1ère **Pique-nique n ° 7**

- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Barème :
1) 5 pts **2)** 6 pts **3)** 4 pts **4)** 3 pts **5)** 3 pts
(1 point en cadeau)

Nom :

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Vrai ou faux (réponse juste : + 0,5 / réponse fausse : -0,5 / pas de réponse : 0)

		Réponses
1	Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.	
2	Si (u_n) est monotone, alors (u_n) est croissante ou décroissante.	
3	Une suite décroissante est toujours majorée par son premier terme.	
4	Une suite peut être à la fois décroissante et minorée.	
5	Si une suite (u_n) est croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n^2} \geqslant u_n$	
6	Le 15ème terme de la suite (u_n) de premier terme u_0 est u_{15} .	
7	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.	
8	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.	
9	Un suite qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ est forcément croissante.	
10	Une suite divergente a forcément pour limite $+\infty$.	

Ex 2 : Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} - u_n = -2n^2 + 17n - 15$

2) $u_n=\sqrt{2n-1}-\frac{1}{n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$)

3) $u_n=\frac{5}{6^n}$

Ex 3 : Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=-3\left((-1)^n+2\right)$

2) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{n}}$

Ex 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) a) Compléter le programme ci-dessous permettant de calculer et d’afficher u_{10} .

```
from math import *
def f(x):
    return(sqrt(x**2+1))
def terme(u,n):
    for i in range (1,n+1):
        u=f(u)
    return( …. )
print(terme( …. , … ))
```

b) En utilisant la calculatrice et la méthode de votre choix, déterminer u_{10} .

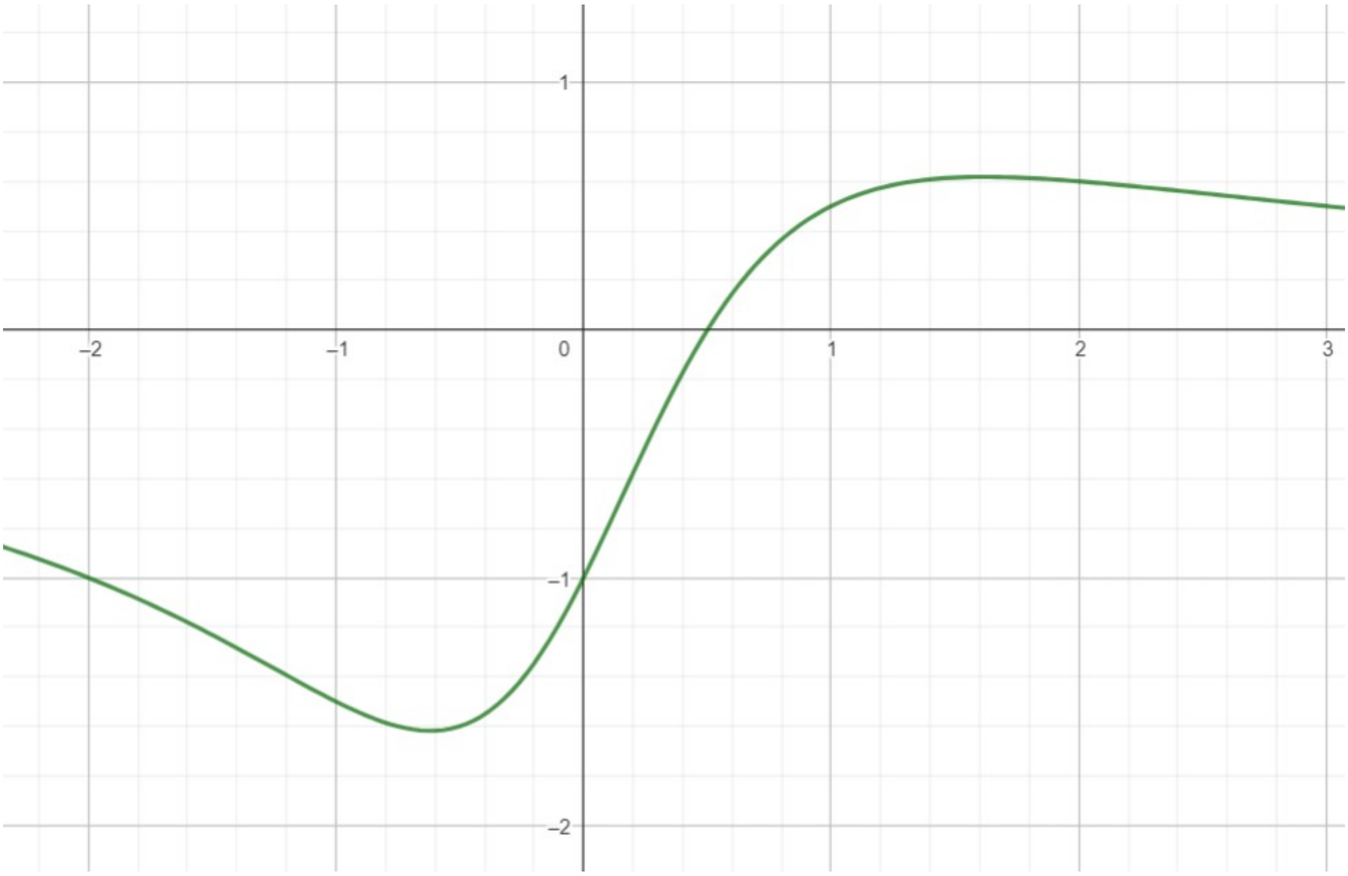
2) Compléter le programme ci-dessous permettant de calculer et d’afficher tous les termes de u_{10} à u_{50} .

```
from math import *
def f(x):
    return(sqrt(x**2+1))
def terme(u,k,n):
    for i in range (1,n+1):
        u=f(u)
        if ……… :
            print(u)
terme( …. , …. , …. )
```

Ex 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ (dont la représentation graphique est donnée ci-dessous) et la suite (u_n) , définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

Représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



Correction :

Ex 1 : Vrai ou faux (réponse juste : + 0,5 / réponse fausse : -0,5 / pas de réponse : 0)

1	Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.	vrai
2	Si (u_n) est monotone, alors (u_n) est croissante ou décroissante.	vrai
3	Une suite décroissante est toujours majorée par son premier terme.	Vrai
4	Une suite peut être à la fois décroissante et minorée.	Vrai
5	Si une suite (u_n) est croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n^2} \geqslant u_n$	Vrai
6	Le 15ème terme de la suite (u_n) de premier terme u_0 est u_{15} .	Faux
7	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.	Faux
8	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.	Vrai
9	Un suite qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ est forcément croissante.	Faux
10	Une suite divergente a forcément pour limite $+\infty$.	Faux

Ex 2 : 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -2n^2 + 17n - 15$

On étudie le signe du trinôme $\mathrm{P}(x) = -2x^2 + 17x - 15$. On trouve …. $x_1 = 1$ et $x_2 = 7{,}5$
$\mathrm{P}(x)$ est du signe de $a = -2$, sauf entre les racines. Ainsi $\mathrm{P}(x)$ est négatif pour $x > 7{,}5$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n \geqslant 8$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante à partir de $n = 8$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sqrt{2n-1} - \dfrac{1}{n} = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x-1} - \dfrac{1}{x}$
Il suffit d'étudier la fonction sur [1;+ ∞ [. f est dérivable sur [1;+ ∞ [, par opération sur les fonctions dérivables ?
Pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + \dfrac{1}{x^2} > 0$
Ainsi f est strictement croissante sur [1;+ ∞ [, et il en est donc de même pur la suite (u_n) .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{5}{6^{n+1}}}{\dfrac{5}{6^n}} = \left(\dfrac{5}{6^{n+1}}\right)\left(\dfrac{6^n}{5}\right) = \dfrac{1}{6} < 1$. Comme $u_n > 0$, on a $u_{n+1} < u_n$ et (u_n) est donc strictement décroissante

Ex 3 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3 \Rightarrow -9 \leqslant u_n \leqslant -3$
Donc (u_n) est bornée.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, clairement :
$0 \leqslant u_n \leqslant 1$
Donc (u_n) est bornée.

Ex 4 :

1) a)

```
from math import *
def f(x):
    return(sqrt(x**2+1))
def terme(u,n):
    for i in range (1,n+1):
        u=f(u)
    return(u)
print(terme(1,10))
```

b) $\mathbf{U_{10} \approx 3{,}3166247903554003}$

2)

```
from math import *
def f(x):
    return(sqrt(x**2+1))
def terme(u,k,n):
    for i in range (1,n+1):
        u=f(u)
        if i>=k :
            print(u)
terme(1,10,50)
```

Ex 5 :

La suite n'est ni croissante, ni décroissante.
La suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection
de la courbe représentant la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$ et la droite d'équation $y=x$.