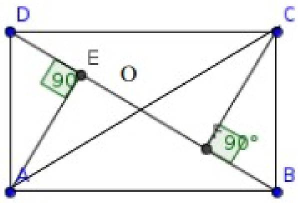
1ère **Devoir surveillé n ° 8**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées

Barème : **1)** 6 pts **2)** 3 pts **3)** 3 pts **3)** 8 pts	**Nom :**

Ex 1 : On considère un rectangle ABCD de centre O tel que AB=10 et AD=6.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droites (BD).
On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens et $\vec{j}$ et $\overrightarrow{AD}$ aussi.
1) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



2) En déduire la valeur exacte de la longueur de ED.

3) En utilisant à nouveau le produit scalaire, déterminer une valeur approchée (à 0,01 près) de la mesure en degré de l'angle $\widehat{BDA}$

Ex 2 :

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} t-1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$

Déterminer la ou les éventuelle(s) valeurs de t pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

<u>Ex 3 :</u> On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points A(-2;1) et B(8;-3).

Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -27$

Ex 4 : **Cocher la ou les bonne(s) réponse(s)** (Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes)

Partie A) On s'intéresse à la variable aléatoire X, simulée par le programme écrit en Python ci-dessous :

```
1  from random import random
2  p=...
3  alea=random()
4  if alea<=0.1:
5      print(5)
6  elif alea<=p:          (rappel : elif signifie sinon si)
7      print(10)
8  else:
9      print(15)
10 E=….
11 print("E=",E)
```

		A	B	C	D
1	Comment choisir p pour que $P(X=15)=0,4$?	0,4	0,6	0,5	0,7
2	Quelle instruction saisir en ligne 10 pour calculer l'espérance de cette variable aléatoire ?	E=0.1*5+(p-0.1)*10+(1-p)*15	E=0.1*5+p*10+(1-p)*15	E=0.1*5+(p-0.1)*10+1-p*15	E=p*5+(p-0.1)*10+1-p*15

Partie B)

SITUATION 1 :
Une urne contient 15 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 5.
- Une boule porte le numéro « 1 »
- Deux boules portent le numéro « 2 »
- Trois boules portent le numéro « 3 »
- Quatre boules portent le numéro « 4 »
- Cinq boules portent le numéro « 5 »

Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro inscrit sur la boule.

		A	B	C	D
3	$P(X\geqslant 3)=$	$1-P(X\leqslant 2)$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{4}{5}$
4	E(X) vaut	3,7	$\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{5} i^2$	1	$\frac{11}{3}$

SITUATION 2 : On tire deux boules de l'urne précédente successivement et sans remise . On appelle Y la variable aléatoire égale à -1 si les deux boules portent un numéro plus petit que 4 et égale à 3 si les deux boules portent le numéro 5.
Aide : Faire un arbre en considérant l'événement 5 : « la boule porte le numéro 5 » et son contraire.

		A	B	C	D
5	$P(Y=3)=$	$\frac{4}{21}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{4}{9}$	$1-P(Y=-1)$

SITUATION 3 : On reprend **la situation 1**, et on ajoute 6 boules portant le nombre « -6 » . On considère la variable aléatoire G donnant le gain obtenu en euros (par exemple, une boule « 2 » rapporte 2 euros et une boule « -6 » faire perdre 6 euros)

		A	B	C	D
6	Le jeu est :	tel qu'en jouant 19 parties, le joueur peut espérer gagner 21 euros.	favorable au joueur	défavorable au joueur	tel qu'en jouant 21 parties, le joueur peut espérer gagner 19 euros.
7	Pour rendre le jeu équitable, on ajoute encore une boule . Quel nombre doit porter cette boule pour que le jeu soit équitable ?	-22	19	-19	-21

Partie C)

Ex 6 :

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

		A	B	C	D
8	Sélectionner les bonnes réponses.	Si E(X)=E(Y) alors V(X)=V(Y)	Si V(X)=V(Y) alors V(2X+3)=V(-2Y-5)	X(Ω) et Y(Ω) ont forcément le même nombre d'éléments.	Si Y=1000X+2, alors σ (X)=1000 σ (Y)

Correction :

Ex 1 :

1) On a A(0;0), B(10;0) C(10,6) et D(0;6)

On obtient : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$

On a alors : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=10\times 10+(-6)\times 6=64$

D'autre part : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EF}$ (par projection de $\overrightarrow{EF}$ sur (DB))

$= DB \times EF$ (car $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont le même sens)

Or $DB=\sqrt{10^2+(-6)^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$

Ainsi $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{34}\times EF$

On en déduit que : $2\sqrt{34}\times EF=64 \Leftrightarrow EF=\frac{32}{\sqrt{34}}$ et donc $EF=\frac{32\sqrt{34}}{34}=\frac{16\sqrt{34}}{17}$

2) Par symétrie, on a DE=BF.

On en déduit que :

$2DE+EF=BD \Rightarrow 2DE=2\sqrt{34}-\frac{16\sqrt{34}}{17}=\frac{18\sqrt{34}}{17} \Rightarrow DE=\frac{9\sqrt{34}}{17}$

3) On a : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}=DB\times DA\times\cos\widehat{BDA} =\approx 2\sqrt{34}\times 6\times\cos\widehat{BDA} = 12\sqrt{34}\times\cos\widehat{BDA}$

On a aussi : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA} = DA^2 = 36$

Ainsi : $12\sqrt{34}\times\cos\widehat{BDA}=36 \Rightarrow \cos\widehat{BDA}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$

Donc $\widehat{BDA}\approx 59{,}04°$

Ex 2 :

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (t^2-2t)\times(t-1)+t\times(1-t)=0 \Leftrightarrow t^3-t^2-2t^2+2t+t-t^2=0 \Leftrightarrow t^3-4t^2+3t=0$

Ainsi

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow t(t^2-4t+3)=0 \Leftrightarrow t=0$ ou $t^2-4t+3=0$

L'équation $t^2-4t+3=0$ a pour solutions évidentes 1 et 3

Il y a donc trois possibilités 0 (pas très intéressante) , 1 et 3.

Ex 3 :

On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2 = MI^2-IA^2 = MI^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = IM^2-\frac{AB^2}{4}$

Et $AB^2=(8-(-2))^2+(-3-1)^2=10^2+4^2=116$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-27 \Leftrightarrow IM^2-\frac{AB^2}{4}=-27$

$\Leftrightarrow IM^2=\frac{AB^2}{4}-27$

$\Leftrightarrow IM^2=\frac{116}{4}-27=2$

$\Leftrightarrow IM=\sqrt{2}$ avec $I(3;-1)$

L'ensemble F est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$

<u>Ex 4 :</u> Cocher les bonnes réponses (Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes)

		A	B	C	D
1	Comment choisir p pour que $P(X=15)=0,4$?	0,4	0,6	0,5	0,7
2	Quelle instruction saisir en ligne 10 pour calculer l'espérance de cette variable aléatoire ?	E=0.1*5+(p-0.1)*10+(1-p)*15	E=0.1*5+p*10+(1-p)*15	E=0.1*5+(p-0.1)*10+1-p*15	E=p*5+(p-0.1)*10+1-p*15

		A	B	C	D
3	$P(X\geqslant 3)=$	$1-P(X\leqslant 2)$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{4}{5}$
4	E(X) vaut	3,7	$\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{5} i^2$	1	$\frac{11}{3}$

		A	B	C	D
5	$P(Y=3)=$	$\frac{4}{21}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{4}{9}$	$1-P(Y=-1)$

		A	B	C	D
6	Le jeu est :	tel qu'en jouant 19 parties, le joueur peut espérer gagner 21 euros.	favorable au joueur	défavorable au joueur	tel qu'en jouant 21 parties, le joueur peut espérer gagner 19 euros.
7	Pour rendre le jeu équitable, on ajoute encore une boule . Quel nombre doit porter cette boule pour que le jeu soit équitable ?	-22	19	-19	-21

		A	B	C	D
8	Sélectionner les bonnes réponses.	Si E(X)=E(Y) alors V(X)=V(Y)	Si V(X)=V(Y) alors V(2X+3)=V(-2Y-5)	X(Ω) et Y(Ω) ont forcément le même nombre d'éléments.	Si Y=1000X+2, alors σ (X)=1000 σ (Y)