1ère **Pique-nique n ° 5**

- Durée 1 h 55
- Calculatrices de lycée autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 8 pts **2)** 8 pts **3)** 4 pts	

Répondre sur cette feuille

Le trio ...		
Que signifie α et Δ ?	factoriser : $3x^2(x-1)+2x^2$ (en montrant les étapes)	Écrire en python : « tant que x est positif ou nul »

Ex 1 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{4+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :
Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	-0,33333333
3	1	0,75	-0,06666667
4	2	0,947368	-0,01333333
5	3	0,989362	-0,00266667
6	4	0,997868	-0,00053333
7	5	0,999573	-0,00010667
8	6	0,999915	-2,1333E-05
9	7	0,999983	-4,2667E-06
10	8	0,999997	-8,5333E-07
11	9	0,999999	-1,7067E-07

En B3 :

En C2 :

b) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

c) En calculant quelques quotients $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Compléter le calcul suivant :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\square}{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}\times\square=\frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\square}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\square}{\square}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}$$

Ce qui donne :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_n-1}{5u_n+15}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\square$$

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

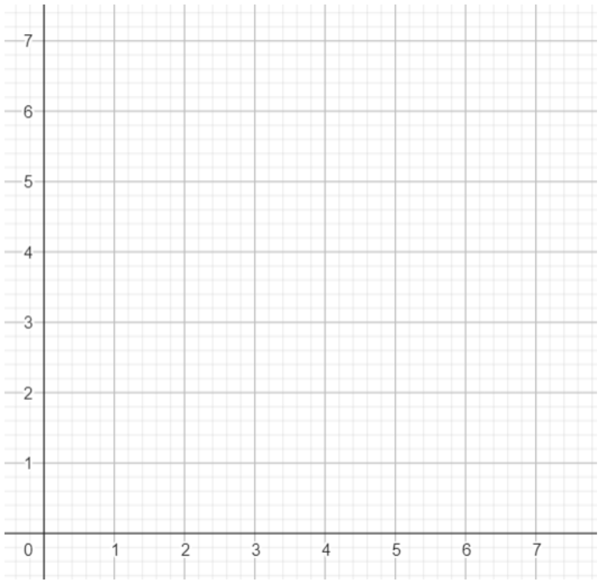
c) En utilisant $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$, exprimer u_n en fonction de v_n .

d) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n=\dfrac{3-3\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

e) Déterminer en justifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

f) Que peut-on alors dire de la conjecture faite à la question 1) b) ?

Ex 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{-1}{3}u_n+5 \end{cases}$.



1) a) Représenter graphiquement la suite (u_n).

b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux droites utilisées pour la construction précédente.

c) Conjecturer la limite de (u_n)

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-\dfrac{15}{4}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

3)

a) Compléter le programme ci-contre écrit en Python, afin de déterminer le premier indice n tel que $\left|u_n - \frac{15}{4}\right| < 0{,}0001$.

```
n=
U=
while abs(U-15/4)     0.0001 :
    n=
    U=-1/3*U+5
print(   )
```

b) Donner la valeur retournée par le programme.

<u>Ex 3 :</u> Pour calculer la somme $T = 4 + \frac{11}{2} + 7 + \frac{17}{2} + \ldots + 46$, on utilise le programme incomplet écrit en Python ci-dessous :

1) Compléter ce programme.

```
T=
U=4
while      :
    T=T+U
    U=
print(T)
```

2) Par la méthode de votre choix (formule du cours, tableur, programme…) , déterminer ce qu’affiche ce programme. Seul le résultat est demandé.

Correction :

Le trio ...		
Que signifie α et Δ ?	factoriser : $3x^2(x-1)+2x^2$ (en montrant les étapes)	Écrire en python : « tant que x est positif ou nul »
Alpha minuscule et Delta majuscule	$x^2(3(x-1)+2)=x^2(3x-1)$	while (x>=0) :

Ex 1 :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	-0,33333333
3	1	0,75	-0,06666667
4	2	0,947368	-0,01333333
5	3	0,989362	-0,00266667
6	4	0,997868	-0,00053333
7	5	0,999573	-0,00010667
8	6	0,999915	-2,1333E-05
9	7	0,999983	-4,2667E-06
10	8	0,999997	-8,5333E-07
11	9	0,999999	-1,7067E-07

1) On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{4+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

a) En B3 : =(2*B2+3)/(4+B2) En C2 : =(B2-1)/(B2+3)

b) (u_n) semble tendre vers 1

c) (v_n) semble être une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $\frac{1}{3}$

2) a) Compléter le calcul suivant :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}}{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+15}{u_n+4}}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}$$

Ce qui donne :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_n-1}{5u_n+15}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{5(u_n+3)}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{1}{5}=0,2$$

b) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et premier terme $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+3}=\frac{-1}{3}$

Ainsi pour tout entier naturel n , on a $v_n=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$

c) $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3} \Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-1 \Leftrightarrow v_nu_n+3v_n=u_n-1 \Leftrightarrow v_nu_n-u_n=-1-3v_n \Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-3v_n \Leftrightarrow u_n=\frac{-1-3v_n}{v_n-1}$

Ce qui donne $u_n=\frac{1+3v_n}{1-v_n}$

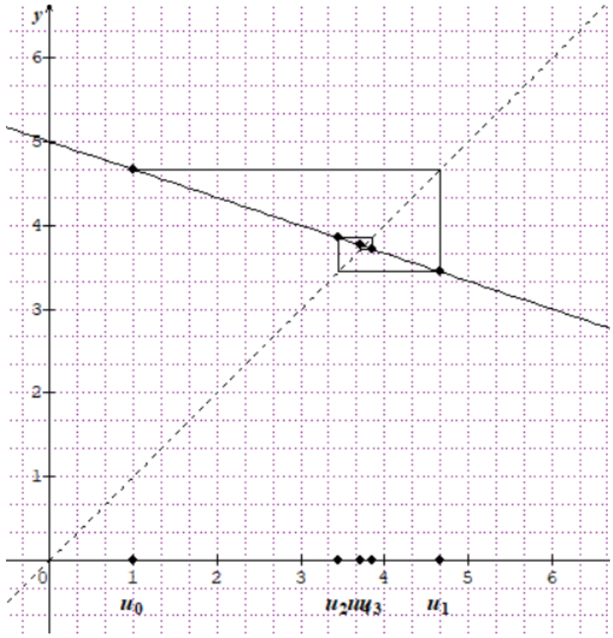
d) Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n=\dfrac{1-3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\dfrac{3-3\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ car $-1<\frac{1}{5}<1$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-3\left(\frac{1}{5}\right)^n=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\left(\frac{1}{5}\right)^n=3$ et don c $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

Ex 2 :

1) a)



b) $-\frac{1}{3}x+5=x \quad \Leftrightarrow \quad -x+15=3x \quad \Leftrightarrow \quad 4x=15 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{15}{4}$

c Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{15}{4}$

2) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{15}{4}=-\frac{1}{3}u_n+5-\frac{15}{4}=-\frac{1}{3}u_n+\frac{5}{4}=-\frac{1}{3}\left(u_n-\frac{15}{4}\right)=-\frac{1}{3}v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de premier terme $v_0=u_0-\frac{15}{4}=1-\frac{15}{4}=-\frac{11}{4}$ et de raison $-\frac{11}{4}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{-11}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ et $u_n=v_n+\frac{15}{4}=-\frac{11}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{15}{4}$

c) On a $0<\frac{-1}{3}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{15}{4}$

3) a)

```
n=0
U=1
while abs(U-15/4)>=0.0001:
   n=n+1
   U=-1/3*U+5
print(n)
```

b) On trouve $n=10$.

Ex 3 :

1)

```
T=0
U=4
while U<=46:
   T=T+U
   U=U+3/2
print(T)
```

2) On trouve 725

On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme $u_0=4$ et de raison $\frac{3}{2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=4+\frac{3}{2}n$

$u_n=46 \quad \Leftrightarrow \quad 4+\frac{3}{2}n=46 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}n=42 \quad \Leftrightarrow \quad n=\frac{2}{3}\times 42 \quad \Leftrightarrow \quad n=28$

Ainsi $S=\sum_{i=0}^{28} u_i=29\times\frac{4+46}{2}=725$