1ère **Devoir surveillé n ° 6**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée interdites

Barème :	**Nom :**
1) 4 pts **2)** 3 pts **3)** 7,5 pts **4)** 6 pts	

Ex 1 : Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}$

1) Rappeler le domaine de définition D_f de la fonction f .

2) a) Soit $a>0$ et $h>0$, exprimer $t_a(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ sans racine carrée au numérateur.

b) Justifier alors que f est dérivable en $a>0$.

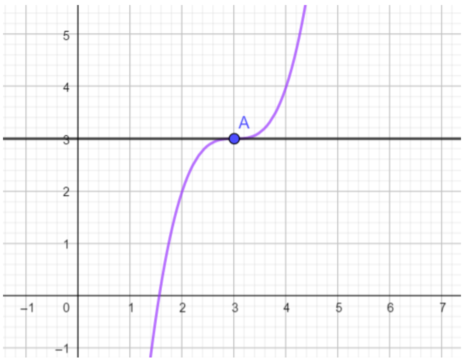
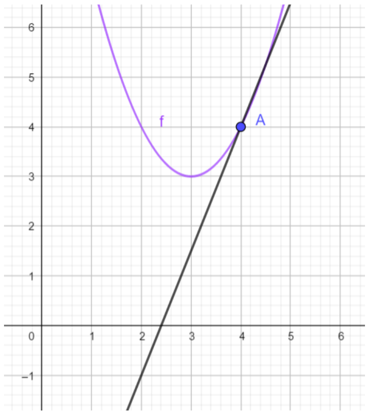
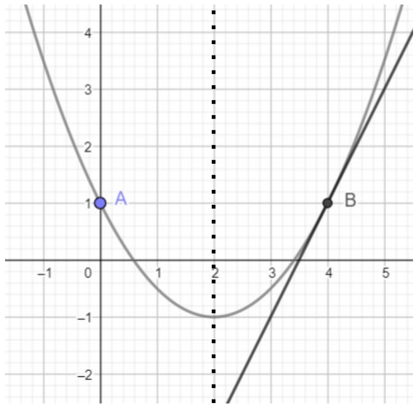
3) Justifier que f n'est pas dérivable en 0.

4) Déterminer l’équation de la tangente à la courbe au point d’abscisse 0.

Ex 2 :

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .

Déterminer $f'(a)$.

1) $f'(a)=$	2) $f'(a)=$	3) $f'(a)=$
		 La droite d’équation $x=2$ est un axe de symétrie

Ex 3 : Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble vos calculs sont valables.

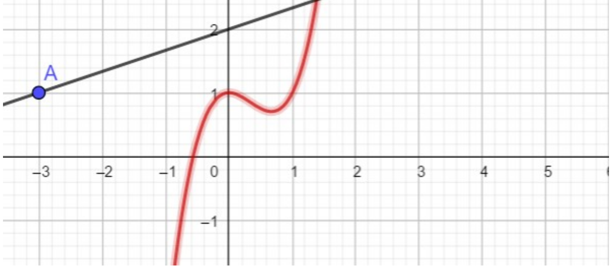
Fonction	Ensembles où les calculs sont valables	Fonctions dérivées.
1) $f:x \longmapsto (2x-1)\times(x^3-4)$		
2) $f:x \longmapsto \dfrac{5\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{4}$		

3) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-4}$		
4) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-5}$		
5) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}\right)^7$		

<u>Ex 4 :</u> On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-2x^2+1$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer la fonction dérivée de f .



2) Déterminer par le calcul les abscisses des points de C_f où la tangente à C_f est parallèle à la droite (AB).

3) a) Conjecturer le nombre de tangentes à la courbe passant par A.

b) Soit $M(m, f(m))$ un point de la courbe . Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point M.

c) Déterminer pour quelles valeurs de m les tangentes passent par A.

d) Que peut-on alors dire de la conjecture faite précédemment ?

Correction :

Ex 1 :

1) $D_f=\mathbb{R}^+$

2) a) Pour $a>0$ et $h>0$, on a :

$$t_a(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

b) Or $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{a+h}=\sqrt{a}$, donc $\lim\limits_{h\to 0}t_a(h)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Ainsi, pour tout réel $a>0$, f est dérivable en a et $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

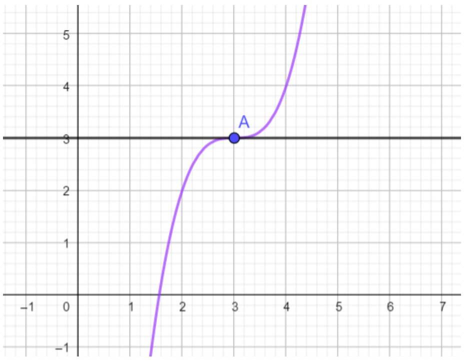
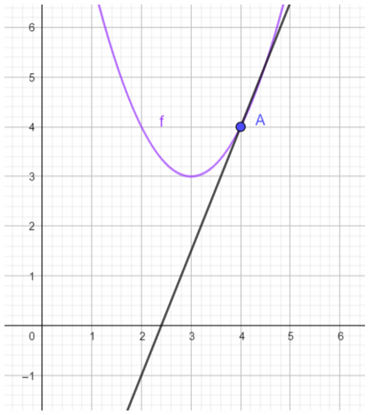
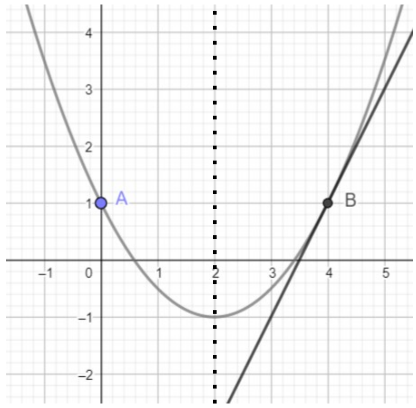
3) Si $a=0$.

Pour $h>0$, $t_0(h)=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim\limits_{h\to 0}t(h)=+\infty$, ce qui n'est pas un réel...

Donc $f:x\longmapsto\sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.

4) $x=0$

Ex 2 :

1) $f'(3)=0$	2) $f'(4)=\frac{5}{2}$	3) $f'(a)=\ -2$
		 La droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie

Ex 3 :

Fonction	Ensembles où les calculs sont valables	Fonctions dérivées
1) $f:x\longmapsto(2x-1)\times(x^3-4)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=8x^3-3x^2-8$
2) $f:x\longmapsto\frac{5\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{4}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x)=\frac{5}{6\sqrt{x}}$
3) $f:x\longmapsto\frac{x}{x^2-4}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$	$f'(x)=\frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$
4) $f:x\longmapsto\sqrt{3x-5}$	$\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$	$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$
5) $f:x\longmapsto\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)^7$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)^6$

Ex 4 :

1) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=6x^2-4x$.

2) (AB) a pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$. On doit donc résoudre l'équation :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\iff 6x^2-4x=\frac{1}{3}\iff 18x^2-12x-1=0\iff\dots\iff x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{6}\text{ et }x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{6}$$

3) a) Il semble qu'il y ait 2 tangentes.

b) $y=f'(m)(x-m)+f(m) \quad \Leftrightarrow \quad y=(6m^2-4m)(x-m)+2m^3-2m^2+1$

c)

$$\begin{aligned}
1=(6m^2-4m)(-3-m)+2m^3-2m^2+1 \quad & \Leftrightarrow \quad 0=-18m^2-6m^3+12m+4m^2+2m^3-2m^2 \\
& \Leftrightarrow \quad -4m^3-16m^2+12m=0 \\
& \Leftrightarrow \quad m^3+4m^2-3m=0 \\
& \Leftrightarrow \quad m(m^2+4m-3)=0 \\
& \Leftrightarrow \quad m=0 \text{ ou } m^2+4m-3=0 \\
& \Leftrightarrow \quad m=0 \text{ ou } m=-2-\sqrt{7} \text{ ou } m=-2+\sqrt{7} \quad \text{(après calcul de } \Delta \text{)}
\end{aligned}$$

d) La conjecture est fausse . Il y a en fait 3 tangentes.