1ère **Piqué-nique n ° 7**

- Durée 2h
- Calculatrices de lycée interdites

Barème : 1) 4 pts 2) 5 pts 3) 6 pts 3) 5 pts	**Nom :**

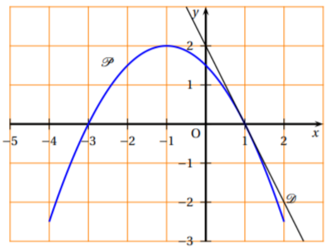
Répondre sur cette feuille

Le trio ...

Dériver la fonction f, définie par : $f(x)=\alpha x^2-\frac{\beta}{x}$	Simplifier : $\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{15}$	Écrire en python : « ajouter la valeur 3 à la liste M »

Ex 1 : Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte.
Une réponse juste apporte 1 point . Une réponse fausse enlève 0,5 point. L’absence de réponse n’apporte ni n’enlève de point.
Entourer la réponse choisie. Aucune justification n’est demandée.
La parabole P ci-contre est la représentation graphique d’une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et la droite D est la tangente à la courbe P au point d’abscisse 1.

1) L’équation $g'(x)=0$ a :	A. 1 solution	B. 2 solutions	C. On ne peut pas savoir	D. une infinité de solutions
2) L’inéquation $g'(x)>0$ a pour ensemble de solutions :	A. $]-\infty\ ;-1]$	B. $[-4\ ;-1]$	C. $]-\infty\ ;-1[$	D. $[-1\ ;+\infty\ [$
3) On a $g'(1)=$:	A. -2	B. $-\frac{1}{2}$	C. 2	D. $\frac{1}{2}$
4) On a $g'(-3)=$:	A. -2	B. $-\frac{1}{2}$	C. 2	D. $\frac{1}{2}$

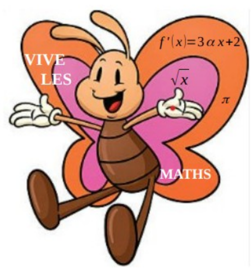


Ex 2 : On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$

a) Justifier l’ensemble de définition de f.

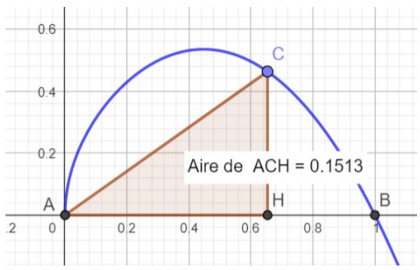
b) Déterminer f ’

3) Déterminer le tableau de variations de f.



4) En déduire en quelles valeurs sont atteints les éventuels extrema de f.
En utilisant la calculatrice, conjecturer si les extrema obtenus sont locaux ou globaux.

Ex 3 : La courbe d’équation $y=\sqrt{x}(1-x^2)$ coupe l’axe des abscisses en A et B.
Le point $C(x;y)$ se déplace sur la courbe entre A et B. Le but du problème est de déterminer l’abscisse du point C pour que l’aire du triangle rectangle AHC soit maximale.
1) Déterminer (par le calcul) les coordonnées des points A et B.

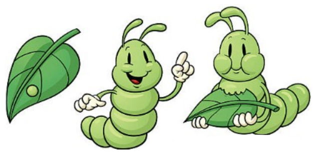


2) On note $f(x)$, l’aire du triangle en fonction de x.
a) Déterminer l’ensemble de définition de f.

b) Déterminer $f(x)$

3) Montrer que pour $x\in]0;1]$, $f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}(3-7x^2)$. (On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$)

4) Déterminer le tableau de variation de f , puis répondre au problème posé.



<u>Ex 4 :</u> En utilisant la fonction d définie par $d(x)=\frac{\sqrt{x}}{3+x}-\frac{1}{3}$, montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $\frac{\sqrt{x}}{3+x}<\frac{1}{3}$.
On admet que d n'est pas dérivable en 0.

Correction :

Le trio ...		
Dériver la fonction f , définie par : $f(x)=\alpha x^2-\dfrac{\beta}{x}$	Simplifier : $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{15}$	Écrire en python : « ajouter la valeur 3 à la liste M »
$f'(x)=2\alpha x+\dfrac{\beta}{x^2}$	$\dfrac{6\pi}{30}+\dfrac{3\pi}{30}+\dfrac{2\pi}{30}=\dfrac{11\pi}{30}$	M.append(3)

Ex 1 :

1) L'équation $g'(x)=0$ a :	A. 1 solution	B. 2 solutions	C. On ne peut pas savoir	D. une infinité de solutions
2) L'inéquation $g'(x)>0$ a pour ensemble de solutions :	A. $]-\infty\ ;-1]$	B. $[-4\ ;-1]$	C. $]-\infty\ ;-1[$	D. $[-1\ ;+\infty[$
3) On a $g'(1)=$:	A. -2	B. $-\dfrac{1}{2}$	C. 2	D. $\dfrac{1}{2}$
4) On a $g'(-3)=$:	A. -2	B. $-\dfrac{1}{2}$	C. 2	D. $\dfrac{1}{2}$

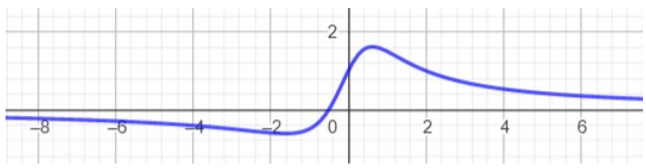
Ex 2 :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $D_f=\mathbb{R}$

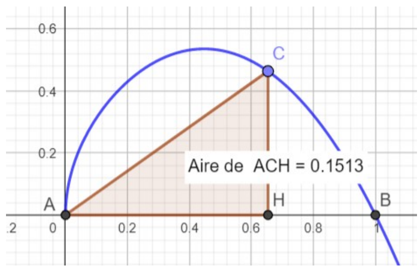
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle) et $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$

3) $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+1$. On a $\Delta=5$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f		$\searrow$	$f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	



4) D'après le tableau ci-dessus et grâce à la représentation graphique (ou en calculant quelques grandes valeurs) on conjecture que, le minimum de f est atteint en $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et que le maximum est atteint en $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Ex 3 :

1) sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(x)=0 \iff \sqrt{x}(1-x^2)=0 \iff \sqrt{x}=0$ ou $x^2=1 \iff x=0$ ou $x=1$

On en déduit A(0;0) et B(1;0)

2) a) $D_f=[0\,;1]$. b) $f(x)=\dfrac{\text{AH}\times\text{HC}}{2}=\dfrac{x\sqrt{x}(1-x^2)}{2}=\dfrac{\sqrt{x}(x-x^3)}{2}$

3) f est dérivable sur]0;1], par opérations sur les fonctions dérivables . Pour tout $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left((\sqrt{x})'(x-x^3)+\sqrt{x}(x-x^3)'\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-x^3)+\sqrt{x}(1-3x^2)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-x^3}{2\sqrt{x}}+\frac{2x(1-3x^2)}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x}}(x-x^3+2x-6x^3)=\frac{3x-7x^3}{4\sqrt{x}}=\frac{x}{4\sqrt{x}}(3-7x^2)$$

On obtient bien:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}(3-7x^2)$$

4) Sur]0;1] $\dfrac{\sqrt{x}}{4}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $3-7x^2$

Sur]0;1] , $3-7x^2>0 \iff \dfrac{3}{7}>x^2 \iff \sqrt{\dfrac{3}{7}}>x>0 \iff 0<x<\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

x	0		$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$		1
$f'(x)$	0	+	0	-	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

L'aire est donc maximale pour $x_C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Ex 4 :

d est dérivable sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ par quotient et somme de fonctions dérivables sur I .

Pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $d'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(3+x)-\sqrt{x}}{(3+x)^2}=\dfrac{\dfrac{3+x-2x}{2\sqrt{x}}}{(3+x)^2}=\dfrac{\dfrac{3-x}{2\sqrt{x}}}{(3+x)^2}=\dfrac{3-x}{2\sqrt{x}(3+x)^2}$

$d'(x)$ est clairement du signe de $3-x$

x	0		3		$+\infty$
$d'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
d		$\nearrow$	$d(3)$	$\searrow$	

$d(3)\approx-0{,}045$

Ainsi, pour tout $x\geqslant 0$, on a : $d(x)\leqslant d(3)<0$ et donc $\dfrac{\sqrt{x}}{3+x}<\dfrac{1}{3}$