si on saisit "oui" en entrée ?

2) Qu'obtient-on en sortie si on saisit "oii" en entrée ?

3) Décrire ce que fait ce programme.

4) Modifier ce programme pour qu'il indique en plus si la réponse est constituée de trois caractères, mais qu'elle n'est tout de même pas correcte.

Boucle Pour :

Ex 11 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1  C="Je dis"
2  for i in range (1,5):
3      C=C+" youpi"
4  C=C+" !"
5  print(C)
```

1) Qu'affiche ce programme ?

2) Modifier ce programme pour obtenir 100 fois le mot "youpi" dans la phrase affichée.

Ex 12 :

J'effectue un versement unique de 10000 euros sur un livret d'épargne.
Chaque année, le capital augmente de 80 euros par le versement d'intérêts.

1) Compléter l'algorithme ci-dessous, afin qu'il affiche en sortie le capital C disponible an bout de N années pour des intérêts annuels I .

```
Lire C,I,N      ( C, I et N sont des entiers )
Pour  k allant de 1 à   …     faire
    C ←   …
FinPour
Afficher C
```

2) Traduire cet algorithme en Python.

3) Modifier cet algorithme pour déterminer au bout de combien d'années le capital de 10000 aura doublé.

Ex 13 :

Écrire un programme en python donnant le produit P des n premiers entiers naturels.

Boucle Tant que :

Ex 14 :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Lire X    ( X est un entier )
Tant que   (X>=5) faire
    X ← X-5
Fin Tant que
Afficher X
```

1) Quelle condition doit être remplie pour que la boucle « tant que » soit réalisée ?

2) Quel est le contraire de cette condition ?

3) Peut-on obtenir 17 en sortie ? Justifier.

4) On saisit 21 en entrée . Compléter le tableau suivant et en en déduire la valeur affichée en sortie par l'algorithme.

Étapes	X	Condition vérifiée ?
Avant la boucle	21	Oui
Premier passage dans la boucle		

5) Écrire un programme en python donnant le reste d'un entier X dans la division euclidienne par un entier Y, tel que Y<X.

Ex 15 :

J'effectue un versement unique de 10000 euros sur un livret d'épargne.
Chaque année, le capital augmente de 80 euros par le versement d'intérêts.

1) Compléter cet algorithme pour déterminer au bout de combien d'années N le capital C aura atteint le montant voulu V pour des intérêts annuels I .

```
Lire C,I,V     ( C, I et V sont des entiers )
N ←  …
Tant que (   …                    ) faire
    C  ←   …
    N  ←   …
Fin Tant que
Afficher N
```

2) Traduire cet algorithme en Python.

3) Utiliser ce programme pour déterminer au bout de combien d'années le capital de 10000 aura doublé.

Ex 16 :

Dans une ville on constate une hausse annuelle de 8 % du prix des loyers.
Cette année, le prix moyen de location du mètre carré est 7 euros.
On souhaite déterminer dans combien d'années le prix de location aura dépasser 11 euros.

1) On souhaite déterminer au bout de combien d'années le prix moyen P de location dépassera X euros.
Compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Lire P,X      ( P et X  sont des flottants )
N ← …
Tant que (  …                    ) faire
    P ←  …
    N ←  …
Fin Tant que
Afficher N
```

2) Traduire cet algorithme en Python.

3) Utiliser ce programme pour répondre à la question.

4) Proposer un programme en Python avec une augmentation de t %.

Fonctions :

Ex 17 :

On considère la fonction ci-dessous écrite en Python :

```
1  def f(x) :
2      return(2*x-4)
```

1) Que renvoie ?

print(f(2)) :

print(f(-1)) :

print(f(a)) :

2) Que permet de faire cette fonction ?

Ex 18 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1  def g(a,b,x) :
2      return(a*x+b)
3
4  print(g(-1,2,4))
```

1) Quels sont les arguments de cette fonction ?

2) Qu'affiche ce programme ?

3) Comment associer avec cette fonction l'image du nombre 5 par la fonction qui à x associe -2x+7 ?

Ex 19 :

On considère la fonction ci-dessous écrite en Python :

```
1  def arit(a,b,n):
2      for i in range (1,n):
3          a=a+b
4          print(a)
```

1) Quels arguments saisir pour obtenir la suite des 100 premiers nombres pairs.

2) Quels arguments saisir pour obtenir la suite des 100 premiers nombres impairs supérieurs à 10.

3) Quels arguments saisir pour obtenir la suite des 50 premiers multiples de 3 supérieurs à 5678.

Ex 20 :

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il affiche le cube des n premiers entiers naturels non nuls :

```
1  def cube(x):
2      return(x**        )
3
4  n=int(input("Entrer n")
5  for i in range (1,        ):
6      print(cube(        ))
```

2) Écrire en python une fonction puissance, puis un programme permettant d'afficher les n premières puissances non nuls d'un entier k.

Ex 21 :

On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1   def nfois(phrase,lettre):
2       t=len(phrase)
3       n=0
4       for i in range (0,t):
5           if phrase[i]==lettre:
6               n=n+1
7       return(n)
8
9   p=input("entrer une phrase")
10  l=input("entrer une lettre")
11  print("la lettre",l,"apparaît",nfois(p,l),"fois")
```

1) Que fait ce programme ?

2) Écrire en Python une fonction freq(phrase,lettre) renvoyant la fréquence d'apparition de la lettre « lettre » dans la phrase « phrase » . Puis modifier le programme, pour qu'il affiche le résultat voulu.

L’alphabet grec en sciences

http://pierrelux.net

majuscules	minuscules	
	α	alpha
	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
	ε	epsilon
	ζ	zêta
	η	êta
Θ	θ	thêta
	ι	iota
	κ	kappa
Λ	λ	lambda
	μ	mu
	ν	nu
Χ	χ	xi ou ksi
	ο	omicron
Π	π	pi
	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
	τ	tau
	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
	ξ	chi ou khi
	ψ	psi
Ω	ω	omega

Ne sont indiquées que les capitales utilisées en sciences . Les autres, identiques à des lettres de l’alphabet latin, ne sont pas utilisées.

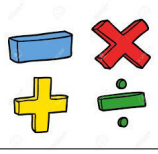
La lettre omicron, identique à notre lettre o, n’est pas utilisée en sciences.

PYTHON - les instructions de base utilisées au lycée

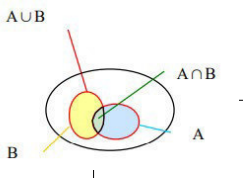
http://pierrelux.net

Créer un programme	- On va à la ligne après chaque instruction. - On peut séparer plusieurs instructions sur la même ligne en les séparant par « **;** »
Saisir une variable Il existe aussi d'autres types numériques : **type long** : Entier compris entre et – inf et 2 147 483 647 ou entre 2 147 483 648 et + inf **type complex** : Nombre complexe Pour connaître tous les types … https://fr.wikiversity.org/wiki/Python/Les_types_de_base	- **A=input("A=")** si A est une chaîne de caractère (c'est le type par défaut) **type str** : *Chaîne de caractères* - **A=float(input("A="))** si A est un flottant **type float** : *Valeur spécifiée avec un point dans le programme (exemple : a=2.0) permettant une approximation de nombre réel* - **A=int(input("A="))** si A est un entier **type int** : *Entier compris entre -2 147 483 648 et 2 147 483 647 (codage sur 32 bits soit 4 octets)*
Afficher	- **print(A)** affiche la valeur de la variable A - **print("Vive les maths")** affiche le texte Vive les maths - On peut aussi mélanger texte et variable : **print("la valeur de A est ",A)**
Affecter	**B=A** affecte la valeur A ou le contenu de la variable A à la variable B
Écrire un commentaire	Les commentaires s'écrivent après le signe **#**
Opérations élémentaires	addition **+** soustraction **-** multiplication ***** puissance ****** division **/** reste de division entière **%** (9%2 donne 1) quotient de division entière **//** (9//2 donne 4)
Tester ...	**A==B** (égal) **A!=B** (différent) **A>B** (supérieur) **A<B** (inférieur) **A>=B** (supérieur ou égal) **A<=B** (inférieur ou égal)
Et / Ou	A **and** B / A **or** B
Si … Sinon Si … Sinon	**if** *condition C1* **:** *instruction A1* **elif** *condition C2* **:** *instruction A2* **else :** *instruction A3* C'est **le décalage** vers la droite qui indique les instructions faisant partie de la structure conditionnelle. Il n'y a pas d'instruction de fin. Il en est de même pour **for** , **while** et **def**.
Boucle Pour	**for i in range(1,n+1) :** *instruction A* la variable i parcourt tous les entiers de 1 à n - **for i in range(n):** la variable i parcourt tous les entiers de 0 à n-1 - **for i in range(m,n):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 - **for i in range(m,n,p):** la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 avec un **pas** de p.
Boucle Tant que	**while** *condition* **:** *instruction A*
Fonctions	**Def exemple(a,b …):** *instruction … y=…* **return(y)** a,b,… sont **les arguments** de la fonction exemple On peut aussi retourner plusieurs valeurs : return(x,y,z,...)
Insérer un **module**	Un module est une bibliothèque comportant un ensemble de fonctions. Je présente ci-dessous les modules utilisés au lycée.
Opérations mathématiques : math **Toutes les fonctions du module math** **https://www.afpy.org/doc/python/3.5/library/math.html**	**from math import *** On peut aussi importer uniquement la fonction souhaitée : **from math import sqrt** Le module math, contient les définitions de nombreuses fonctions mathématiques telles que **sin**, **cos** , **tan** ,**sqrt** , **pi** …
Nombres aléatoires : random **Toutes les fonctions du module random** **https://docs.python.org/fr/3.5/library/random.html**	**from random import *** Le module random contient les définitions de nombreuses fonctions faisant référence au hasard telles que : - **uniform(a,b)** qui retourne un nombre aléatoire compris entre a et b - **randint(a,b)** qui retourne un entier aléatoire compris entre a et b
Graphiques : pylab Bases du module **pylab** **http://matplotlib.free.fr/bases.html**	**from pylab import *** Le module pylab contient de nombreuses fonctions graphiques, ce qui en fait un outil très puissant pour créer des graphiques scientifiques. Ce module possède aussi les fonctions usuelles du module math , il n'est donc pas utile d'importer aussi celle-ci lorsqu'on utilise pylab. On peut aussi utiliser une version plus légère : **matplotlib.pyplot**. Mais celui-ci ne possède pas les fonctions du module math.
Listes et chaînes de caractères	**A=[]** permet de définir la liste vide A **A.append(x)** ajoute la valeur x à la liste (Si la liste était définie jusqu'au 10 ème terme, x sera le 11ème terme)
Longueur	**len(A)** renvoie la longueur de la liste ou de la chaîne de caractères A
Extraire	**A[k]** renvoie le k+1 ème élément de la liste ou de la chaîne de caractères A. Attention A[0] est le premier terme de la liste.
Concaténer	"mathé "**+**"matiques" donne la chaîne de caractères "mathématiques" [1,2,3,4]**+**[5,6,7,8] donne la liste [1,2,3,4,5,6,7,8]

Quelques symboles mathématiques à connaître



http://pierrelux.net

				Exemples
Symbole d'implication	$A \Rightarrow B$	A **implique** B **Si** A **alors** B B est **nécessaire** à A A est **suffisant** pour B	Ce symbole est censé exprimer l'idée que A est vraie entraîne que B aussi.	$x=2 \Rightarrow x^2=4$
Symbole d'équivalence	$A \Leftrightarrow B$ A ssi B	A **équivaut à** B A **si et seulement si** B	Il s'agit d'une implication dans les deux sens : A implique B et B implique A	$x=2$ ou $x=-2$ $\Leftrightarrow x^2=4$
Quantificateur universel	$\forall x \ , \ P(x)$	**Quel que soit** x ; **pour tout** x	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour tout x	$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ x^2+\frac{1}{x+1}>0$
Quantificateur existentiel	$\exists x \ , \ P(x)$	**Il existe** x tel que...	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un x .	$\exists x \in \mathbb{R} \ , \ (x-2)(x-3)>0$
Symbole d'appartenance	$x \in E$	x **appartient à** E x **est élément de** E E **contient** x	Pour un ensemble E donné, ce symbole signifie qu'il contient l'élément x .	$A \in d$ $2 \in]-3;5[$
Symbole de non-appartenance	$x \notin E$	x **n'appartient pas à** E	Négation de l'appartenance de x à E .	$-5 \notin \mathbb{N}$
Symbole d'inclusion	$A \subset B$	A est **inclus** dans B A est **un sous-ensemble** de B A est **une partie** de B B **contient** A	Pour deux ensembles A et B donnés, ce symbole signifie que tous les éléments de A sont éléments de B .	$]-2;5[\subset]-3;8[$
Symbole de non-inclusion	$A \not\subset B$	A n'est **pas inclus** dans B	Négation de l'inclusion de A dans B , c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B .	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$
Ensemble vide	$\emptyset$	**Ensemble vide**	Ensemble qui ne comporte aucun élément	$]3,1;5[\cap [5,2;+\infty[= \emptyset$
Singleton, paire, ensembles finis Accolades { … }	$\{x\}$ $\{x,y\}$ $\{x_1,x_2 \ldots x_n\}$	**Singleton** x **Paire** $x \quad y$ **Ensemble** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Ensemble dont l'unique élément est x Ensemble dont les seuls éléments sont x et y Ensemble dont les n éléments sont $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$.	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=4$ est $S=\{-2;2\}$ L'ordre n'est pas important. On aurait pu écrire $\{2;-2\}$
Couple, Triplet, n-uplet Parenthèses (...)	(x,y) (x,y,z) $(x_1,x_2 \ldots x_n)$	**Couple** $x \quad y$ **Triplet** $x \quad y \quad z$ **n-uplet** $x_1 \ , \ x_2 \ \ldots \ x_n$	Représentation d'une collection d'objets occupant chacun **une place précise**, au sens où contrairement à un ensemble finis, l'ordre et la répétition des objets n'est pas anodine.	Le point de coordonnées $(5;7)$ n'est pas le point de coordonnées $(7;5)$.
Réunion $A \cup B$		A **union** B **Réunion** de A et B	Ensemble contenant les éléments de A **ou** B et seulement ceux-là. Les éléments en commun à A et B sont dans la réunion. On dit que le ou mathématique est **inclusif**.	$]-7;8] \cup [-3;10[=]-7;10[$
Intersection $A \cap B$		A **inter** B **Intersection** de A et B	Ensemble contenant les éléments en communs de A et B et seulement ceux-là.	$]-7;8] \cap [-3;10[= [-3;8]$
Somme	$\sum_{i=1}^{n}$	**Somme** de $i=1$ à $i=n$	On avance de 1 en 1, c'est à dire : 1,2,3,4,5 $\ldots, n$	$\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$
Association	$f : x \longmapsto f(x)$	fonction f **qui à** x associe le nombre $f(x)$	Attention, il ne faut pas utiliser la flèche $\rightarrow$	$f : x \longmapsto x^2$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels**. $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;\ldots\}$

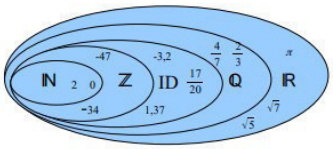
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou ***nombres entiers***) $\mathbb{Z}=\{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$

$\mathbf{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels privé de 0.
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0. $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs. $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs.
$\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des réels strictement positifs. $\mathbb{R}^{-*}$ est l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R}-\{2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2

$\mathbb{R}-\{2;5,2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2;5,2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2 et 5,2