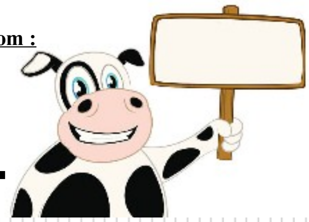
1ère **Pique-nique n ° 6**

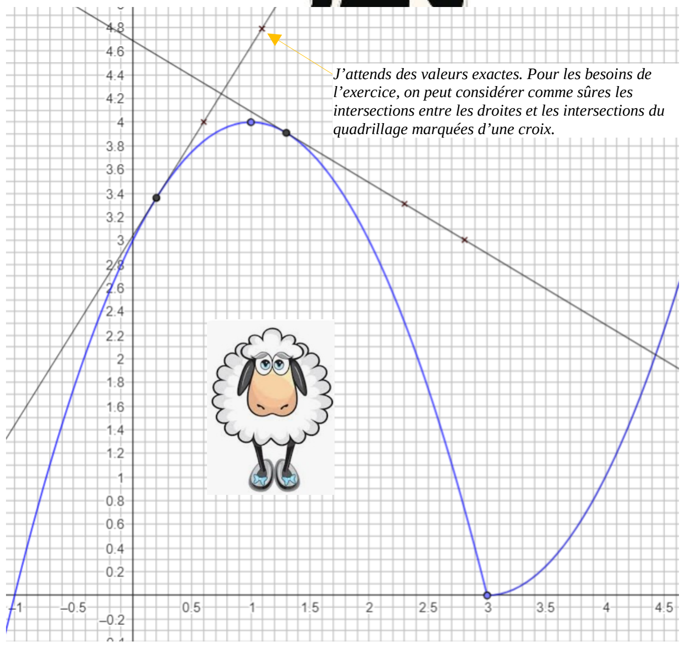
- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Barème :
1) 5 pts **2)** 6,5 pts
3) 4 pts **4)** 7
pts (2,5 point en cadeau)

Nom :



Répondre sur cette feuille



Ex 1 : On considère la courbe représentative C_f d'une fonction f .

1) En utilisant cette représentation graphique, déterminer :

$f'(0,2)$ $f'(1)$

$f'(1,3)$ $f'(3)$

2) Déterminer l'équation exacte de la tangente à la courbe au point A(1,3;3,9).

3) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x)=0$ sur l'ensemble $[0;4]$

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)>0$ sur l'ensemble $[0;4]$

Ex 2 : On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2+a}$ où $a\in\mathbb{R}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f suivant les valeurs de a .

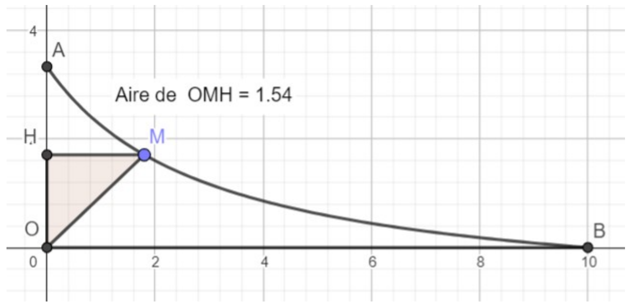
b) Déterminer f'

3) a) Déterminer le tableau de variations de f pour $a>0$.
(Si vous ne réussissez pas cette question vous pouvez pour la moitié des points de la question faire l'étude pour $a=1$)

b) Pour quelle valeur de a , f admet-elle un maximum en -1 .

4) Déterminer le tableau de variations de f pour $a<-\frac{1}{4}$.
(Si vous ne réussissez pas cette question vous pouvez pour la moitié des points de la question faire l'étude pour $a=-1$)

Ex 3 : Soit f la fonction définie sur [0;10] par $f(x)=\frac{10-x}{x+3}$



Le point $\mathrm{M}(x;y)$ se déplace sur la courbe entre A et B. Le but du problème est de déterminer l'abscisse du point M pour que l'aire du triangle rectangle OHM soit maximale.

1) Déterminer $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x.

2) Calculer $f'(x)$.

3) Déterminer le tableau de variation de f, puis répondre au problème posé.

Ex 4 : 1) On considère la fonction f définie par $f(x)=4x^3-15x^2+18x-5$.

a) Etudier les variations de la fonctions f.

b) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire le nombre maximum de solutions que l'équation $f(x)=0$ possède.

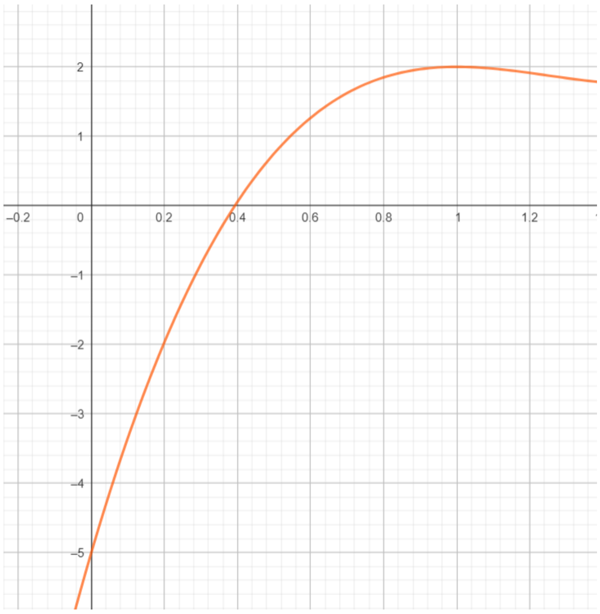
Nous allons maintenant essayer de trouver une valeur approchée de α , l'unique solution appartenant à l'intervalle [0;1].

2) On a représenté ci-contre C_f la courbe représentative de f .

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A.

b) Déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_1 de A .



c) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

3) **Mise en place de l'algorithme : (cas général)**

Soit f une fonction telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur un intervalle où elle est définie. On note C_f sa courbe représentative . Soit x_0 un réel bien choisi afin que l'algorithme converge bien vers α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=4x^3-15x^2+18x-5$.

Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour que la fonction newton retourne un réel x tel que $|f(x)|<10^{-4}$. On choisit $x=0$ comme valeur de départ.

```
1  def f(a,b,c,d,x):
2      return a*x**3+b*x**2+c*x+d
3  def der_f(a,b,c,x):
4      return ……………….
5  def newton(a,b,c,d,x,p):
6       while abs(f(a,b,c,d,x))>………… :
7           x=x-f(a,b,c,d,x)/……...
8       return(x)
9  print(newton(… , … , … , … , … , ...))
```

d) Modifier uniquement la ligne 9 pour résoudre l'équation $f(x)=1$

Correction :

Ex 1 :

1) $f'(0,2)=1,6$ $\quad$ $f'(1)$ =0 $\quad$ $f'(1,3)$ =-0,6 $\quad$ $f'(3)$ impossible

2) $y=f'(1,3)(x-1,3)+f(1,3) \Leftrightarrow y=-0,6(x-1,3)+3,9 \Leftrightarrow y=-0,6x+0,78+3,9 \Leftrightarrow y=-0,6x+4,68$

3) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

4) $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in[0;1[\cup]3;4]$

Ex 2 :

1) Si $a>0$, $x^2+a>0$, donc $D_f=\mathbb{R}$

Si $a=0$, $D_f=\mathbb{R}^*$

Si $a<0$, $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{-a};\sqrt{-a}\}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle) et $f'(x)=\dfrac{-2(x^2+a)-2x(1-2x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{2(x^2-x-a)}{(x^2+a)^2}$

3) a) $f'(x)$ est du signe de x^2-x-a . On a $\Delta=$ $1+4a$, $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ et $x_2=$ $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	$f\left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right)$	↘	$f\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$	↗	

b) $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ =-1 $\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+4a}=-2 \Leftrightarrow \sqrt{1+4a}=3 \Leftrightarrow 1+4a=9 \Leftrightarrow a=2$

4) Si $a<-\dfrac{1}{4}$, $\Delta<0$ et $f'(x)$ est donc toujours strictement positif.

x	$-\infty$		$-\sqrt{-a}$		$\sqrt{-a}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
f		↗	‖	↗	‖	↗	

Ex 3 :

1) $f(x)=\dfrac{OH\times HM}{2}=\dfrac{f(x)\times x}{2}=\dfrac{10x-x^2}{2x+6}$

2) On trouve…. $f'(x)=\dfrac{-x^2-6x+30}{2(x+3)^2}$

3) $f'(x)$ est du signe de $-x^2-6x+30$ … on trouve $x_1=-3-\sqrt{39}$ $\approx$ -9,24 et $x_2=-3+\sqrt{39}$ $\approx$ 3,24

x	0		$-3+\sqrt{39}$		10
$f'(x)$		+	0	-	
f		↗		↘	

L'aire du triangle est maximale pour $x=-3+\sqrt{39}$

Ex 4 :

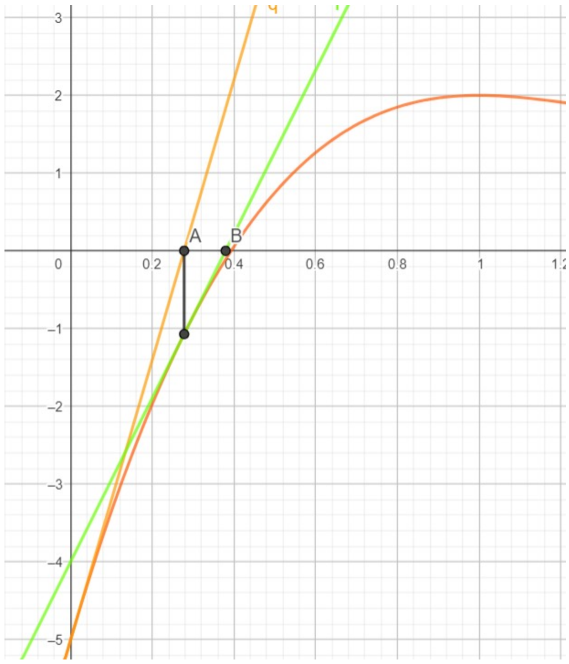
1) a) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=12x^2-30x+18=2(6x^2-15x+9)$

$x_1=1$ est une racine évidente, l'autre raine est $x_2=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	2	↘	1,75	↗	

b) On a $f(0)=-5$ et $f(1)=2$. On en déduit que l'équation possède au plus une solution .
(En fait exactement une comme vous le verrez en terminale)



2) b)

T_{x_0} a pour équation : $y=f'(0)x+f(0) \Leftrightarrow y=18x-5$

On a $0=18x_1-5 \Leftrightarrow x_1=\frac{5}{18}$

3) a) T_{x_0} admet pour équation : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

b) On note x_1 l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses.
On a :

$$0=f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)x_1-x_0f'(x_0)+f(x_0)=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

c)

```
def f(a,b,c,d,x):
   return a*x**3+b*x**2+c*x+d
def der_f(a,b,c,x):
   return 3*a*x**2+2*b*x+c
def newton(a,b,c,d,x,p):
    while abs(f(a,b,c,d,x))>10**(-p):
       x=x-f(a,b,c,d,x)/der_f(a,b,c,x)
    return(x)
print(newton(4,-15,18,-5,0,4))
```

d) $f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow 4x^3-15x^2+18x-6=0$

Donc : print(newton(4,-15,18,-6,0,4))