1ères S01/12 **Devoir Surveillé n ° 8**	**Barème :**	**Nom :**
- Durée 2h	**1)** 4,5 pts **2)** 4 pts	
- une calculatrice autorisée par élève	**3)** 6,5 pts **4)** 6 pts	**Prénom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...*

Exercice 1 :

Soit la suite u de terme général u_n définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel *n* par : $u_{n+1}=u_n+2(n+1)$

PARTIE A :

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel *n,* on a : $u_{n+2}=u_n+4n+6$.

Proposition 2 : Pour tout entier naturel *n,* on a : $u_n=-2n^2+4n$.

Proposition 3 : La suite u est croissante.

PARTIE B :

a) On admet que u tend vers $+\infty$.
Ecrire en langage naturel (en utilisant ← pour l'affectation et les indicateurs FinSi, FinPour ou FinTantque) un algorithme de manière à obtenir à l'affichage la valeur de l'indice du premier terme de la suite u , vérifiant $u_n>1000$.

b) Quel est cet indice ?

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant 1$.

1) Montrer que $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
2) Etudier le sens de variation de cette suite.
3) Conjecturer le comportement de cette suite lorsque *n* tend vers $+\infty$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose : $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$.
   a) Simplifer l'écriture de S_n .
   b) Conjecturer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 3 :

Un des jeux proposés par la Française des jeux entre 1987 et 1993 était le tapis vert.
Le jeu consistait à remplir une grille en cochant, dans un jeu de 32 cartes, un pique, un cœur, un carreau et un trèfle. (On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de 8 cartes de chaque couleur : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8 et 7).

Le tirage quotidien se faisait en direct à la télévision : une carte de chaque couleur définissait la grille gagnante. Si on avait coché :

- les 4 cartes tirées, on gagnait 1000 fois sa mise ;
- 3 cartes tirées, on gagnait 30 fois sa mise ;
- 2 cartes tirées, on gagnait 2 fois sa mise.

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque grille associe le nombre de cartes qui coïncident avec les cartes tirées.
   a) Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\dfrac{1}{8}$.
   b) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X avec les probabilités écrites sous forme de fractions.
   c) En déduire la probabilité d'avoir une grille gagnante est $P_1=\dfrac{323}{4096}$.

2. On note G le gain algébrique du joueur pour une mise de 5 €.
    a) Donner la loi de probabilité de G.
    b) Quelle est l'espérance de gain ?
3. En supposant qu'un joueur ait rempli une grille au hasard tous les jours pendant une semaine :
    a) Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près que le joueur gagne exactement une fois dans la semaine ?
    b) Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près que le joueur gagne au moins une fois dans la semaine ?
4. En supposant qu'un joueur ait rempli une grille au hasard tous les jours pendant le mois d'avril (30 jours) :
    a) Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près que le joueur gagne entre 9 et 15 fois dans le mois ?
    b) Quelle est la probabilité pour que la fréquence de succès du joueur appartienne à l'intervalle [0,3 ; 0,5] ?
    c) Quelle est la probabilité pour que la fréquence de succès du joueur soit de 0,12 ?

Rq : *Ce jeu a disparu en 1993 car trop risqué pour l'organisateur. Beaucoup de parieurs aiment jouer le « carré d'as »... et les quatre as sont sortis le 28 mars 1988 ! Il y eut le nombre record d'environ 22000 gagnants.*

Exercice 4 :

Burj Khalifa, un des plus hauts gratte-ciel situés à Dubaï, compte 57 ascenseurs. La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,06. On considère que les pannes des ascenseurs sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité pour que 2 ascenseurs tombent en panne le même jour.
3. Calculer P(X<4). Interpréter le résultat trouvé.
4. En moyenne, combien d'ascenseurs tombent en panne un même jour ?
5. On donne ci-dessous un tableau concernant la variable X :

k	$P(X \leqslant k)$
0	0,0294
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	1,0000

a) Compléter ce tableau avec la calculatrice.

b) Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la variable aléatoire X.

c) Un employé est chargé de contrôler l'ensemble des ascenseurs du gratte-ciel un jour donné et repère 8 ascenseurs en panne lors de son passage. Peut-il douter de la fiabilité des ascenseurs ?

Correction :

Exercice 1 :

Soit la suite u de terme général u_n définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=u_n+2(n+1)$

PARTIE A :

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. ***Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.***

Proposition 1 : Pour tout entier naturel *n,* on a : $u_{n+2}=u_n+4n+6$.

Pour tout entier naturel *n,* on a :

$u_{n+2}=u_{n+1}+2(n+1+1)=u_n+2(n+1)+2(n+2)=u_n+4n+6$. Donc, c'est vrai.

Proposition 2 : Pour tout entier naturel *n,* on a : $u_n=-2n^2+4n$.

On a $u_2=u_0+4\times 0+6=6$ et $-2\times 2^2+4\times 2=0$. Donc c'est faux.

Proposition 3 : La suite u est croissante.

Pour tout entier naturel *n,* on a :
$u_{n+1}-u_n=2(n+1)>0$, donc la suite u est bien croissante . Donc, c'est vrai.

PARTIE B :

a) On admet que u tend vers $+\infty$.
Ecrire en langage naturel (en utilisant ← pour l'affectation et les indicateurs FinSi, FinPour ou FinTantque) un algorithme de manière à obtenir à l'affichage la valeur de l'indice du premier terme de la suite u , vérifiant $u_n>1000$.

```
u←0
i←0
Tant que (u<=1000) faire
        u←u+2*(i+1)
        i←i+1
FinTant que
Afficher i
```

b) Quel est cet indice ? On obtient 32.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$.

1) Montrer que $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a : $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

2) Etudier le sens de variation de cette suite.

Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)}=-\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}<0$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) Conjecturer le comportement de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.

On conjecture que la suite a pour limite 0

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

a) Simplifer l'écriture de S_n .

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) Conjecturer la limite de la suite (S_n) .

On conjecture que la suite (S_n) a pour limite 1.

Exercice 3 :

Un des jeux proposés par la Française des jeux entre 1987 et 1993 était le tapis vert.

Le jeu consistait à remplir une grille en cochant, dans un jeu de 32 cartes, un pique, un cœur, un carreau et un trèfle. (On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de 8 cartes de chaque couleur : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8 et 7).

Le tirage quotidien se faisait en direct à la télévision : une carte de chaque couleur définissait la grille gagnante.

Si on avait coché :

- les 4 cartes tirées, on gagnait 1000 fois sa mise ;
- 3 cartes tirées, on gagnait 30 fois sa mise ;
- 2 cartes tirées, on gagnait 2 fois sa mise.

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque grille associe le nombre de cartes qui coïncident avec les cartes tirées.

   a) Cette situation correspond à une succession de 4 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, à deux issues possibles : le succès, noté S, (la carte tirée est celle choisie par le joueur), de probabilité $p(S) = \frac{1}{8}$ et l'échec, noté E, (la carte tirée ne correspond pas à celle choisie par le joueur). De plus, la variable aléatoire compte le nombre de succès obtenus. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{8}$.

   b) Pour desser le tableau de la loi de probabilité de X avec les probabilités écrites sous forme de fractions, on utilise la formule suivante , valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 4$:

   $$P(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{4-k} .$$

   Comme $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$, et $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{2} = 6$, on trouve :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096}$	$4\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{1024}$	$6\left(\frac{1}{8}^2\right)\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{2048}$	$4\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{1024}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{4096}$

   c) On peut donc en déduire la probabilité P_1 d'avoir une grille gagnante : $P_1 = P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) = \frac{1}{4096} + \frac{7}{1024} + \frac{147}{2048} = \frac{323}{4096}$.

2. On note G le gain algébrique du joueur pour une mise de 5 €.

   a) La loi de probabilité de G est :

g_i	-5	5	145	4995
p_i	$\frac{2401}{4096}+\frac{343}{1024}=\frac{3773}{4096}$	$\frac{147}{2048}$	$\frac{7}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

b) L'espérance de gain est donc :

$$E(G)=-5\times\frac{3773}{4096}+5\times\frac{147}{2048}+145\times\frac{7}{1024}+4995\times\frac{1}{4096}=\frac{-2085}{1024}$$

3. On suppose qu'un joueur a rempli une grille au hasard tous les jours pendant une semaine. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de grilles gagnantes de ce joueur pendant cette semaine étudiée. Comme il s'agit de 7 expériences aléatoires, identiques et indépendantes à 2 issues possibles (la grille est gagnante ou perdante), dont la probabilité que la grille soit gagnante est égale à : $P_1=\frac{323}{4096}$, alors Y suit la loi binomilae de paramètres $n=7$ et $p=\frac{323}{4096}$.

   a) La probabilité que le joueur gagne exactement une fois dans la semaine est donc : P(Y=1)≈0,3372

   b) La probabilité que le joueur gagne au moins une fois dans la semaine est : $P(Y\geqslant 1)\approx 0{,}4373$

4. On suppose qu'un joueur a rempli une grille au hasard tous les jours pendant le mois d'avril. Soit Z la variable aléatoire qui compte le nombre de grilles gagnantes pendant le mois concerné. On a donc cette fois-ci Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=\frac{323}{4096}$.

   a) D'après la calculatrice, la probabilité que le joueur gagne entre 9 et 15 fois dans le mois est : 0,0004.

   b) La fréquence de succès se calcule ainsi : $f=\frac{nombre\ \ de\ \ succès}{nombre\ \ d'essais}=\frac{nombre\ \ de\ \ succès}{30}$. La probabilité pour que la fréquence de succès du joueur appartienne à l'intervalle [0,3 ; 0,5] correspond à la probabilité que le nombre d'essais appartienne à l'intervalle $[0{,}3\times 30 ; 0{,}5\times 30]=[9;15]$, soit 0,0004 d'après la réponse précédente :

   c) La probabilité pour que la fréquence de succès du joueur soit de 0,12 est égale à la probabilité que le nombre d'essais soit égal à $0{,}12\times 30=3{,}6$. Or le nombre de succès est nécessairement un nombre entier, donc la réponse est 0.

Rq : *Ce jeu a disparu en 1993 car trop risqué pour l'organisateur. Beaucoup de parieurs aiment jouer le « carré d'as »... et les quatre as sont sortis le 28 mars 1988 ! Il y eut le nombre record d'environ 22000 gagnants.*

<u>Exercice 4 :</u>

Burj Khalifa, un des plus hauts gratte-ciel situés à Dubaï, compte 57 ascenseurs. La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,06. On considère que les pannes des ascenseurs sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné.

1. Cette situation revient à considérer 57 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, à deux issues possibles : le succès (l'ascenceur est en panne), noté S et l'échec (l'ascenceur est en état de marche). On sait que $P(S)=0{,}06$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=57$ et $p=0{,}06$.
2. La probabilité pour que 2 ascenseurs tombent en panne le même jour est : $P(X=2)=\binom{57}{2}\ 0{,}06^2\times(1-0{,}06)^{57-2}\approx 0{,}1911$
3. D'après la calculatrice, on trouve : $P(X<4)=P(X\leqslant 3)\approx 0{,}551$. La probabilité qu'il y ait au maximum 3 ascenceurs en panne le même jour est donc environ égale à 0,8743
4. $np=56\times 0{,}06=3{,}42$. En moyenne, chaque jour entre 3 et 4 ascenseurs tombent en panne.
5. On donne ci-dessous un tableau concernant la variable X :

k	$P(X \leqslant k)$
0	0,0294
1	0,1364
2	0,3275
3	0,5512
4	0,7439
5	0,8743
6	0,9465
7	0,9800
8	0,9934
9	0,9981
10	0,9995
11	0,9999
12	1,0000
13	1,0000
14	1,0000

a) Pour obtenir un tel tableau à la calculatrice, on peut aller dans le dossier tableur, et créer la colonne des entiers de 0 à 57, puis on consruit la colonne des fréquences cumulées croissantes de la loi binomiale de paramètres $n=57$ et $p=0{,}06$.

b) Pour déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la variable aléatoire X, on cherche le premier entier a tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a) > 0{,}025$, ici $a=0$, puis le premier entier b tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant b) > 0{,}975$, ici $b=7$. L'intervalle cherché est donc : $\mathrm{I}=\left[\frac{0}{57};\frac{7}{57}\right]$.

c) Un employé est chargé de contrôler l'ensemble des ascenseurs du gratte-ciel un jour donné et repère 8 ascenseurs en panne lors de son passage. La fréquence observée est donc $\frac{8}{57} \notin \mathrm{I}$. L'employé peut donc douter de la fiabilité des ascenseurs.