1ère **Pique-nique n ° 3**

- Durée 1h30
- Calculatrices de collège autorisées

Barème : 1) 2 pts 2) 3,5 pts 3) 4 pts 4) 4 pts 5) 2 pts 6) 4,5 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) 15,7 et 9,42

2) $\frac{17\pi}{11}$ et $\frac{-71\pi}{11}$

Ex 2 :

1) a) Simplifier au maximum l'expression :

$A(x)=2\cos(x-3\pi)+3\cos(\pi+x)+6\cos(-x)$

b) En déduire, en expliquant la démarche utilisée une valeur exacte de :

$2\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

2) Simplifier au maximum l'expression : $B(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)$

Ex 3 :

1) On admet la formule $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$. En déduire, en expliquant la démarche utilisée une formule permettant de calculer $\cos(2a)$

2) En déduire, en expliquant la démarche utilisée la formule suivante : $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

3) En utilisant la formule précédente, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Ex 4 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Étudier la parité de f .

3) f est-elle périodique de période π ou 2 π ? Justifiez votre réponse.

4) Déterminer la valeur exacte de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Ex 5 : Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique. Soit $\mathrm{N}(0,5\cos\alpha\,;-0,5\sin\alpha)$ où α est un réel.
Déterminer s'il est situé à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle , ou à l'extérieur du cercle.

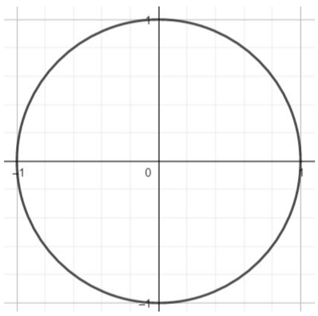
Ex 6 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $\cos(2x) = -2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

b) $6\sin x + 1 = -2$

2) Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

$-\frac{1}{2} \leqslant \cos(\alpha) \leqslant \frac{1}{2}$ et $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$



Correction :

Ex 1 :

1) 15,7-9,42=6,28 qui n'est pas un multiple de 2 π : NON	2) $\frac{17\pi}{11}+\frac{71\pi}{11}=\frac{88\pi}{11}=8\pi=4\times2\pi$:OUI

Ex 2 :

1) a) $A(x)=2\cos(x-3\pi)+3\cos(\pi+x)+6\cos(-x)$ $=2\cos(\pi-x)-3\cos(x)+6\cos(x)$ $=-2\cos(x)-3\cos(x)+6\cos(x)$ $=\cos(x)$

b) Il suffit dans la formule précédente de prendre $x=\frac{\pi}{4}$, on obtient : $2\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $B(x)=$ $\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)$ = $\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)$ = $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)$ =1

Ex 3 :

1) $\cos(2a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

2) On a alors : $\cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))=2\cos^2(a)-1$, ce qui donne bien $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

3) On a $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$ $=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Comme $0\leqslant\frac{\pi}{8}\leqslant\frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$. Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ $=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Ex 4 :

1) On doit avoir $\cos(x)\neq0$. Or :

$\cos(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ainsi $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) D_f est bien centré en 0.

Pour tout $x\in D_f$, on a: $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)=-f(x)$

Donc f est impaire.

3) $f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=f(x)$

4) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex 5 :

$ON^2=x_N{}^2+y_N{}^2=(0{,}5\cos\alpha)^2+(-0{,}5\sin\alpha)^2=0{,}25(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=0{,}25$. Donc ON<1 et N est à l'intérieur du cercle .

Ex 6 : 1)

a) $\cos(2x) = -2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -2(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -2$

Ce qui est impossible.

b) $6\sin x + 1 = -2 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2) Sur]- π ; π], $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(\alpha) \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left[\frac{-2\pi}{3} ; \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$