1ère	**Pique-nique n ° 8**	**Barème :** **1)** 7 pts **2)** 4 pts **3)** 9 pts	**Nom :**

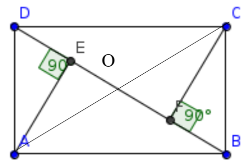
- Durée 2h
- Calculatrices de lycée autorisées

Répondre sur cette feuille

Le trio ...

Dériver la fonction f , définie par : $f(x)=\frac{\alpha}{x}+\beta$	factoriser : $4x^2(x-1)-8x(x-1)^3$	Écrire en python : x prend la longueur de la liste L

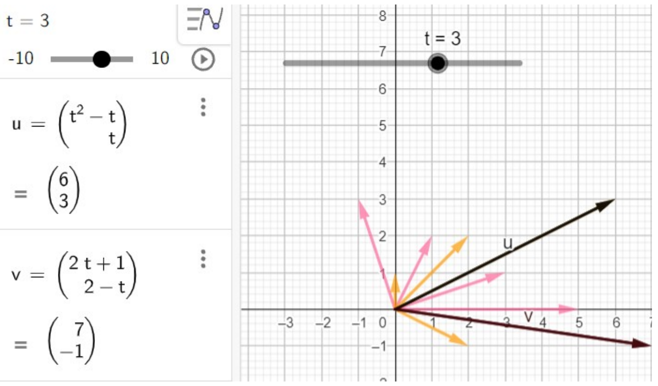
Ex 1 : On considère un rectangle ABCD de centre O tel que AB=10 et AD=6.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droites (BD).
On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens et $\vec{j}$ et $\overrightarrow{AD}$ aussi.
1) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



2) En déduire la valeur exacte de la longueur de ED.

3) En utilisant à nouveau le produit scalaire, déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{BOC}$

Ex 2 : On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.



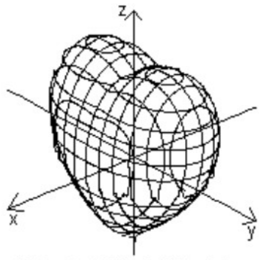
On considère les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 - t \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2-t \end{pmatrix}$.

Calculer t pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Ex 3 : On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Soit les points A(-2;1) et B(8;-3).

1) En introduisant le milieu I de [AB], exprimer $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$ en fonction de IM et AB.

2) Déterminer l'ensemble F_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -28$

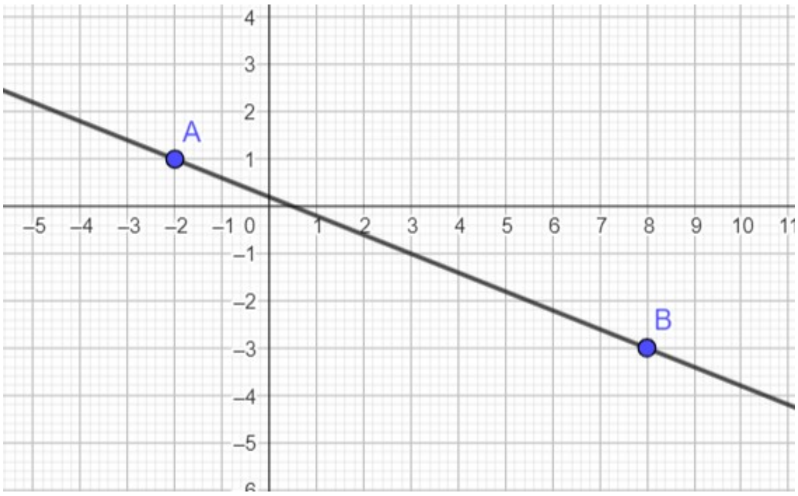


$(2x^2+y^2+z^2-1)^3-x^2z^3/10-y^2z^3=0$
$-3 \leq x,y,z \leq 3$

3) En déduire l’ensemble F_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant -28$

4) Déterminer l’ensemble F_3 des points M du plan, tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

5) Sans justification, représenter l'ensemble F_4 des points M du plan, tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8\sqrt{29}$



Correction

Le trio ...		
Dériver la fonction f , définie par : $f(x)=\frac{\alpha}{x}+\theta$	factoriser : $4x^2(x-1)-8x(x-1)^3$	Écrire en python : x prend la longueur de la liste L
$f(x)=-\frac{\alpha}{x^2}$	$4x(x-1)(x-2(x-1)^2)=4x(x-1)(x-2(x^2-2x+1))$ $=4x(x-1)(5x-2x^2-2)$	x=len(L)

Ex 1 :

1) On a A(0;0), B(10;0) C(10,6) et D(0;6)

On obtient : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$

On a alors : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=10\times 10+(-6)\times 6=64$

D'autre part : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EF}$ (par projection de $\overrightarrow{EF}$ sur (DB))

$= DB\times EF$ (car $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont le même sens)

Or $DB=\sqrt{10^2+(-6)^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$

Ainsi $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{34}\times EF$

On en déduit que : $2\sqrt{34}\times EF=64 \Leftrightarrow EF=\frac{32}{\sqrt{34}}$ et donc $EF=\frac{32\sqrt{34}}{34}=\frac{16\sqrt{34}}{17}$

2) Par symétrie, on a DE=BF.

On en déduit que :

$2DE+EF=BD \Rightarrow 2DE=2\sqrt{34}-\frac{16\sqrt{34}}{17}=\frac{18\sqrt{34}}{17} \Rightarrow DE=\frac{9\sqrt{34}}{17}$

3) On a aussi : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=DB\times AC\times\cos\widehat{BOC}=DB^2\times\cos\widehat{BOC}=136\times\cos\widehat{BOC}$

Ainsi : $136\times\cos\widehat{BOC}=64$ et $\cos\widehat{BOC}=\frac{64}{136}=\frac{8}{17}$

Donc $\widehat{BOC}\approx 61{,}9°$

Ex 2 :

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (t^2-t)\times(2t+1)+t\times(2-t)=0 \Leftrightarrow 2t^3+t^2-2t^2-t-t^2+2t=0 \Leftrightarrow 2t^3-2t^2+t=0$

Ainsi

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow t(2t^2-2t+1)=0 \Leftrightarrow t=0$ ou $2t^2-2t+1=0$

L'équation $2t^2-2t+1=0$ n'a pas de solution car $\Delta<0$

La seule possibilité (pas très intéressante) est $t=0$

Ex 3 :

1) On a : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2=IM^2-\frac{AB^2}{4}$

2) On a $AB^2=(8-(-2))^2+(-3-1)^2=10^2+4^2=116$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-28 \Leftrightarrow IM^2-\frac{AB^2}{4}=-28$

$\Leftrightarrow IM^2=\frac{AB^2}{4}-28$

$\Leftrightarrow IM^2=\frac{116}{4}-28$

$\Leftrightarrow IM=1$ avec $I(3;-1)$

L'ensemble F_1 est donc le cercle de centre I et de rayon 1

3) F_2 est le disque de centre I et de rayon 1

4) F_3 est le cercle de diamètre [AB]

5) On a $AB=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

On note H le projeté orthogonal de M sur (AB).

On a alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$ (car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}>0$)
Ce qui donne : $8\sqrt{29}=2\sqrt{29}\times AH \Leftrightarrow AH=4$

Donc M est sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par H, tel que

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de même sens et AH=4.

La réciproque est évidente .

En effet, tout point de cette droite vérifie $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB\times AH=8\sqrt{29}$.

On en déduit que l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8\sqrt{29}$ est

la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.